

ATTI
DELLA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXLVII

1950

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

(1° semestre 1950)



ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1950

Digitized by the Internet Archive
in 2023

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 gennaio 1950

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Geometria. — *Topologia differenziale.* — I. *Enti topologici determinati da elementi differenziali di curve.* Nota (*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

I. PREMessa. — In questa Nota, ed in altre che seguiranno, mi propongo di esporre risultati riguardanti elementi differenziali (di curve, di superficie, di varietà) uscenti da un punto di uno spazio topologico X_n considerati rispetto a trasformazioni qualsiasi sia delle coordinate in X_n sia dei parametri sugli elementi (la classe di queste trasformazioni, cioè l'ordine delle derivate esistenti e continue nel campo che si studia, essendo abbastanza alto da assicurare la validità delle operazioni che occorre fare).

Per dare subito un'idea del tipo dei risultati cui alludo ricorderò il notissimo teorema di Halphén secondo il quale due curve tangenti in un punto dell'ordinario spazio proiettivo S_3 (e meglio: due elementi differenziali del 2° ordine E_2 di curve, aventi in comune l'elemento differenziale del 1° ordine E_1 , cioè il punto e la tangente) determinano un *piano principale*, luogo dei punti da cui le due curve sono proiettate (sopra un piano qualsiasi) in due curve aventi contatto del 2° ordine (o meglio: i due E_2 dati sono proiettati in uno stesso E_2). Questo teorema (del quale L. Berzolari⁽¹⁾ ed io⁽²⁾ abbiamo dato varie estensioni anche agli iperspazi proiettivi) non mette tuttavia in luce la vera sua natura, che è *topologica* e non proiettiva. Che così sia risulta dal fatto che, come ho mostrato diversi anni fa⁽³⁾, quel piano principale è il piano tangente a *tutte* le superficie contenenti i due

(*) Presentata nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) L. BERZOLARI, *Sugli invarianti differenziali proiettivi delle curve in un iperspazio* (« Ann. di Mat. », ser. II, vol. 26, 1897).

(2) E. BOMPIANI, *Sul contatto di due curve sghembe* (« Memorie Acc. di Bologna », ser. VIII, to. III, 1925-26); *Invarianti d'intersezione di due curve sghembe* (« Rend. Lincei », ser. VI, vol. XIV, 1931); *Sulle curve sghembe* (*Scritti matematici offerti a L. Berzolari*), Pavia, Rossetti (1931).

(3) Ved. la prima Memoria citata nella Nota precedente.

E_2 tangenti dati. L'operazione di proiezione (avente carattere proiettivo) è del tutto superflua.

Teoremi di natura analoga si trovano nella Tesi di P. Finsler⁽⁴⁾ da cui sono nati quelli che oggi chiamiamo gli *spazi di Finsler*, cioè la geometria del calcolo delle variazioni. Nei « Grundbegriffe », poichè realmente si tratta di concetti fondamentali, sono dati sei teoremi, riguardanti ciò che oggi diremmo una k -giacitura e un elemento curvilineo di un certo ordine, aventi carattere topologico. A base di essi è il procedimento di proiezione (das Projizieren); ma in realtà se ne può fare a meno e con vantaggio.

Sta di fatto che teoremi riguardanti elementi differenziali, di vario ordine e dimensione e in vario numero, sono necessari e stanno a fondamento di varie ricerche di geometria differenziale e — anche — di geometria algebrica⁽⁵⁾; sicchè mi pare opportuno occuparsene esplicitamente.

Non mi è possibile elencare qui i risultati che ho intenzione di esporre; ma tanto per accennare ad alcuni di essi, dirò che vi si troveranno nuove configurazioni invarianti (topologicamente) e invarianti finiti e infinitesimi determinati da elementi curvilinei; l'estensione al caso topologico della nozione di spazio osculatore ad una varietà; l'estensione ad uno spazio proiettivo curvo a tre dimensioni, cioè uno spazio topologico in cui sia dato un sistema di equazioni differenziali del tipo di quelle delle estremali o delle autoparallele di una connessione, della teoria delle applicabilità proiettive di Fubini; ecc.

2. ELEMENTI DIFFERENZIALI. — Per quanto me ne sia occupato io stesso più volte, specialmente (ma non unicamente) negli spazi proiettivi, è opportuno precisarne la definizione⁽⁶⁾.

Consideriamo uno spazio aritmetico X_n , cui le coordinate s'indichino con x^i , $i = 1, \dots, n$ e in esso un punto, sia O , cui possiamo sempre attribuire le coordinate $x^i = 0$.

Si considerino poi le funzioni $x^i(t^1, \dots, t^k)$, o in breve $x^i = x^i(t^\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, k$ definite in determinati intervalli per le t^α e che per valori opportuni delle t^α (interni a questi intervalli), per esempio per $t^\alpha = 0$, assumano i valori $x^i(0) = 0$.

(4) P. FINSLER, *Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Raumen*. Inaugural Dissertation, Göttingen 1918.

(5) Si veda ad esempio la mia Nota: *Una proprietà caratteristica dei conici di Veronese* (« Rend. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. IV, 1943); osservazione al n. 6.

(6) Si vedano per esempio i miei lavori: *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei* (« Rend. Lincei », ser. VI, vol. XXII, 1935); *Gli invarianti proiettivi nella teoria delle superficie*. — I. *Ricostruzione rapida della teoria delle applicabilità proiettive* (« Rend. Lincei », ser. VI, vol. XXIV, 1936); *Costruzioni di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei* (« Rend. Lincei », ser. VI, vol. XXV, 1937); *Sulle varietà anolonomie* (« Rend. Lincei », ser. VI, vol. XXVII, 1938); *Costruzione delle calotte superficiali di 2° ordine in un iperspazio* (« Rend. Lincei », ser. VI, vol. XXIX, 1939); *Geometria proiettiva di elementi differenziali* (« Ann. di Mat. », ser. IV, to. XXII, 1943); *Elementi differenziali regolari e non regolari nel piano e loro applicazioni alle curve algebriche piane* (« Rend. di Mat. e delle sue applicazioni », ser. V, vol. V, 1946); *Fasci di elementi differenziali nel piano proiettivo* (« Rend. di Mat. e delle sue applicazioni », ser. V, vol. VII, 1948).

Si suppongano valide per le $x^i(t^a)$ formole di Taylor

$$(2.1) \quad x^i(t^a) = \partial_a x^i t^a + \frac{1}{2} \partial_{a_1 a_2} x^i t^{a_1} t^{a_2} + \dots + \frac{1}{k!} \partial_{a_1 \dots a_s} x^i t^{a_1} \dots t^{a_s} + \dots$$

ove le derivate

$$(2.2) \quad \partial_a x^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^a}, \quad \partial_{a_1 a_2} x^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^{a_1} \partial t^{a_2}}, \dots, \partial_{a_1 \dots a_s} x^i = \frac{\partial^s x^i}{\partial t^{a_1} \dots \partial t^{a_s}}$$

s'intendono calcolate per le $t^a = 0$ e i termini non scritti dopo l' s -esimo gruppo indicano un resto qualsiasi. Se è la matrice Jacobiana

$$(2.3) \quad (\partial_a x^i) \neq 0$$

(cioè se ha rango massimo) e in tutto l'intorno di O in cui è $\neq 0$ (intorno che è la X_n alla quale ci riferiamo), diremo che gli sviluppi (2.1), quali si siano i resti non indicati, determinano una calotta regolare di dimensione k e d'ordine s (di centro od origine O). Questa s'indicherà con σ_k^s (se $k = 1$ invece di calotta parleremo di elemento curvilineo e si indicherà anche con E_s ; per $s = 1$ parleremo di k -giacitura).

Diremo *proprietà topologiche* di due o più calotte quelle invarianti per qualsiasi trasformazione (regolare nell'intorno del punto) di coordinate (di classe $\geq s$, se s è l'ordine più elevato delle calotte considerate) e dei parametri su ciascuna calotta (di classe $\geq s$). Naturalmente poichè si studiano calotte per O si potrà limitarsi, senza restrizione, alle trasformazioni che lasciano fisso O .

3. GIACITURA PRINCIPALE DETERMINATA DA ELEMENTI E_2 TANGENTI. - Sia dato un E_2 di centro O ($x^i = 0$) in X_n . Possiamo sempre scegliere le coordinate in modo che per la direzione E_1 di E_2 sia $dx^i = 0$ per $i \neq n$, $dx^n \neq 0$, cioè dare alle equazioni di E_2 la forma

$$(3.1) \quad x^i = \mu^i t^2 + \dots, \quad x^n = t + \mu t^2 + \dots; \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Una qualsiasi X_{n-1} per cui O sia regolare ha una calotta σ_{n-1}^2 definita da

$$(3.2) \quad a_\rho x^\rho = a_{\rho\sigma} x^\sigma x^\sigma + \dots; \quad \rho, \sigma = 1, \dots, n.$$

Essa contiene l' E_2 (3.1) se e solo se

$$(3.3) \quad a_n = 0, \quad a_i \mu^i = a_{nn}; \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Consideriamo ora $k \leq n$ elementi E_2 con la stessa tangente; uno di questi E_2 abbia le equazioni

$$(3.4) \quad x_\alpha^i = \mu_\alpha^i t^2 + \dots, \quad x_\alpha^n = t + \mu_\alpha t^2 + \dots; \quad \alpha = 1, \dots, k.$$

Dalle (3.3) scritte per due di questi elementi, distinti con gli indici sottoposti α e β , $\alpha \neq \beta$, si ha

$$(3.5) \quad a_i \left(\mu_\alpha^i - \mu_\beta^i \right) = 0; \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Posto

$$(3.6) \quad m_{\alpha\beta}^i = - \dot{m}_{\beta\alpha}^i = \mu_\alpha^i - \mu_\beta^i; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, k$$

si considerino i $k(k-1)/2$ (per esempio per $\alpha < \beta$) vettori aventi queste componenti (e $m_{\alpha\beta}^n = 0$). Questi, appena $k > 2$, non sono certo linearmente indipendenti perchè

$$(3.7) \quad m_{\beta\gamma}^i = m_{\alpha\beta}^i - m_{\alpha\gamma}^i;$$

anzi si vede che ve ne sono al più $k-1$ indipendenti (per esempio $m_{1\beta}^i, \beta \neq 1$). Se quelli indipendenti sono esattamente $k-1$, diremo i k elementi E_2 dati *linearmente indipendenti*.

Si vede subito che questa nozione di *indipendenza lineare di k elementi E_2* non dipende affatto (mentre a prima vista sembrerebbe il contrario) dalla parametrizzazione di ciascun elemento; e ciò si verifica subito.

Se i k elementi sono indipendenti si hanno $k-1$ condizioni (3.5) cui deve soddisfare la giacitura tangente ad X_{n-1} in O , oltre ad $a_n = 0$; sicchè l'appartenenza ad essa dei vettori $(m_{i\alpha}^i, 0)$, $i = 1, \dots, n-1$; $\alpha = 2, \dots, k$, e (δ_n^i) , $i = 1, \dots, n$ determina una k -giacitura.

Questa è la *k-giacitura principale relativa ai k elementi E_2 tangenti e linearmente indipendenti*.

Ogni calotta σ_k^2 (a k dimensioni e del 2° ordine) contenente i k elementi dati deve essere tangente alla *k-giacitura principale* (questa è la σ_k^1 di tutte le σ_k^2).

4. PENNELLO DETERMINATO DA E_2 TANGENTI. - Ma c'è di più. Queste calotte σ_k^2 non hanno in comune soltanto la σ_k^1 ma anche tutto l'intorno di 2° ordine nella direzione degli E_2 .

Infatti individuata una qualsiasi σ_k^2 con equazioni del tipo (3.2), in un numero di $n-k$ indipendenti, i cui coefficienti potranno indicarsi con $a_{\pi}^{\alpha}, a_{\pi}^{\beta}, \pi = 1, \dots, n-k$, le condizioni (3.5), cioè

$$(4.1) \quad a_{\pi} m_{\alpha\beta}^i = 0$$

rendono compatibili le condizioni (3.3), cioè

$$(4.2) \quad a_{\pi} \mu_{\alpha}^i = a_{\pi} \mu_{\beta}^i = a_{\pi n}$$

che determinano quindi le $a_{\pi n}$. E ciò equivale a dire che è determinato l'intorno di 2° ordine su qualsiasi σ_k^2 contenente gli E_2 nella direzione ad essi tangente.

Tutte le calotte σ_k^2 contenenti i k E_2 tangenti hanno in comune la σ_k^1 (giacitura principale) e l'intorno di 2° ordine in direzione della tangente comune.

Tale intorno può pensarsi come luogo di ∞^{k-1} E_2 aventi la stessa tangente e tali che a due a due abbiano una 2-giacitura principale appartenente alla k -giacitura principale degli E_2 dati.

A questo nuovo ente geometrico dò il nome di *pennello k-dimensionale*, o *k-pennello* di E_2 (determinato da k indipendenti di essi).

Del resto si ha subito la rappresentazione analitica del pennello, poichè un suo E_2 è della forma (3.1) con le λ^{α} arbitrarie e

$$(4.3) \quad \mu^i = \lambda^{\alpha} \mu_{\alpha}^i / \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} \quad \alpha = 1, \dots, k$$

mentre la μ rimane arbitraria (si noti del resto che anche le μ_{α} non sono mai entrate nelle considerazioni precedenti: esse dipendono dalle parametrizzazioni e possono anche rendersi nulle).

Se (a_i, a_{nn}) , $i = 1, \dots, n$, s'interpretano come coordinate omogenee di iperpiano in uno S_{n-1} proiettivo le soluzioni μ^i delle equazioni (4. 2), cioè

$$(4. 4) \quad a_i \mu^i = a_{nn}$$

rappresentano punti di un S_{k-1} di S_{n-1} : lo S_{k-1} è l'immagine (in S_{n-1}) del k -pennello di E_2 .

5. ALTRA RAPPRESENTAZIONE DEL PENNELLO. PARAMETRI RACCORDATI. — Alle stesse conclusioni si arriva con la seguente rappresentazione analitica di cui ci varremo in seguito.

Distinguiamo le coordinate in due gruppi: le x^p per $p = 1, \dots, k$, e le χ^i per $i = 1, \dots, n - k$, in modo da scrivere le equazioni di una σ_k^2 nella forma

$$(5. 1) \quad \chi^i = a_p^i x^p + a_{pq}^i x^p x^q + \dots$$

con $i = 1, \dots, n - k$; $p, q = 1, \dots, k$ (similmente in seguito per i', j', p', q', r'). Le equazioni degli E_2 tangenti siano

$$(5. 2) \quad \begin{cases} x^p = \lambda^p t + \mu^p t^2 + \dots \\ \chi^i = \lambda^i t + \nu^i t^2 + \dots \end{cases} \quad \alpha = 1, \dots, k$$

(t^2 è il quadrato di t).

Affinchè la σ_k^2 contenga questi E_2 occorre e basta che

$$(5. 3) \quad \lambda^i = a_p^i \lambda^p$$

$$(5. 4) \quad \nu^i = a_p^i \mu^p + a_{pq}^i \lambda^p \lambda^q,$$

da cui

$$(5. 5) \quad \nu^i - \nu^i = a_p^i (\mu^p - \mu^p).$$

Le relazioni (5. 3) e (5. 5), quando gli E_2 dati siano linearmente indipendenti, determinano le a_p^i , cioè la calotta σ_k^1 (giacitura principale).

Se questa si assume come rappresentata da $\chi^i = 0$ (e qui si rivela l'opportunità di distinguere le coordinate in due gruppi) si ha $a_p^i = 0$ e in conseguenza $\lambda^i = 0$, $\nu^i = \nu^i = \nu^i$. Le equazioni degli E_2 si scrivono

$$(5. 6) \quad \begin{cases} x^p = \lambda^p t + \mu^p t^2 + \dots \\ \chi^i = \nu^i t^2 + \dots \end{cases}$$

Facciamo ora una considerazione relativa ai parametri. Si ponga per esempio $t = t$ (per semplicità) e si consideri una corrispondenza regolare arbitraria, in cui

O sia unito, fra l' E_2 di parametro t e l' E_2 di parametro t_α . Essa sarà rappresentata da

$$(5.7) \quad t = at_\alpha + \rho_\alpha t_\alpha^2 \dots$$

Fra queste corrispondenze è *intrinsecamente* determinato l'insieme di quelle che hanno in O *due punti uniti* infinitamente vicini; per esse $a = 1$, quindi

$$t = t_\alpha + \rho_\alpha t_\alpha^2 + \dots$$

Un parametro t scelto in questo modo (scelta che ha carattere intrinseco) si dirà *raccordato* al parametro t_α .

Se si riferiscono tutti gli elementi E_2 a parametri raccordati con t si potrà nelle (5.2) scrivere ovunque t invece di t_α ; però bisognerà tener presente che le μ_α^p possono alterarsi per un addendo del tipo $\rho_\alpha \lambda^p$.

Geometria. — Topologia differenziale. — II. Invarianti topologici di elementi curvilinei. Nota (*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

6. INVARIANTE INFINITESIMO DI $k E_2$ TANGENTI E DI $k E_1$ NELLA LORO GIACITURA PRINCIPALE (1). — Esaminiamo ora l'effetto di una trasformazione puntuale che lasci fisso O e la giacitura $z^i = 0$. Tenuto conto dei diversi intervalli di variabilità degli indici, tale trasformazione (e fino all'intorno del secondo ordine che solo c'interessa) può scriversi

$$(6.1) \quad \begin{cases} x^p = \vartheta_{p'}^p x^{p'} + \frac{1}{2} \vartheta_{p'q'}^p x^{p'} x^{q'} + \vartheta_{j'}^p z^{j'} + \dots \\ z^i = \sigma_{i'}^i z^{i'} + \frac{1}{2} \sigma_{p'q'}^i x^{p'} x^{q'} + \dots \end{cases}$$

S'introducano gli elementi reciproci $\vartheta_p^{p'}$ delle $\vartheta_{p'}^p$ e $\sigma_i^{i'}$ delle $\sigma_{i'}^i$, nei loro determinanti. Gli E_2 trasformati degli elementi (5.6) siano

$$(6.2) \quad \begin{cases} x^{p'} = \lambda^{p'} t + \mu_\alpha^{p'} t_\alpha^2 + \dots \\ z^{j'} = \nu^{j'} t_\alpha^2 + \dots \end{cases}$$

ove

$$(6.3) \quad \lambda^{p'} = \vartheta_p^{p'} \lambda^p, \quad \mu_\alpha^{p'} = \vartheta_p^{p'} \{ \mu_\alpha^p - \Phi^p(\lambda, \nu) \}$$

$$(6.4) \quad \Phi^p(\lambda, \nu) = \nu^i \sigma_j^{i'} \vartheta_{j'}^p + \frac{1}{2} \{ \vartheta_{p'q'}^p - \vartheta_{j'}^p \sigma_{p'q'}^j \} \vartheta_r^{p'} \vartheta_s^{q'} \lambda^r \lambda^s.$$

Si ha quindi

$$(6.5) \quad m_{\alpha\beta}^{p'} = \mu_\alpha^{p'} - \mu_\beta^{p'} = \vartheta_p^{p'} (\mu_\alpha^p - \mu_\beta^p) = \vartheta_p^{p'} m_{\alpha\beta}^p.$$

(*) Presentata nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) Continua la numerazione della Nota precedente sulla *Topologia differenziale*.

Se si riferiscono tutti gli elementi a parametri raccordati con un unico parametro t le $m_{\alpha\beta}^p$ si alterano per un addendo del tipo $(\rho - \rho) \lambda^p$.

Si considerino ora k elementi E_i o direzioni appartenenti alla giacitura principale, individuati da λ_{α}^p e $\lambda_{\alpha}^i = 0$, $\alpha = 1, \dots, k$ (le λ_{α}^p sono determinate a meno di un fattore σ).

Teniamo infine conto che se dal parametro t (a cui tutti sono stati raccordati) si passa ad un nuovo parametro t' tale che

$$(6.6) \quad t = ht' + kt'^2 + \dots$$

si ha

$$(6.7) \quad \lambda^{\rho'} = \vartheta_p^{\rho'} \lambda^p \cdot h, \quad m_{\alpha\beta}^{\rho'} = \vartheta_p^{\rho'} m_{\alpha\beta}^p \cdot h^2.$$

Si considerino ora i determinanti

$$(6.8) \quad \begin{cases} M = \text{Det}(m_{12}^p, m_{13}^p, \dots, m_{1k}^p, \lambda) \\ \Lambda = \text{Det}(\lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_k^p) \\ \Lambda_q = \text{Det}(\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}, \lambda, \lambda_{q+1}, \dots, \lambda_k), \end{cases} \quad \rho = 1, \dots, k$$

e s'indichino con M', Λ', Λ'_q i loro trasformati per cambiamenti (6.1), e sia J lo jacobiano delle $x^{p'}$ rispetto alle x^p . Per quanto precede si ha

$$(6.9) \quad M' = MJ, \quad \Lambda' = \Lambda J, \quad \Lambda'_q = \Lambda_q J.$$

Se si cambiano i parametri raccordandoli ad un parametro t nulla cambia perchè in M entrano tanto le $m_{\alpha\beta}^p$ quanto le λ^p ; se poi si cambia t in t' con $t = ht'$ indicati con $\bar{M}, \bar{\Lambda}, \bar{\Lambda}_q$ i nuovi valori dei determinanti (6.8) si ha

$$(6.10) \quad \bar{M} = Mh^{2k-1}, \quad \bar{\Lambda} = \Lambda h^k, \quad \bar{\Lambda}_q = \Lambda_q h^k, \quad dt' = h^{-1} dt.$$

Tenuto conto di tutti i cambiamenti si ha quindi che:

L'espressione

$$(6.11) \quad \frac{M\Lambda^{k-1}}{\Lambda_1\Lambda_2\cdots\Lambda_k} dt^{k-1}$$

è un invariante infinitesimo dei k elementi E_2 dati e dei k elementi appartenenti alla loro giacitura principale.

7. SIGNIFICATI METRICI DELL'INVARIANTE PRECEDENTE. - Si possono trovare significati metrici dell'invariante (6.11) immaginando di deformare una calotta σ_k^2 per i k elementi E_2 in modo da portarla in uno spazio euclideo (di dimensione $\geq k$).

Limitiamoci, per esemplificare, al caso $k=2$.

Se si deforma una σ_2^2 che li contenga in un piano euclideo i due E_2 acquistano i raggi di curvatura R_1, R_2 ; sia ds l'elemento d'arco nella loro direzione tangente e siano α_1, α_2 gli angoli che i due E_1 formano con essa. L'espressione metrica dell'invariante è allora

$$(7.1) \quad \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} ds.$$

Più in particolare, si può deformare uno degli E_2 in modo che diventi di flesso (rettilineo), per esempio $1/R_2 = 0$: si ritrova allora il significato metrico già da me dato dell'invariante proiettivo di un E_2 e di due E_1 di un piano uscenti da uno stesso punto.

Si attui invece la deformazione della σ_2^2 considerata in modo da ridurla ad una calotta di S_3 euclideo. Detti: R il raggio della sezione normale della calotta nella direzione degli E_2 e ds il suo elemento d'arco; ω_1, ω_2 gli angoli dei loro piani osculatori con il piano tangente alla calotta; α_1, α_2 gli angoli dei due E_1 con la tangente agli E_2 si ha per l'invariante l'espressione

$$(7.2) \quad (\cot \omega_1 - \cot \omega_2) \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} \frac{ds}{R}.$$

8. INVARIANTI FINITI DI k E_2 TANGENTI E DI $k+s$ E_1 IN UNA GIACITURA CONTENENTE QUELLA PRINCIPALE DEGLI E_2 . - Adottiamo ancora per i k E_2 tangenti la rappresentazione (5.6) con parametri t raccordati ad un parametro t (con l'indeterminazione già segnalata per le μ^p).

Per avere la rappresentazione analitica più semplice dividiamo le coordinate in due gruppi: le x^p per $p = 1, \dots, k+s$ e le z^j per $j = 1, \dots, n-k-s$; e scegliamole in modo che la $(k+s)$ -giacitura dei $k+s$ E_1 sia rappresentata da $z^j = 0$, mentre la k -giacitura principale degli E_2 sia data da $z^j = 0$ e $x^{k+a} = 0$, con $a = 1, \dots, s$.

Allora riscriveremo le (5.6) così:

$$(8.1) \quad \begin{cases} x^p = \lambda^p t + \mu^p t^2 + \dots & p = 1, \dots, k+s \\ z^j = \nu^j t^2 + \dots & j = 1, \dots, n-k-s \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha = 1, \dots, k \\ \alpha = 1, \dots, k \end{matrix}$$

aggiungendo le posizioni

$$(8.2) \quad \lambda^{k+a} = 0, \quad \mu_{\alpha}^{k+a} = \mu^{k+a}, \quad a = 1, \dots, s.$$

Per i $k+s$ elementi E_1 (direzioni) adotteremo la rappresentazione

$$(8.3) \quad z^j = 0, \quad x^p = \lambda^p t \quad \rho = 1, \dots, k+s$$

Una trasformazione puntuale che lasci fissa la $(k+s)$ -giacitura e in essa la k -giacitura principale può ancora rappresentarsi con le (6.1) salva la differenza negli intervalli di variabilità degli indici ($p, q, r, p', q', r' = 1, \dots, k+s$; $i, j, i', j' = 1, \dots, n-k-s$) e il fatto che

$$(8.4) \quad \lambda^{k+a} = 0, \quad m_{\alpha\beta}^{k+a} = 0, \quad \vartheta_{p'}^p = 0 \quad \text{per } p \leq k, p' > k.$$

Conserviamo per Λ_0 significato analogo a quello dato dalla (6.8) (salvo il numero delle direzioni che vi figurano), cioè

$$(8.5) \quad \Lambda_0 = \text{Det} \begin{pmatrix} \lambda^p & \dots & \lambda^p & \lambda^p & \dots & \lambda^p \\ 1 & & q-1 & q+1 & & k+s \end{pmatrix}$$

e poniamo poi

$$(8.6) \quad M_{\sigma, \tau_1, \dots, \tau_{s-1}} = \text{Det} (m_{12}^{\rho}, m_{13}^{\rho}, \dots, m_{1k}^{\rho}, \lambda, \lambda, \lambda, \dots, \lambda)_{\substack{\rho \\ \sigma \quad \tau_1 \quad \tau_{s-1}}}$$

con $\tau_1, \dots, \tau_{s-1}$ diversi fra loro e da ρ scelti fra 1 e $k+s$.

Esaminiamo ora l'espressione

$$(8.7) \quad \frac{M_{\sigma, \tau_1, \dots, \tau_{s-1}} \Lambda_{\sigma}}{M_{\sigma, \tau_1, \dots, \tau_{s-1}} \Lambda_{\sigma}} \quad , \quad \begin{array}{l} \rho \neq \sigma \\ \rho, \sigma \neq \tau_1, \dots, \tau_{s-1} \end{array}$$

Essa è omogenea di grado zero nelle componenti delle $k+s$ direzioni degli E_1 e non varia nè per cambiamenti delle coordinate, nè per cambiamenti di parametri raccordati con un parametro t , nè per cambiamento di questo.

Le espressioni (8.7) sono invarianti topologici finiti dei $k E_2$ tangenti dati e di $k+s$ direzioni (o E_1) la cui $(k+s)$ -giacitura contenga la k -giacitura principale degli E_2 .

9. INVARIANTI INFINITESIMI DI $k E_2$ TANGENTI E DI $k+s E_1$ LA CUI GIACITURA CONTENGA LA k -GIACITURA PRINCIPALE. - Consideriamo oltre i determinanti (8.5), (8.6) il determinante

$$(9.1) \quad \Lambda = \text{Det} (\lambda_1^{\rho}, \dots, \lambda_{k+s}^{\rho})$$

relativo alle $k+s$ direzioni degli E_1 ; scegliamo ad arbitrio una delle $k+s$ direzioni, che possiamo indicare sempre con λ , e formiamo il prodotto

$$(9.2) \quad L_1 = \prod_{\sigma \neq 1} \Lambda_{\sigma} = \text{Det} (\lambda \lambda \lambda \dots \lambda)_{\substack{1 \\ 3 \quad k+s}} \dots \text{Det} (\lambda \lambda \dots \lambda \lambda)_{\substack{1 \quad 2 \quad k+s}}$$

dei determinanti Λ_{σ} per $\sigma \neq 1$. Esso è omogeneo di grado $k+s-1$ sia in λ (cioè nelle sue componenti) che in λ , mentre è omogeneo di grado $k+s-2$ nelle componenti di ogni altra direzione $\neq \lambda$.

Analogamente scelte ad arbitrio s direzioni, che possiamo assumere sempre per semplicità di scrittura come λ, \dots, λ , considereremo i prodotti

$$(9.3) \quad L_1, L_2, \dots, L_s$$

con i gradi d'omogeneità specificati.

Il determinante Λ è omogeneo di 1° grado in ciascuna delle $k+s$ direzioni; il determinante $M_{1,2,\dots,s}$ è omogeneo di 1° grado in ciascuna delle λ, \dots, λ .

Si consideri ora l'espressione

$$(9.4) \quad \frac{M_{1,2,\dots,s} \Lambda^p}{(L_1, L_2, \dots, L_s)^q}$$

Se si vuole che questa sia invariante per trasformazioni di coordinate x^{ρ} in $x^{\rho'}$, siccome ciascuno dei determinanti per tale trasformazione viene moltiplicato per lo Jacobiano $J \begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix}$ deve essere

$$(9.5) \quad p+1 = s(k+s-1)q.$$

Se si vuole poi ch'essa sia di grado zero nelle componenti delle direzioni diverse da $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ deve essere

$$(9.6) \quad p = s(k + s - 2)q$$

e perciò

$$(9.7) \quad p = k + s - 2, \quad q = 1/s.$$

Il grado d'omogeneità in ciascuna delle direzioni $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ è

$$(9.8) \quad p + 1 - \{k + s - 1 + (s - 1)(k + s - 2)\}q = \frac{s-1}{s}.$$

Se nelle (8.3) poniamo $t = \hbar t'$ le nuove componenti di λ sono $\hbar \lambda^p$ mentre $dt' = \hbar^{-1} dt$. Ciò porta che se si moltiplica la (9.4) per $(dt_1 \dots dt_s)^{s-1/s}$ essa non varia quando si variano i parametri t sugli E_2 sempre raccordandoli ad un medesimo parametro t ; mentre se si fa $t = \hbar t'$ essa viene moltiplicata per \hbar elevata a potenza

$$(9.9) \quad 2k - s - s(k + s - 1)q = k - s;$$

e perciò moltiplicandola per dt^{k-s} si ottiene un'espressione che non varia al variare del parametro.

Si ha quindi:

Fissate ad arbitrio s fra le $k + s$ direzioni date (degli E_1) che distinguiamo con gli indici $1, \dots, s$, sono invarianti infinitesimi le espressioni

$$(9.10) \quad \frac{M_{1,2,\dots,s} \Lambda^{k+s-2}}{(L_1 L_2 \dots L_s)^{1/s}} dt^{k-s} (dt_1 dt_2 \dots dt_s)^{\frac{s-1}{s}}.$$

Si noterà che per $s = 1$ si ha l'invariante infinitesimo indipendente da dt_1

$$(9.11) \quad \frac{M_1 \Lambda^{k-1}}{L_1} dt^{k-1}$$

(e quelli che si ottengono sostituendo a λ un'altra delle $k + 1$ direzioni date).

Ma anche nel caso generale $s > 1$ l'espressione (9.10) privata dell'ultimo fattore è un invariante se invece delle s direzioni sono dati s vettori (di cui le componenti s'indichino ancora con $\lambda^p_1, \dots, \lambda^p_s$), non essendovi più bisogno, per l'invarianza, di imporre le condizioni conseguenti alla (9.8).

Si possono ricavare espressioni che dipendano soltanto dal dt (e non da dt_1, \dots, dt_s) anche senza fissare vettori invece di direzioni; però queste espressioni non sono più invarianti ma *densità* (cioè per un cambiamento di coordinate vengono moltiplicate per una potenza dello Jacobiano della trasformazione).

Infatti se si riprende in esame la (9.4) senza imporre la condizione (9.5) ma imponendo invece oltre alla (9.6) la condizione che la (9.4) sia omogenea di grado zero anche nelle λ per $\rho = 1, \dots, s$ si ha

$$(9.12) \quad p + 1 = \{k + s - 1 + (s - 1)(k + s - 2)\}q$$

e perciò

$$(9.13) \quad p = s(k + s - 2) \quad , \quad q = 1.$$

Un mutamento di t in ht' altera la (9.4) per il fattore h elevato alla potenza

$$(9.14) \quad v = 2k - 1 - s(k + s - 1)$$

e quindi si otterrà un'espressione invariante per questo mutamento moltiplicando la (9.4) per dt elevato alla potenza precedente. Si noterà che per $s = 1$ è $v = k - 1$; per $s = 2$, $v = -3$ (indipendente da k); e per $s \geq 2$ è $v \leq 0$.

Per un cambiamento di coordinate la (9.4), con le determinazioni (9.13), è moltiplicata per la potenza $s - 1$ dello Jacobiano. Si ha perciò un *invariante*, coincidente con (9.11) per $s = 1$; mentre $s \geq 2$ è una *densità* infinitesima

$$\frac{L_1 \cdots L_s}{M_1, \dots, s \Lambda^{s(k+s-2)}} dt^{k(s-2)+s(s-1)+1}.$$

10. SIGNIFICATO METRICO DEGLI INVARIANTI PRECEDENTI. — Come al n. 7 potranno ottenersi significati metrici di questi invarianti deformando la $(k+s)$ -giacitura in un S_{k+s} euclideo e una calotta σ_k^2 contenente gli E_2 in una calotta di S_{k+s} , eventualmente di S_k . Per $k = 2$, $s = 1$, ridotti gli E_2 ad appartenere ad un piano ω in un S_3 euclideo, siano R_1, R_2 i loro raggi di curvatura, t la loro tangente, ds l'elemento d'arco in questa direzione; e d_1, d_2, d_3 le direzioni dei tre E_1 . Si ha l'*invariante finito*

$$\frac{\text{sen}(\omega d_1) \text{sen}(td_2 d_3)}{\text{sen}(\omega d_2) \text{sen}(td_1 d_3)}$$

e l'*invariante infinitesimo*

$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{\text{sen}(\omega d_1) \text{sen}(d_1 d_2 d_3)}{\text{sen}(td_1 d_2) \text{sen}(td_1 d_3)} ds$$

ove per esempio $\text{sen}(d_1 d_2 d_3)$ è il seno dell'angolo triedro di $d_1 d_2 d_3$ secondo Staudt (determinante dei coseni direttori di d_1, d_2, d_3).

11. INVARIANTI DI CONFIGURAZIONI DIPENDENTI DA PIÙ PENNELLI DI E_2 . — Prendiamo ora in esame configurazioni dipendenti da più gruppi di E_2 tangenti.

Esaminiamo per esempio il caso di due gruppi di k E_2 tangenti, a tangenti distinte ma con la stessa k -giacitura principale.

Le grandezze che c'interessano relative ai due gruppi s'indichino con

$$\lambda_a^p, m_{\alpha\beta}^p, t_a \quad a = 1, 2; \alpha, \beta = 1, \dots, k; p = 1, \dots, k.$$

S'indichino poi con $\xi_1^p, \dots, \xi_{k-2}^p$ vettori che insieme con λ_1^p, λ_2^p individuino la k -giacitura principale.

Come nei casi già esaminati si vede che si ha l'*invariante infinitesimo*

$$(11.1) \quad \frac{\text{Det}(m_{12}^p, m_{13}^p, \dots, m_{1k}^p, \lambda_1^p) \text{Det}(m_{22}^p, m_{23}^p, \dots, m_{2k}^p, \lambda_2^p)}{\{\text{Det}(\xi_1^p \dots \xi_{k-2}^p \lambda_1^p \lambda_2^p)\}^2} (dt_1 dt_2)^{2k-3}$$

(s'intende che se $k = 2$ i vettori ξ mancano e si ha un invariante dipendente soltanto dalle due coppie di E_2 con la stessa giacitura).

Più in generale, se le due k -giaciture principali degli E_2 determinano una $(k+s)$ -giacitura ($s \leq k$) e questa s'individua, oltre che con le tangenti agli E_2 con $k+s-2$ vettori $\xi_1^p, \dots, \xi_{k+s-2}^p$ si ha l'invariante infinitesimo

$$(II. 2) \quad \frac{\text{Det} \left(m_{12}^p, \dots, m_{1k}^p, \lambda_1^p, \xi_1^p, \dots, \xi_s^p \right) \text{Det} \left(m_{12}^p, \dots, m_{1k}^p, \lambda_2^p, \xi_1^p, \dots, \xi_s^p \right)}{\left\{ \text{Det} \left(\xi_1^p, \dots, \xi_s^p, \xi_{s+1}^p, \dots, \xi_{k+s-2}^p, \lambda_1^p, \lambda_2^p \right) \right\}^2} (dt \, dt)^{2k-3}.$$

Si osservi anzi che ξ_1, \dots, ξ_s possono essere sostituiti dalle loro direzioni.

Un altro invariante infinitesimo si ottiene sostituendo agli ultimi $s+1$ argomenti in ciascuno dei determinanti a numeratore

$$\lambda_1^p, \lambda_2^p, \xi_1^p, \dots, \xi_{s-1}^p$$

e in questo caso a ξ_1, \dots, ξ_{s-1} possono sostituirsi le loro direzioni.

In modo simile possono formarsi invarianti infinitesimi dipendenti da r gruppi di k E_2 tangenti: a numeratore figurerà il prodotto di r determinanti, a denominatore la potenza r -esima di un determinante (in cui figurano le r tangenti agli E_2 e $k+s-r$ vettori); il prodotto dei differenziali è elevato a potenza $2k-r-1$.

Con due k -ple di E_2 tangenti aventi la stessa k -giacitura principale e con $k-1$ direzioni appartenenti a questa può formarsi un invariante finito

$$(II. 3) \quad \frac{\text{Det} \left(m_{12}^p, \dots, m_{1k}^p, \lambda_1^p \right) \cdot \left\{ \text{Det} \left(\lambda_2, \xi_1, \dots, \xi_{k-1} \right) \right\}^{2k-1}}{\text{Det} \left(m_{12}^p, \dots, m_{1k}^p, \lambda_2^p \right) \cdot \left\{ \text{Det} \left(\lambda_1, \xi_1, \dots, \xi_{k-1} \right) \right\}^{2k-1}};$$

similmente se le due giaciture principali appartengono ad una $(k+s)$ -giacitura (nel qual caso occorrono $k+s-1$ direzioni).

12. SIGNIFICATI METRICI DEGLI INVARIANTI PRECEDENTI. — I significati metrici di questi invarianti si trovano col solito procedimento di deformazione in uno spazio euclideo. Limitiamoci al caso di due coppie di E_2 .

Se si deforma una σ_2^2 (certo esistente) per essi in modo da renderla piana e se R_1, R_2 e \bar{R}_1, \bar{R}_2 sono i raggi di curvatura delle due coppie di E_2 , α l'angolo delle loro tangenti, ds e $d\bar{s}$ i due elementi lineari nelle loro direzioni, si ha come valore metrico di (II. 1)

$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{\bar{R}_1} - \frac{1}{\bar{R}_2} \right) \frac{ds \cdot d\bar{s}}{\sin^2 \alpha}.$$

Se invece si deforma la σ_2^2 in modo da farla appartenere ad un S_3 euclideo, sia α l'angolo delle tangenti alle due coppie di E_2 ; R ed \bar{R} i raggi di curvatura delle sezioni normali per queste due tangenti della calotta deformata; ω_1, ω_2 e $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ gli angoli dei piani osculatori agli E_2 della prima e della seconda coppia col piano tangente alla calotta. Il valore metrico di (II. 1) è

$$(\cot \omega_1 - \cot \omega_2) (\cot \bar{\omega}_1 - \cot \bar{\omega}_2) \frac{ds \cdot d\bar{s}}{\sin^2 \alpha}.$$

Se più in particolare, come pure è possibile, si fanno coincidere un E_2 della prima coppia e uno della seconda con gli E_2 delle linee di curvatura della calotta deformata si ha per l'invariante

$$K \cot \omega_1 \cot \bar{\omega}_1 ds \cdot d\bar{s}$$

ove K è la curvatura gaussiana della superficie.

Per l'invariante (11.3) dipendente da due coppie di E_2 e da una direzione appartenente alla loro giacitura principale, se si deforma una σ_2^2 che li contenga rendendola piana e in modo da rendere di flesso un E_2 di ciascuna coppia, si ritrova l'invariante proiettivo di due E_2 uscenti da un punto e di una retta per esso (2).

Se invece si deforma σ_2^2 in una calotta di S_3 euclideo con i raggi principali di curvatura R_1, R_2 e si conservano ad $\omega_1, \omega_2, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ i significati di prima e s'indicano con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ gli angoli delle tangenti agli E_2 e della ulteriore tangente con una tangente di curvatura, si ha l'invariante topologico finito

$$\frac{\cot \omega_1 - \cot \omega_2}{\cot \bar{\omega}_1 - \cot \bar{\omega}_2} \frac{R_2 \cos^2 \alpha_1 + R_1 \sin^2 \alpha_1}{R_2 \cos^2 \alpha_2 + R_1 \sin^2 \alpha_2} \frac{\sin^3 (\alpha - \alpha_2)}{\sin^3 (\alpha - \alpha_1)}.$$

Cosmogonia. — *L'espansione dell'Universo nella meccanica classica.* Nota (*) del Socio GIUSEPPE ARMELLINI.

1. Questa Nota ha per oggetto di esaminare il problema dell'espansione dell'Universo, dal punto di vista della meccanica classica.

A tale scopo, cominciamo col considerare un ammasso di meteoriti che si attirano tra loro secondo la legge di Newton e supponiamo che:

a) L'ammasso si mantenga sempre sferoidico ed omogeneo, pur essendo la sua densità ρ variabile da istante ad istante; e cioè supponiamo che ρ sia funzione soltanto del tempo t , ma non delle coordinate x, y, z .

b) Due meteoriti qualsiasi A e B, comunque scelti nell'ammasso, si allontanino tra loro con velocità V proporzionale alla loro distanza D ; e cioè si abbia sempre $V = \varepsilon D$, essendo ε (che ovviamente ha dimensioni T^{-1}) funzione del tempo ma non delle coordinate.

2. Ciò posto, prendiamo per origine il centro O dell'ammasso e facciamo partire da O una terna di assi cartesiani x, y, z , di direzione invariabile, nel senso della meccanica classica. Essendo l'ammasso sferoidico ed omogeneo, l'accelerazione di ciascun meteorite sarà sempre diretta verso il centro ed eguale, per noti teoremi, a $4/3 \pi f \rho r$, dove r indica la distanza dal centro ed f il coefficiente attrattivo della

(2) E. BOMPIANI, *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei* (« Rend. Lincei », ser. VI, vol. XXII, 1935).

(*) Presentata nella seduta del 14 gennaio 1950.

legge di Newton. Chiamando quindi con X, Y, Z le componenti dell'accelerazione, avremo:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = -\frac{4}{3} \pi f \rho x \\ Y = -\frac{4}{3} \pi f \rho y \\ Z = -\frac{4}{3} \pi f \rho z. \end{array} \right.$$

D'altra parte, dal lato cinematico, a causa della condizione b), l'ammasso sarà sottomesso ad una dilatazione omogenea, eventualmente accompagnata da un movimento rigido; e cioè da una rotazione intorno ad un asse passante per O e da una traslazione. Ma la rotazione deve certamente essere nulla, poichè dinamicamente ogni meteorite si muove in un piano fisso passante per O , onde - astraendo dalla traslazione d'insieme - il movimento si ridurrà ad una dilatazione omogenea. E cioè, indicando con u, v, w le componenti di velocità, avremo:

$$(2) \quad u = x\varepsilon(t) \quad ; \quad v = y\varepsilon(t) \quad ; \quad w = z\varepsilon(t).$$

In conseguenza, derivando rispetto al tempo, otterremo:

$$(3) \quad X = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon^2 \right) x$$

ed analoghe equazioni si avranno per Y e Z , onde le (1) si ridurranno all'unica equazione:

$$(4) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon^2 + \frac{4}{3} \pi f \rho = 0$$

che lega ε con la densità ρ .

Ma, a causa della dilatazione omogenea, un segmento di lunghezza unitaria dopo un tempuscolo dt diverrà eguale a $1 + \varepsilon dt$. Onde, considerando un cubo di lato unitario e chiamando con $d\rho$ la variazione di densità nel tempuscolo dt , avremo per la conservazione della materia:

$$(5) \quad (\rho + d\rho) (1 + \varepsilon dt)^3 = \rho$$

e cioè, sviluppando e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore:

$$(6) \quad 3\varepsilon = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

la quale fisicamente ci dice che la divergenza del vettore $\rho \hat{V}$ è eguale a $-d\rho/dt$.

Sostituendo questo valore di ε nella (4), otteniamo con brevi riduzioni:

$$(7) \quad \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{4}{3} \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 - 4 \pi f \rho^2 = 0$$

equazione che lega la densità dell'ammasso col tempo e che integrata ci darà ρ in funzione di t .

3. Per integrare la (7), poniamo

$$(8) \quad \rho = \xi \quad ; \quad \frac{d\rho}{dt} = \eta$$

e prendiamo η come funzione incognita e ξ come variabile indipendente. Con facili calcoli, la (7) si ridurrà a

$$(9) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{4}{3\xi} \eta + \frac{4\pi f \xi^2}{\eta}$$

equazione del tipo di Bernouilli, che ponendo

$$(10) \quad \eta^2 = \zeta$$

si trasforma nell'equazione lineare

$$(11) \quad \frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{8}{3\xi} \zeta + 8\pi f \xi^2$$

che integrata ci dà

$$(12) \quad \zeta = 24\pi f \xi^3 + C \xi^{8/3}$$

dove C indica la costante arbitraria.

In conseguenza, riponendo al posto di ζ e di ξ i loro valori, avremo infine

$$(13) \quad \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = \rho^{8/3} (C + 24\pi f \rho^{1/3}).$$

e quindi la (6) ci dà

$$(13^{bis}) \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \rho^{1/3} \sqrt{C + 24\pi f \rho^{1/3}}$$

4. Come ora diremo, è facile integrare la (13) con funzioni elementari; ma intanto essa ci permette di discutere sopra l'evoluzione dell'ammasso considerato. Infatti:

I. Se la costante arbitraria C è *positiva o nulla*, poichè essendo ρ positiva il secondo membro della (13) può annullarsi soltanto per $\rho = 0$, la derivata $d\rho/dt$ conserverà sempre lo stesso segno. In conseguenza:

a) Se $d\rho/dt$ è inizialmente *positiva*, ρ sarà sempre funzione *crescente* del tempo, finchè raggiungerà il valore ∞ in un determinato istante T, come risulta dal fatto che tendendo ρ ad infinito, la derivata $d\rho/dt$ diviene infinita di ordine superiore al primo. In pratica, ciò significa che i meteoriti dell'ammasso in un determinato istante verranno *in collisione tra loro*, intorno al comune baricentro O.

b) Se invece $d\rho/dt$ è inizialmente *negativa*, la densità ρ sarà sempre funzione *decrescente* del tempo. E poichè, per $\rho = 0$ la derivata $d\rho/dt$ ha uno zero di ordine superiore al primo, si trova che ρ tenderà a zero quando t tenderà all'infinito. L'ammasso quindi tende a *diffondersi in tutto lo spazio*.

II. Se la costante arbitraria C è *negativa* e non nulla, la (13) mostra che la densità ρ dell'ammasso si conserverà sempre maggiore, od al più eguale, al valore $(C/24\pi f)^3$. In conseguenza:

a) Se $d\rho/dt$ è inizialmente *positiva*, essa conserverà sempre il medesimo segno e quindi avverrà la collisione tra i meteoriti, come nel caso I.

b) Se invece $d\rho/dt$ è inizialmente *negativa*, l'ammasso si dilaterà fino a raggiungere la densità $(C/24\pi f)^3$, dopo di che $d\rho/dt$ diverrà positiva ed avremo contrazione fino alla collisione.

5. Applichiamo ora questi risultati all'Universo Sidereo.

Come sappiamo dall'astronomia, l'Universo è stato fin da oggi scandagliato fino ad una distanza di circa duecentocinquantomilioni di anni di luce da noi, e si è trovato (sebbene il fatto meriti conferma) che esso sarebbe *omogeneo*; e cioè l'Universo risulterebbe composto di Galassie, grossolanamente simili tra loro ed equamente ripartite nello spazio. E precisamente, poichè - secondo gli ultimi risultati - ogni Galassia avrebbe in media una popolazione di circa dieci miliardi di stelle e poichè la distanza reciproca tra le Galassie sarebbe di circa tre milioni di anni di luce, la densità *attuale* ρ_0 dell'Universo sarebbe di circa 10^{-30} prendendo come unità quella dell'acqua.

Inoltre l'astronomia mostra che negli spettri delle Galassie, le righe spettrali appaiono spostate *verso il rosso*, proporzionalmente all'incirca alla distanza delle Galassie considerate da noi. Se interpretiamo tale spostamento secondo il principio di Doppler (interpretazione che però comporta gravi difficoltà su cui ora non insistiamo) ne seguirebbe che ogni Galassia si allontana da noi con velocità proporzionale alla distanza. E quindi (poichè non può supporre una posizione privilegiata dell'osservatore terrestre) ne seguirebbe che due Galassie qualsiasi si allontanano tra loro con velocità proporzionale alla loro reciproca distanza: appunto come avveniva per i meteoriti poco anzi considerati.

Secondo le osservazioni spettroscopiche la velocità di allontanamento sarebbe poi di circa seicento chilometri al secondo per ogni megaparsec (milione di parsec) di distanza. In conseguenza, poichè il parsec è eguale a $3,08 \cdot 10^{13}$ chilometri e poichè ε ha le dimensioni $[T^{-1}]$, si vede subito che *prendendo per unità di tempo il minuto secondo*, il valore *attuale* di ε per l'Universo è dato da

$$(14) \quad \varepsilon_0 = 1,95 \cdot 10^{-17}.$$

6. Ciò posto, per metterci nel caso della meccanica classica, supponiamo che l'Universo od insieme delle Galassie, sia *finito* e che possa essere paragonato allo sciame sferoidico dei meteoriti poco anzi considerato, in cui ovviamente *ogni meteorite sia sostituito da una Galassia*. La densità ρ dell'Universo sarà allora legata al tempo dalla (13), onde per esaminare la futura evoluzione dell'Universo dovremo anzi tutto determinare la costante arbitraria C .

Ora la (13) ci dà, indicando con l'indice zero i valori attuali di ρ e della derivata $d\rho/dt$:

$$(15) \quad C = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right)_0^2 \rho_0^{-2/3} - 24 \pi f \rho_0^{1/3}$$

od anche per la (6):

$$(16) \quad C = 9 \varepsilon_0^2 \rho_0^{-2/3} - 24 \pi f \rho_0^{1/3}.$$

Ma, prendendo le unità del sistema C. G. S., si ha $f = 6,66 \cdot 10^{-8}$, mentre abbiamo visto essere $\rho_0 = 10^{-30}$ ed $\varepsilon_0 = 1,95 \cdot 10^{-17}$, onde troviamo per la costante arbitraria (che ovviamente ha le dimensioni $L^2 M^{-2/3} T^{-2}$) il valore

$$(17) \quad C = 3,37 \cdot 10^{-13}$$

sempre nel sistema centimetro-grammo-secondo.

Come si vede, il valore di C è *positivo*; possiamo dunque ritenere che, nelle ipotesi in cui ci siamo messi, l'*Universo Sidereo continuerà sempre a dilatarsi*, tendendo la sua densità a zero quando il tempo cresce all'infinito.

7. Trovato il valore di C , possiamo calcolare la densità ρ dell'Universo, od insieme finito delle Galassie, in un tempo qualsiasi integrando la (13). A tal fine poniamo:

$$(18) \quad \rho = \lambda^{-3}$$

donde

$$(19) \quad \frac{d\rho}{dt} = -3 \lambda^{-4} \frac{d\lambda}{dt}$$

onde la (13) diviene con brevi riduzioni

$$(20) \quad dt = \frac{3 \lambda d\lambda}{\sqrt{C\lambda^2 + 24 \pi f \lambda}}$$

che si sa integrare con procedimenti elementari.

Eseguendo l'integrazione, prendendo come istante iniziale *l'epoca attuale* e chiamando con λ_0 il valore attuale di λ che risulta evidentemente eguale a 10^{10} , si ha facilmente:

$$(21) \quad t = \frac{3}{C} \{ \sqrt{C\lambda^2 + 24 \pi f \lambda} - \sqrt{C\lambda_0^2 + 24 \pi f \lambda_0} \} - \\ - \frac{36 \pi f}{\sqrt{C^3}} \log \frac{12 \pi f + C\lambda + \sqrt{C^2 \lambda^2 + 24 \pi f C\lambda}}{12 \pi f + C\lambda_0 + \sqrt{C^2 \lambda_0^2 + 24 \pi f C\lambda_0}}$$

dove ovviamente i logaritmi sono a base naturale.

Per l'astronomo però riesce più comodo valutare i tempi in milioni di anni; anzichè in minuti secondi, ciò che è facile a farsi ricordando che un milione di anni equivale a $3,156 \cdot 10^{13}$ secondi; come pure riesce comodo adoperare logaritmi decimali che si ottengono dai naturali moltiplicando per il modulo. Dopo eseguite tutte le riduzioni, ho trovato che la (21) diviene

$$(22) \quad T = -1620 + \sqrt{2,7 \cdot 10^{-14} \rho^{-2/3} + 4,0 \cdot 10^{-7} \rho^{-1/3}} - \\ - 2,8 \log [3700 + 5 \cdot 10^{-4} \cdot \rho^{-1/3} + 1,5 \sqrt{11 \cdot 10^{-8} \rho^{-2/3} + 1,6 \rho^{-1/3}}]$$

dove T è misurato in *milioni di anni* a partire dall'epoca attuale, i logaritmi sono a base *decimale* e la densità ρ viene valutata prendendo come unità quella dell'acqua.

8. Avendo così determinato ρ in funzione del tempo, la (6) ci dà ϵ e quindi dalle (2) abbiamo come equazioni della traiettoria di ogni Galassia:

$$(23) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \epsilon dt.$$

Da queste, essendo per la (6)

$$(24) \quad \epsilon dt = -\frac{1}{3} \frac{d\rho}{\rho}$$

otteniamo immediatamente eseguendo le integrazioni

$$(27) \quad x = C_1 \rho^{-1/3} \quad ; \quad y = C_2 \rho^{-1/3} \quad ; \quad z = C_3 \rho^{-1/3}$$

che rappresentano, come è evidente, una retta passante per l'origine essendo C_1, C_2, C_3 costanti arbitrarie. Il problema resta così completamente risoluto.

Dobbiamo però qui fare un'avvertenza.

Differenziando le (27) e ricordando la (6) si trova subito, in accordo con le (2), che in ogni istante la velocità di una Galassia nella sua traiettoria è data da $\varepsilon \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, onde la velocità relativa di due Galassie risulta eguale alla loro distanza moltiplicata per ε . Però evidentemente, quando osserviamo una Galassia, distante per esempio τ milioni di anni di luce, il valore di ε da adottarsi è quello che si riferisce all'epoca $-\tau$ e che, per la (13^{bis}), risulta, *maggiore* del valore attuale ε_0 essendo ρ ($-\tau$) maggiore di ρ_0 . Ne segue che la velocità di recessione *apparente* delle Galassie lontane — quale risulta dalle osservazioni spettrografiche — dovrà crescere un poco *più rapidamente* della loro distanza e sarebbe facile ottenerne il valore dalle formole ora date. Digraziatamente le osservazioni — pur mostrando come la velocità di recessione non risulti esattamente proporzionale alla distanza — sono ancora così poco sicure, che ogni confronto tra teoria ed osservazione riuscirebbe oggi prematuro.

9. Ponendo nella (22) $\rho = 10^{-30}$ si ottiene $T = 0$ e cioè l'epoca attuale, come è evidente. Ponendovi invece, per esempio, $\rho = 10^{-33}$ si ha $T = 15000$; ciò che mostra che tra quindicimila milioni di anni la densità dell'Universo sarà ridotta alla millesima parte di quella attuale ed il coefficiente ε a circa un decimo e così di seguito; per $\rho = 0$ si ottiene $T = \infty$ come già abbiamo visto.

Per il passato invece, poichè la densità media delle Galassie sembra dell'ordine di 10^{-24} , si può supporre che tale fosse la densità dell'Universo quando le Galassie, dapprima riunite tra loro, hanno cominciato a distaccarsi; evidentemente (Lemaître) per un'esplosione d'inaudita violenza, alla quale forse — per l'altissima temperatura prodotta — potrebbe collegarsi la *formazione degli elementi chimici* a partire dall'idrogeno primitivo. Ma qui sorge una grave difficoltà.

Infatti, ponendo nella (22) $\rho = 10^{-24}$ si ottiene subito $T = -1600$; ciò che indicherebbe che l'espansione dell'Universo ebbe principio circa un miliardo e seicento milioni di anni or sono. Ed un'epoca poco diversa si otterrebbe supponendo che la densità iniziale fosse stata ancora maggiore; per esempio per $\rho = \infty$ la (22) dà $T = -1630$.

È noto che, anche con la Teoria di Relatività si ottiene un valore poco diverso per l'epoca in cui s'iniziò la supposta espansione dell'Universo. Ma è anche evidente che l'ipotesi di una colossale esplosione, avvenuta milleseicento milioni di anni fa, è in netta contraddizione con le ricerche geologiche, le quali invece ci mostrano che la solidificazione della crosta terrestre è assai più antica, giacchè rimonta a due e, forse anche⁽¹⁾, a *più di tre miliardi* di anni fa. Ed è inutile aggiungere che questa discordanza — che viene confermata dalla meccanica classica — costituisce una delle più gravi difficoltà contro l'ipotesi dell'espansione dell'Universo.

(1) Cfr. C. MORELLI, *L'età della Terra*. «Annali di Geofisica», vol. II, n. 3, luglio 1949.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Gli integrali doppi del calcolo delle variazioni, in forma ordinaria* (*). Nota di GUIDO STAMPACCHIA, presentata(**) dal Corrisp. R. CACCIOPOLI.

La questione dell'esistenza del minimo di integrali doppi si presenta in vista di applicazioni ai più svariati problemi. Ho cercato di stabilire fino a quale punto si può dare un'impostazione generale per una vasta classe di problemi variazionali; per essi mostro che l'esistenza del minimo è assicurata appena si siano verificate delle condizioni generali e dei criteri di compattezza.

I teoremi sono ottenuti seguendo il metodo diretto di Tonelli. I funzionali considerati si presentano sotto forma di integrali rimanendo indeterminata la natura degli elementi differenziali che vi compaiono. Per quanto riguarda la semicontinuità degli integrali mi servo dei risultati contenuti in una precedente Nota (1).

1. Sia T un campo aperto e limitato e Σ uno spazio metrico e completo di funzioni $u(x, y)$ definite in T ; indicheremo con (u_1, u_2) la distanza di due punti generici $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$ di Σ .

Indichiamo poi con S l'insieme dei rettangoli R a lati paralleli agli assi e contenuti in T e supponiamo fissata una legge \mathcal{L} che, ad ogni funzione $u(x, y)$ di Σ e ad ogni rettangolo R di S , faccia corrispondere n numeri (reali) che indicheremo con $F_i[u, R]$ ($i = 1, 2, \dots, n$). $F_i[u, R]$ risulta allora, per ogni rettangolo di S fissato, un funzionale di $u(x, y)$ in Σ e, per ogni funzione $u(x, y)$ di Σ , una funzione di rettangolo, definita per i rettangoli R di S .

Supponiamo poi che, per ogni rettangolo R fissato in S , i funzionali $F_i[u, R]$ risultino continui in Σ secondo la metrica adottata. Indichiamo con \mathcal{G} la classe delle funzioni $u(x, y)$ di Σ tali che le corrispondenti funzioni di rettangolo $F_i[u, R]$ risultino additive ed assolutamente continue (2). Si deduce che, per ogni funzione $u(x, y)$ della classe \mathcal{G} , esistono (3), quasi dappertutto in T , n funzioni di punto $\mathfrak{D}_i u(x, y)$, derivate regolari delle funzioni $F_i[u, R]$, le quali risultano integrabili in T e che, detto R un qualsiasi rettangolo di S , si ha:

$$\iint_R \mathfrak{D}_i u(x, y) dx dy = F_i[u, R].$$

(*) Il contenuto di questa Nota è stato oggetto di una comunicazione tenuta al III Congresso dell'U. M. I. nel settembre 1948.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) *Sulla semicontinuità degli integrali doppi, in forma ordinaria, nel calcolo delle variazioni.* «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», ser. VIII, vol. III, pp. 247-253 (1947).

(2) Nel senso della teoria delle funzioni di insiemi; intenderemo precisamente che: fissato un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un numero $\delta > 0$ tale che se R_1, R_2, \dots, R_N sono rettangoli di S in numero finito, non sovrappontensi, per cui $\sum_{s=1}^N \text{mis } R_s < \delta$ si abbia $\sum_{s=1}^N |F_i[u, R_s]| < \varepsilon$.

(3) Ciò discende da un noto teorema di Lebesgue.

Abbiamo così definita la classe \mathfrak{G} delle funzioni dello spazio Σ per cui le operazioni \mathfrak{D}_i si possono riguardare come derivate regolari di funzioni di rettangolo additive ed assolutamente continue.

Sia poi $\varphi_\alpha(w_1, w_2, \dots, w_n)$ una funzione definita per ogni n -pla (w_1, w_2, \dots, w_n) e per ogni $\alpha > 0$, continua rispetto a (w_1, w_2, \dots, w_n) e sempre positiva. Supponiamo che, variando $u(x, y)$ in una classe di \mathfrak{G} per cui la quantità:

$$N_\alpha[u] = \iint_T \varphi_\alpha(\mathfrak{D}_1 u(x, y), \mathfrak{D}_2 u(x, y), \dots, \mathfrak{D}_n u(x, y)) dx dy$$

è limitata, si deduca che gli insiemi numerici $\iint_T |\mathfrak{D}_i u(x, y)|^{1+\alpha} dx dy$ ($i=1, 2, \dots, n$) siano limitati. In tal caso la quantità $N_\alpha[u]$ la diremo *scarto*.

2. In particolare: a) Supponiamo che la legge \mathfrak{L} faccia corrispondere ad ogni funzione dello spazio Σ delle funzioni continue in $T + FT$ con metrica lagrangiana del primo ordine, e ad ogni rettangolo $R: \{a \leq x \leq a+h, b \leq y \leq b+k\}$ di S , la quantità:

$$(1) \quad F[u, R] = u(a+h, b+k) - u(a+h, b) - u(a, b+k) + u(a, b)$$

che costituisce una funzione additiva di rettangolo. La classe \mathfrak{G} coincide allora con la classe delle funzioni di Σ assolutamente continue secondo Vitali e l'operazione $\partial^2/\partial x \partial y$ viene riguardata come la derivata regolare della funzione additiva (1). Per ogni R fissato di S , il funzionale $F[u, R]$ risulta continuo secondo la metrica adottata (4).

b) Indichiamo con Σ lo spazio delle funzioni continue in T e poniamo come distanza (u_1, u_2) dei due punti $u_1(x, y)$ ed $u_2(x, y)$ di Σ :

$$(u_1, u_2) = \max_T |u_1 - u_2|.$$

Supponiamo allora che la legge \mathfrak{L} faccia corrispondere, ad ogni funzione dello spazio metrico Σ ora considerato, le funzioni di rettangolo $R: \{a \leq x \leq a+h, b \leq y \leq b+k\}$ di S , additive:

$$F_1[u, R] = \int_b^{b+k} [u(a+h, y) - u(a, y)] dy, \quad F_2[u, R] = \int_a^{a+h} [u(x, b+k) - u(x, b)] dx.$$

La classe \mathfrak{G} coincide con la classe delle funzioni assolutamente continue in T secondo Tonelli (5). I funzionali $F[u, R]$ risultano poi continui secondo la metrica adottata; basta osservare che la convergenza secondo detta metrica comporta la

(4) Cfr. *Un teorema di calcolo delle Variazioni ed applicazioni, ecc.* «Gior. di Matematiche di Battaglini», ser. IV, vol. 78, pp. 81-96 (1948-49).

(5) L. TONELLI, *L'estremo assoluto degli integrali doppi.* «Ann. Sc. Normale Sup. di Pisa», ser. II, vol. II, pp. 89-130 (1933). La detta coincidenza della classe \mathfrak{G} con la classe delle funzioni assolutamente continue nel senso di Tonelli è praticamente nota. Essa è contenuta anche nell'op. cit. nella dimostrazione del teorema del § 5. Cfr. anche S. SAKS, *Theorie de l'integrale.* «Monografie

convergenza uniforme in T . Si potrà assumere come scarto $N_\alpha[u]$ la quantità:

$$\iint_T \{ |p|^{1+\alpha} + |q|^{1+\alpha} \} dx dy.$$

c) Se Σ è lo spazio metrico delle funzioni continue con le derivate parziali prime in T , dove come distanza di due punti $u_1(x, y)$ ed $u_2(x, y)$ di Σ si pone:

$$(u_1, u_2) = \max_T |u_1 - u_2| + \max_T |p_1 - p_2| + \max_T |q_1 - q_2|$$

e supponiamo che la legge \mathcal{L} faccia corrispondere ad ogni funzione di Σ le funzioni additive di rettangolo:

$$F_1[u, R] = \int_b^{b+h} [u_x(a+h, y) - u_x(a, y)] dy, \quad F_2[u, R] = \int_a^{a+h} [u_y(x, b+k) - u_y(x, b)] dx;$$

la classe \mathfrak{G} coincide con la classe che ho indicato altrove con W . Come scarto si potrà assumere la quantità: $\iint_T |\Delta_2 u|^{1+\alpha} dx dy$ ⁽⁶⁾.

3. Dimostriamo, intanto, il seguente teorema:

Sia \mathfrak{I} un insieme di funzioni $u(x, y)$ della classe \mathfrak{G} ed esistano due numeri positivi α ed H tali che, per ogni funzione di \mathfrak{I} , si abbia:

$$N_\alpha[u] \leq H.$$

Allora ogni funzione di accumulazione di \mathfrak{I} (secondo la metrica di Σ) appartiene alla classe \mathfrak{G} .

Sia invero $u(x, y)$ una funzione di accumulazione di \mathfrak{I} , la quale, essendo lo spazio Σ completo, appartiene a Σ . Fissato un numero positivo ϵ , sia R_1, R_2, \dots, R_N

Mat., II, Varsavia 1923. Del resto, ecco in breve la dimostrazione: Se $u(x, y)$ è una funzione di Σ assolutamente continua nel senso di Tonelli potremo scrivere:

$$F_1[u, R] = \int_b^{b+h} \int_a^{a+h} p(x, y) dx dy$$

e quindi $F_1[u, R]$ risulta una funzione di rettangolo assolutamente continua e si ha quasi dappertutto in T : $\partial u(x, y) = p(x, y) = \partial u / \partial x$. Inversamente, se $F[u, R]$ è una funzione di rettangolo assolutamente continua, esiste quasi dappertutto una funzione integrabile in T : $\varphi(x, y)$, derivata regolare di $F_1[u, R]$ per cui:

$$\int_a^{a+h} \int_b^{b+h} \varphi(x, y) dx dy = \int_b^{b+h} [u(a+h, y) - u(a, y)] dy$$

e quindi quasi dappertutto rispetto ad y :

$$u(a+h, y) - u(a, y) = \int_a^{a+h} \varphi(x, y) dx$$

e data l'arbitrarietà di h se ne deduce che, per quasi tutti i valori di y , $u(x, y)$ è una funzione assolutamente continua di x e si ha quasi dappertutto in T : $\partial u / \partial x = \varphi(x, y)$. Ripetendo lo stesso ragionamento per $F_2[u, R]$, si deduce quanto volevamo.

(6) Cfr. *Alcuni teoremi sull'estremo assoluto degli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni, ecc.* «Gior. di Matem. di Battaglini», ser. IV, vol. 77, pp. 36-53.

un numero finito qualsiasi di rettangoli di S , non sovrappontendosi; in relazione al numero ε fissato, determiniamo $\delta > 0$ in modo che per $(u, u_0) < \delta$ si abbia:

$$|F_i[u, R_s] - F_i[u_0, R_s]| < \frac{\varepsilon}{N} \quad (s = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, \dots, n).$$

Sia allora $u(x, y)$ una funzione di \mathcal{J} che disti per meno di δ da $u_0(x, y)$; poichè:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N |F_i[u_0, R_s]| &\leq \sum_{s=1}^N |F_i[u_0, R_s] - F_i[u, R_s]| + \\ &+ \sum_{s=1}^N |F_i[u, R_s]| < \varepsilon + \sum_{s=1}^N \iint_{R_s} |\mathfrak{D}_i u(x, y)| dx dy \\ &\leq \varepsilon + K^{\frac{1}{1+\alpha}} [\text{mis } \Sigma R_s]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \end{aligned}$$

con K numero opportuno determinato in base alle proprietà dello scarto, se $\text{mis } \sum_{s=1}^N R_s$ è sufficientemente piccolo, si ha: $\sum_{s=1}^N |F_i[u_0, R_s]| < 2\varepsilon$.

4. Da questo momento in poi supponiamo che le funzioni $u(x, y)$ di Σ siano continue in T e che la convergenza secondo la metrica di Σ comporti la convergenza uniforme in T (7).

Sia ora $f(x, y, u, w_1, w_2, \dots, w_n)$ una funzione finita e continua con le derivate f_{w_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) nello strato A :

$$A: \quad (x, y) \in T \quad |u| < +\infty \quad |w_i| < +\infty \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Se $u(x, y)$ è una funzione dello spazio metrico Σ , appartenente alla classe \mathcal{G} , e $\mathfrak{D}_i u(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sono le derivate regolari delle funzioni $F_i[u, R]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (cfr. § 1), la funzione:

$$(2) \quad f(x, y, u(x, y), \mathfrak{D}_1 u(x, y), \mathfrak{D}_2 u(x, y), \dots, \mathfrak{D}_n u(x, y))$$

risulta quasi continua in T ; diciamo \mathcal{G}^* la classe delle funzioni di \mathcal{G} per cui risulta integrabile la funzione (2); poniamo:

$$I[u] = \iint_T f(x, y, u(x, y), \mathfrak{D}_1 u(x, y), \dots, \mathfrak{D}_n u(x, y)) dx dy.$$

Diremo allora che $I[u]$ è semicontinuo inferiormente se per ogni funzione $u_0(x, y)$ di \mathcal{G}^* , in corrispondenza ad ogni numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un numero $\delta > 0$ tale che per tutte le funzioni $u(x, y)$ di \mathcal{G}^* per cui $(u_0, u) < \delta$ si abbia:

$$I[u] > I[u_0] - \varepsilon.$$

(7) Imponiamo questa restrizione, del resto sovrabbondante, alla metrica di Σ per assicurare le condizioni imposte nella Nota citata in (1) (cfr. cond. 5).

Introdotta poi la funzione \mathfrak{G} di Weierstrass:

$$\mathfrak{G}(x, y, u, w_1, \dots, w_n, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n) = f(x, y, u, w_1, w_2, \dots, w_n) - f(x, y, u, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n) - \sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w}_i) f_{w_i}(x, y, u, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n)$$

diremo che l'integrale $I[u]$ è *quasi regolare positivo* se è:

$$\mathfrak{G}(x, y, w_1, \dots, w_n, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n) \geq 0$$

$$\text{per } (x, y) \in T \quad |u| < +\infty \quad |w_i| < +\infty \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Sussistono i seguenti teoremi di semicontinuità:

I. *Supposto che esistano due numeri N e $K > 0$ tali che in A sia:*

$$f(x, y, u, w_1, \dots, w_n) \geq N$$

se $I[u]$ è un integrale quasi regolare positivo, esso è semicontinuo inferiormente in ogni insieme \mathfrak{J} della classe \mathfrak{G}^ per cui:*

$$N_\alpha[u] \leq K.$$

II. *Supposte verificate le ipotesi del teorema precedente, se $u_0(x, y)$ è una funzione della classe \mathfrak{G} tale che la funzione:*

$$f(x, y, u_0(x, y), \mathfrak{D}_1 u_0(x, y), \dots, \mathfrak{D}_n u_0(x, y))$$

non sia integrabile in T , allora, fissati due numeri positivi H e K , è possibile determinare un numero ρ tale che per tutte le funzioni che soddisfano alle limitazioni:

$$(u, u_0) < \rho, \quad N_\alpha[u] \leq K$$

si abbia:

$$I[u] \geq H.$$

Infatti, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, consideriamo l'integrale:

$$\iint_T \left\{ f(x, y, u, \mathfrak{D}_1 u, \dots, \mathfrak{D}_n u) + \varepsilon [(\mathfrak{D}_1 u)^2 + (\mathfrak{D}_2 u)^2 + \dots + (\mathfrak{D}_n u)^2]^{\frac{1+\alpha}{2}} \right\} dx dy$$

il quale risulta quasi regolare positivo normale con $f + \varepsilon \{ \sum w_i^2 \}^{\frac{1+\alpha}{2}} \geq H$. Esso è pertanto ⁽⁸⁾ semicontinuo inferiormente: cioè, fissata una funzione $u_0(x, y)$ di \mathfrak{J} , si può determinare un $\rho < 0$ in modo che, per ogni funzione di \mathfrak{J} per cui $(u, u_0) < \rho$, si abbia:

$$\begin{aligned} & \iint_T \left\{ f(x, y, u, \mathfrak{D}_1 u, \dots, \mathfrak{D}_n u) + \varepsilon [(\mathfrak{D}_1 u)^2 + \dots + (\mathfrak{D}_n u)^2]^{\frac{1+\alpha}{2}} \right\} dx dy - \\ & - \iint_T \left\{ f(x, y, u_0, \mathfrak{D}_1 u_0, \dots, \mathfrak{D}_n u_0) + \varepsilon [(\mathfrak{D}_1 u_0)^2 + \dots + (\mathfrak{D}_n u_0)^2]^{\frac{1+\alpha}{2}} \right\} dx dy \end{aligned}$$

(8) Cfr. loc. cit. in (1).

e perciò:

$$I[u] - I[u_0] > -\varepsilon - \varepsilon \int_T [(\mathfrak{D}_1 u)^2 + \dots + (\mathfrak{D}_n u)^2]^{\frac{1+\alpha}{2}} dx dy.$$

Di qui segue l'assunto potendosi il funzionale: $\int_T [(\mathfrak{D}_1 u)^2 + \dots + (\mathfrak{D}_n u)^2]^{\frac{1+\alpha}{2}} dx dy$

maggiorare in funzione di K .

Analogamente per il teorema II.

5. Dimostriamo allora il seguente teorema d'esistenza:

Sia $I[u]$ un integrale quasi regolare positivo ed esistano tre numeri $\alpha > 0$, $\mu > 0$ ed N tali che per ogni punto di A risulti:

$$(3) \quad f(x, y, w_1, \dots, w_n) > \mu \varphi_\alpha(w_1, w_2, \dots, w_n) + N.$$

Allora se \mathfrak{J} è un insieme di funzioni, della classe \mathfrak{G}^* , chiuso su \mathfrak{G}^* ⁽⁹⁾, esiste il minimo assoluto di $I[u]$ in \mathfrak{J} se è verificata la seguente condizione:

α) risulta compatta ogni successione $\{u_n(x, y)\}$ di funzioni di \mathfrak{J} per cui è limitato lo scarto: $N_\alpha[u]$.

Infatti sia i l'estremo inferiore di $I[u]$ in \mathfrak{J} ; esso risulta finito a causa della (3). Sia $\{u_n(x, y)\}$ una successione minimizzante di funzioni di \mathfrak{J} ; cioè:

$$I[u_n] < i + \frac{1}{n}.$$

Dalla (3) risulta:

$$N_\alpha[u] \leq \frac{i + 1 + |N| \text{ mis } T}{\mu}$$

e quindi per la condizione α) la successione minimizzante è compatta; sia $u_0(x, y)$ una funzione di accumulazione. Per il teorema del § 3, $u_0(x, y)$ appartiene alla classe \mathfrak{G}^* e, per il teorema II del § 4, appartiene anche alla classe \mathfrak{G}^* ; allora, essendo \mathfrak{J} chiuso su \mathfrak{G}^* , essa appartiene ad \mathfrak{J} e quindi:

$$I[u_0] \cong i.$$

Ma per la semicontinuità inferiore dell'integrale $I[u]$, provata col teorema I del § 3, è: $I[u_0] = i$.

Osserviamo che per la dimostrazione basta supporre, invece della condizione α), l'altra:

$\alpha')$ risulta compatta almeno una successione minimizzante per l'integrale $I[u]$ in \mathfrak{J} , per la quale è limitato lo scarto $N_\alpha[u]$.

(9) Non abbiamo usata la nomenclatura di Tonelli di «classe completa rispetto ad $I[u]$ » per non far nascere confusioni con l'altro significato attribuito alla parola «completo» in Analisi Funzionale.

Analisi Matematica. — *Sull'operazione di derivazione.* Nota di SILVIO MINETTI, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

PREMESSA. — Le operazioni fondamentali dell'Analisi infinitesimale sono la derivazione e l'integrazione. Quest'ultima ha subito, rispetto alla definizione originale di Mengoli-Cauchy, radicali rinnovamenti specie per iniziativa del Lebesgue e, poi, per opera di molti altri, rinnovamenti che ne hanno largamente esteso il campo di applicazione (cioè delle funzioni alle quali i nuovi processi di integrazione sono applicabili). Per la derivazione, invece, le ricerche fondamentali del Dini hanno suggerito di modificarne in vario modo la definizione, rendendola applicabile a classi più ampie di funzioni ⁽¹⁾. Però, in queste estensioni è rimasta inalterata la *struttura*, per dir così, della derivata, perchè sta sempre a base di essa la nozione di rapporto incrementale come in quella classica.

In questa Nota presento una nuova definizione di derivata che modifica, invece, proprio la *struttura* della basilare nozione in questione. L'idea che mi ha servito di guida è la seguente: la definizione classica presenta una marcata eterogeneità nella sua stessa struttura se, riferendosi, ad esempio, all'intervallo $0 \leq x$, ($x > 0$), si riguarda la x come *oscillazione* della variabile in detto intervallo.

È allora naturale pensare di porre al numeratore del rapporto incrementale che servirà a definire la derivata, non già l'incremento della funzione in detto intervallo ma l'*oscillazione* della funzione in esso, sostituendo così al rapporto incrementale un rapporto oscillazionale, il cui limite, qualora esista, al tendere a zero dell'ampiezza dell'intervallo si dirà derivata oscillatoria destra; in modo analogo per $x < 0$ si otterrebbe la derivata oscillatoria sinistra. Le derivate oscillatorie non possono esser negative; son positive o nulle. Una terza derivata oscillatoria si otterrebbe come limite per $x \rightarrow 0$, $x' \rightarrow 0$ del rapporto fra l'oscillazione della funzione e l'oscillazione della variabile indipendente nell'intervallo $x \mid x'$ ⁽²⁾. Ma osservo altresì che maggior generalità si consegnerà, considerando al denominatore del rapporto oscillatorio, non già la oscillazione della (chiamiamola così) funzione (lineare) « standard » $y = x$, ma, bensì, l'oscillazione di una generica $g(x)$. Il problema andrà poi affrontato (così sto già facendo) pel caso relativo a funzioni di due variabili, e nel caso del campo complesso.

I nuovi concetti che qui presento daranno luogo, senza dubbio, io penso, ad ulteriori sviluppi ed applicazioni. In questa Nota, che ha soltanto lo scopo di prender data su di un'idea che ho perseguito da anni, dò soltanto gli enunciati di due teoremi nel nuovo indirizzo; ma perchè il lettore possa meglio apprezzare l'utilità di esso, mostro, altresì, che la nota funzione di Hankel, continua in $x = 0$ ma ivi non derivabile in senso ordinario, possiede, invece, ivi, derivata oscillatoria destra (e sinistra) eguale a due. In altri lavori dimostrerò i due teoremi

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) Vedi, in particolare, la recente Nota di CHOW-SHU-ER che figura nel « Bull. Amer. math. Soc. », 54, pp. 793, 802 (1948).

(2) Qui, x ed x' potendo aver segni qualunque.

fondamentali cui dianzi accennavo e mi occuperò di varie altre questioni; in particolare del raffronto fra la derivata ordinaria, le varie derivate oscillatorie e, forse soprattutto, della conseguente operazione di integrazione nonchè del modo come quelle agiscano su di una funzione ottenuta da due o più (eventualmente infinite) altre, mediante date operazioni. La ricerca è in fase di sviluppo.

2. DEFINIZIONE. — « Sia $y = f(x)$ una funzione reale della variabile reale x definita su di un insieme I_x di punti $x > 0$ ammettente $x = 0 +$ per proprio punto di accumulazione (appartenente o no ad I_x). Dicesi allora derivata oscillatoria della $f(x)$ in $x = 0 +$ il $\lim_{x \rightarrow 0+ \text{ su } I_x} \frac{\Omega_{0,x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+ \text{ su } I_x} \frac{I_{0,x} - l_{0,x}}{x}$ con $L_{0,x}$ = estremo superiore della $f(x)$ su I_x ed $l_{0,x}$ = ivi suo estremo inferiore, tal limite potendo esser finito od infinito ».

Osservazioni. — Il caso maggiormente interessante e maneggevole è quello in cui detto limite esista « finito » e che (pur la cosa non essendo imperativa perchè la precedente Definizione abbia senso) la $f(x)$ sia altresì definita in $x = 0$ (così che essa è in $x = 0 +$ necessariamente continua⁽³⁾). A tal ultimo caso, d'altronde, ci si può sempre ridurre almeno con una lecita convenzione (ed è chiaro)⁽⁴⁾.

Si può dare inoltre, della derivata oscillatoria, la seguente interpretazione geometrica:

La derivata ordinaria misura l'entità dell'inclinazione (rispetto all'asse delle x) con cui la curva rappresentatrice della $y = f(x)$, (supposta esistente) sbocca dal punto (in corrispondenza alla qual ascissa si deriva). Quella oscillatoria, misura, invece, l'entità della vibrazione del tremulamento, con cui detta stessa curva esce o sbocca, che dir si voglia, da detto stesso punto. Se la derivata oscillatoria ha basso valore la curva esce dal punto fremendo lievemente; se ha valore grande esce dal punto vibrando fortemente. Caso ovviamente degenerare è quello in cui $f(x)$ sia, in un intorno destro di $x = 0$, monotona; le derivate coincidono e non vi è tremulamento di sbocco.

3. Ecco ora gli enunciati dei preannunciati teoremi:

TEOREMA I. — Se $y = f(x)$ è definita su di un I_x costituito da punti $x > 0$ ammettente $x = 0$ per proprio punto di accumulazione; se è definita anche in $x = 0$, allora, se esiste la derivata oscillatoria della $f(x)$ in $x = 0 +$ e se è nulla, esiste anche, per x variante su I_x , la derivata ordinaria della $f(x)$, in $x = 0 +$ ed essa è altresì necessariamente nulla.

Osservazione. — Il teorema non può, invece, affatto enunciarsi per vero se, invece, la presupposta esistente derivata oscillatoria della $f(x)$ in $x = 0 +$, abbia valore $\neq 0$.

(3) Già, perchè l'oscillazione nel punto $x = 0 +$, se la derivata oscillatoria esiste finita, è necessariamente nulla; $f(x)$ è, quindi, convergente per $x \rightarrow 0 +$.

(4) Basta considerare invero, accanto alla data $f(x)$ una $\varphi(x) \equiv f(x)$ per ogni $x > 0$ ove $f(x)$ sia definita e tale, inoltre, che $\varphi(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ (limite che esiste finito).

TEOREMA II. — Se $y = f(x)$ soddisfa alle seguenti condizioni:

1^a è continua in un intorno destro o $\vdash x$ (estremi inclusi) di $x = 0$;

2^a esiste la derivata ordinaria destra della $f(x)$ in $x = 0$;

3^a per ogni x di un intorno destro o $\vdash x$ di $x = 0$ esiste un $x_1 = x_1(x) > 0$ ove $f(x)$ acquisti il valore massimo $M_{0,x}$ di $f(x)$ in o $\vdash x$, ed un $x_2 = x_2(x) > 0$ ove, analogamente, $f(x)$ acquisti il valore minimo $m_{0,x}$ ⁽⁵⁾;
allora esiste anche la derivata oscillatoria destra della $f(x)$ in $x = 0$ ma essa è ineluttabilmente nulla ⁽⁶⁾.

In altro modo e, forse, più compendiosamente può dunque dirsi che:

Se per una funzione continua in o $\vdash x$, ($x > 0$) esiste la derivata ordinaria destra in $x = 0$, esiste ivi anche l'oscillatoria destra che coincide (talvolta solo in valore assoluto) ⁽⁷⁾ con l'ordinaria.

Invece l'esistenza della derivata oscillatoria destra in $x = 0$ e la « sola presupposta definizione » della $f(x)$ in un intorno destro di $x = 0$ (o su di un semplice I_x) trascina ineluttabilmente l'esistenza della derivata ordinaria della $f(x)$ in $x = 0 +$ se, e soltanto se, detta derivata oscillatoria è nulla.

Aggiungo che:

La necessità, per la validità dell'asserto, della condizione di annullamento della derivata oscillatoria in $x = 0 +$ sarà fra poche righe provata con esempi

Dopo ciò è chiaro che, ove la derivata oscillatoria esista finita e diversa da zero, la derivata ordinaria può benissimo non esistere; è assai presumibile anzi, che, in tali condizioni, non esista affatto (almeno in generale).

4. Ecco ora due soli esempi:

Sia

$$f(y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y^2}{y^2 + t^2} \text{ (8) e } z = \lim_{n \rightarrow \infty} f[\sin(n! \pi x)], \quad (n \text{ intero positivo}).$$

La z è ovviamente tale che se $x = p/q$, (p, q interi e $q \neq 0$) risulterà $z(x) = 0$, mentre, in ogni altro caso (x variando nel campo reale), è $z(x) = 1$ ⁽⁹⁾.

Posto allora $\Phi(x) = xz$, la $\Phi(x)$ non ammette in $x = 0 +$ derivata ordinaria, ma ammette derivata oscillatoria finita, diversa da zero, ed uguale ad uno ⁽¹⁰⁾.

Passo ora all'esempio forse più perspicuo: trattasi della famosa funzione generatrice di Hankel di cui si è già fatto cenno e che, a suo tempo, sollevò tanto

(5) Sempre di $f(x)$ in o $\vdash x$, ben si intende.

(6) Cosicché dalle poste ipotesi e dal precedente teorema I segue che è nulla altresì la presupposta esistente derivata ordinaria.

(7) E ciò accade soltanto quando la $f(x)$ è, a destra di $x = 0$, decrescente.

(8) Così che $f(0) = 0$, mentre, com'è ovvio, per $y \neq 0$ è $f(y) = 1$.

(9) Tal $z(x)$ è la nota funzione di Dirichlet.

(10) Un sia pur semplice « commento » a questa Nota apparirà fra breve nel Bollettino dell'U. M. I. a cura del dott. Mastrogiacomo; ivi saranno segnalati molteplici altri esempi in proposito, tutti dimostrati.

scalpore⁽¹¹⁾, se non altro come primo esempio di funzione continua ma non derivabile (in senso ordinario, si intende).

È la $y = f(x) = x \sin 1/x$ per $x \neq 0$ e $y = 0$ per $x = 0$. Essa è continua in $x = 0 +$, ma non è ivi derivabile. Ci si chiede: è derivabile in senso oscillatorio?; si risponde: sì, e con derivata (oscillatoria) eguale a due.

Desideriamo dimostrarlo. Si consideri all'uopo l'intervallo definito dalla doppia disuguaglianza

$$\bar{x}_p \leq x \leq \frac{1}{2p\pi + \pi/2}, \quad p = n + 1, \quad n \text{ intero} \geq 0.$$

Sarà chiamato intervallo generico di 1^a categoria; ed è definito dalla seguente proprietà: \bar{x}_p è l'estremo inferiore degli x , appartenenti al generico intervallo

$$\frac{1}{2(n+2)\pi + \pi/2} \mid \text{---} \mid \frac{1}{2(n+1)\pi + \pi/2},$$

tali che l'estremo superiore $L_{0,x}$ della $y = f(x)$ in $0 \mid x$ è proprio $x \sin 1/x$; si consideri poi, consecutivamente ad esso (e verso $x = 0$), l'altro intervallo

$$\frac{1}{2p\pi + \pi/2} \leq x \leq \bar{x}_{p-1}, \quad p = n + 2, \quad n \text{ intero} > 0.$$

Sarà detto intervallo generico di 2^a categoria. Con tali intervalli adiacenti, consecutivi (e aventi un estremo in comune) si copre tutto $0 \mid x$.

Nell'intervallo generico di 2^a categoria l'estremo superiore $L_{0,x}$ della $y = f(x)$ considerata (funzione di Hankel) è, costantemente, eguale al valore $\frac{1}{2p\pi + \pi/2}$, $p = n + 2$.

Ciò premesso si spezzi il rapporto oscillazionale in due addendi secondo la $\frac{L_{0,x} - l_{0,x}}{x} = \frac{L_{0,x}}{x} - \frac{l_{0,x}}{x}$, e si consideri, per ora, soltanto il primo addendo $\frac{L_{0,x}}{x}$.

Se x varia nell'intervallo (generico) di 1^a categoria è $\frac{L_{0,x}}{x} = \sin 1/x$, ma è altresì

$$\frac{1}{2(p+1)\pi + \pi/2} < x \leq \frac{1}{2p\pi + \pi/2}, \quad p = n + 1$$

ed anche

$$\frac{1}{2(p+1)\pi + \pi/2} < x \sin \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2p\pi + \pi/2}, \quad p = n + 1$$

e quindi anche

$$\frac{2p\pi + \pi/2}{2(p+1)\pi + \pi/2} < \sin \frac{1}{x} \leq \frac{2(p+1)\pi + \pi/2}{2p\pi + \pi/2}$$

così che per $n \rightarrow \infty$ e, quindi, $p \rightarrow \infty$

$$1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

onde $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{L_{0,x}}{x} = 1$ per x variante su intervalli 1^a categoria.

(11) Fu seguito dagli esempi di Weierstrass, Wiener, Dini, Schwarz, Darboux, Klein, Köpcke, Lerch, Jordan, Schönflies, Broden, etc.

Quando poi x varia (tendendo a zero +) su intervalli di 2^a categoria risulta intanto

$$\frac{I_{0,x}}{x} = \frac{1}{x} : \frac{1}{2p\pi + \pi/2}, \quad p = n + 2, \quad n \text{ int. pos. } > 0$$

e, posto, $x' = \frac{1}{2p\pi + \pi/2}$, viene $\frac{x' \sin 1/x'}{x} = \frac{x'}{x} \sin \frac{1}{x'} = \frac{x'}{x}$; ma è

$$\frac{1}{2(n+2)\pi + \pi/2} \leq x < \frac{1}{2(n+1)\pi + \pi/2},$$

onde

$$\frac{2n\pi + 2\pi + \pi/2}{2n\pi + 4\pi + \pi/2} \leq \frac{x'}{x} < 1,$$

che, per $n \rightarrow \infty$, porge

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x'}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{I_{0,x}}{x} = 1,$$

x variando ora su intervalli di 2^a categoria.

Dopo ciò, com'è chiaro, poichè per ovvie ragioni di simmetria $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{I_{0,x}}{x} = -1$ risulta senz'altro

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\Omega_{0,x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{I_{0,x} - I_{0,x}}{x} = 2$$

e l'asserto è provato.

Geometria. — *Ricerche sugli spazi lineari di una ipersuperficie algebrica.* Nota di GIUSEPPE VACCARO, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

E. Bompiani, in una Nota ⁽¹⁾ dallo stesso titolo della presente, nel trattare alcune questioni riguardanti gli intorni di un S_k appartenente ad una ipersuperficie algebrica V_{r-1}^n di S_r , di ordine n , ha stabilito, tra l'altro, che se è $r \leq 2k$ esiste in S_k almeno una V_{2k-r}^n di punti doppi per V_{r-1}^n di ordine $(n-1)^{r-k}$.

Lo stesso Autore avverte che se la V_{r-1}^n ha un comportamento particolare lungo lo S_k , l'esistenza di una varietà di punti doppi per V_{r-1}^n in S_k , può verificarsi indipendentemente dalla limitazione $r \leq 2k$. Così per esempio egli dimostra che se nei punti dello S_k la V_{r-1}^n ammette un unico iperpiano tangente, esiste in S_k una V_{k-1}^{n-1} di punti doppi (almeno) per V_{r-1}^n , anzi questa è condizione necessaria e sufficiente perchè si verifichi l'anzidetta condizione.

Nella presente nota estendo le ricerche del Bompiani, dimostrando che tutte le volte che gli iperpiani tangenti nei punti dello S_k formano un sistema lineare

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) Cfr. E. BOMPIANI, *Ricerche sugli spazi lineari di una ipersuperficie algebrica*. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. I, fasc. 1 (1946).

∞^{e-1} con $\rho - 1 \leq k$, o, ciò che è lo stesso, tutte le volte che esista nei punti dello S_k un $S_{r-\rho}$ ($r - \rho \geq k$) tangente fisso, allora nello S_k esiste una varietà di punti doppi (almeno) per la V_{r-1}^n , in generale di dimensione $k - \rho$ e di ordine $(n-1)^e$, e che anzi questa è condizione necessaria e sufficiente perchè esista un $S_{r-\rho}$ ($r - \rho \geq k$) tangente fisso nei punti di S_k .

Al n. 3 estendo la ricerca al caso che lo S_k sia luogo di punti s -pli per V_{r-1}^n , esaminando dei casi in cui nello S_k esista una varietà di punti $(s+1)$ -pli (almeno) per V_{r-1}^n .

1. Sia V_{r-1}^n una ipersuperficie algebrica di S_r contenente uno spazio lineare S_k ($k \leq r-2$) e supponiamo che gli iperpiani tangenti nei punti di S_k contengano tutti un $S_{r-\rho}$ fisso passante per lo S_k , formando pertanto un sistema lineare Σ di dimensione $\rho - 1 \leq k$.

La ipersuperficie polare di un generico punto P di S_r , rispetto alla V_{r-1}^n , è una V_{r-1}^{n-1} , la quale è tagliata dallo S_k in una V_{k-1}^{n-1} .

Poichè gli iperpiani tangenti in punti di S_k e passanti per P formano un sistema lineare Σ di dimensione $\rho - 2$ e passano tutti per un $S_{r-\rho+1}$, ne viene che ognuno degli iperpiani tangenti in punti di S_k che si possono condurre da P risulta tangente lungo una $V_{k-\rho+1}^{n-1}$ di quella V_{k-1}^{n-1} .

I sistemi lineari $\bar{\Sigma}$ appartenenti al sistema Σ sono ∞^{e-1} , $\rho - 1$ è quindi la dimensione del sistema lineare di V_{k-1}^{n-1} segato dalle V_{r-1}^{n-1} su S_k . Questo sistema lineare ha in generale una varietà base che è una $V_{k-\rho}^{(n-1)^e}$ di dimensione $k - \rho$ e di ordine $(n-1)^e$. I punti della $V_{k-\rho}^{(n-1)^e}$ risultano doppi (almeno) per V_{r-1}^n .

Viceversa, se una V_{r-1}^n ha in un suo S_k una $V_{k-\rho}^{(n-1)^e}$ di punti doppi (e non altri punti doppi) le ipersuperficie polari dei punti di S_r che non passano per S_k intersecano lo S_k in V_{k-1}^{n-1} passanti per la $V_{k-\rho}^{(n-1)^e}$. Quest'ultima risulta intersezione completa di ρ V_{k-1}^{n-1} ed è varietà base di un sistema lineare Ω di dimensione $\rho - 1$ di $V_{k-1}^{n-1(2)}$.

Da ciò segue che le ipersuperficie polari di punti di S_r passanti per S_k formano un sistema lineare di dimensione ∞^{r-e} ed i loro poli riempiono un $S_{r-\rho}$ passante necessariamente per lo S_k . Ne deriva allora che gli iperpiani tangenti nei punti dello S_k passano tutti per tale $S_{r-\rho}$ che risulta tangente fisso nei punti di S_k .

Si ha dunque che: *Condizione necessaria e sufficiente perchè una V_{r-1}^n abbia lungo un suo S_k un $S_{r-\rho}$ ($r - \rho \geq k$) tangente fisso è che esista nello S_k una $V_{k-\rho}^{(n-1)^e}$ di punti doppi per V_{r-1}^n .*

È chiaro che se è $r \leq 2k$ gli iperpiani tangenti nei punti di S_k , dovendo passare per lo $S_k \equiv S_{r-(r-k)}$ formano un sistema lineare ∞^{r-k-1} dove $r - k - 1 \leq 2k - k - 1 = k - 1$ e pertanto necessariamente deve esistere in S_k una $V_{2k-r}^{(n-1)^{r-k}}$ di punti doppi.

(2) Cfr. F. SEVERI, *Rappresentazione di una forma qualunque...* «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», ser. V, vol. XI (1902).

2. Il teorema del numero precedente si dimostra analiticamente come segue:

Per comodità di scrittura, denotiamo le variabili che si annullano su S_k con x^1, x^2, \dots, x^{r-k} , quelle non nulle su S_k con t^1, t^2, \dots, t^{k+1} , quest'ultime essendo coordinate proiettive omogenee dentro lo S_k .

Per il fatto che la V_{r-1}^n contiene S_k , cioè che la sua equazione è sempre soddisfatta per $x^1 = x^2 = \dots = x^{r-k} = 0$, questa può scriversi:

$$(2.1) \quad f(x; t) \equiv \varphi_{n,0}(x) + \varphi_{n-1,1}(x; t) + \dots + \varphi_{1,n-1}(x; t) = 0$$

ove $\varphi_{n-h,h}$ è una forma di grado $n-h$ nelle x^i e di grado h nelle t^α .

Lo S_{r-1} tangente in un punto $x^i = 0, t^\alpha = \overset{\circ}{t}^\alpha$ è dato da:

$$\partial_i f(0, \overset{\circ}{t}) x^i + \partial_\alpha f(0; \overset{\circ}{t}) t^\alpha = 0^{(3)} \quad i = 1, 2, \dots, r-k; k = 1, 2, \dots, k+1$$

dove si è posto $\partial_i f(x; t) = \partial f(x; t) / \partial x^i$ e $\partial_\alpha f(x; t) = \partial f(x; t) / \partial t^\alpha$. La precedente, per essere $\partial_\alpha f(0; \overset{\circ}{t}) \equiv 0$ e $\partial_i \varphi_{n-h,h}(0; \overset{\circ}{t}) \equiv 0$ per $n-h > 1$, si riduce a:

$$\partial_i \varphi_{1,n-1}(0; \overset{\circ}{t}) x^i = 0.$$

Ma $\varphi_{1,n-1}(x; t)$ può scriversi $\psi_i(t) x^i$ (essendo le ψ_i forme di grado $n-1$ nelle t^α) e perciò $\partial_i \varphi_{1,n-1}(x; t) = \psi_i(t)$, per cui l'equazione dello S_{r-1} tangente è:

$$(2.2) \quad \psi_i(\overset{\circ}{t}) x^i = 0.$$

Poichè le $\psi_i(t)$ sono $r-k$ forme in k variabili non omogenee, nello S_k vi sono certamente dei punti doppi se $r-k \leq k$ cioè se $r \leq 2k$.

In generale se le $\psi_i(t)$ sono del tipo

$$\psi_i(t) \equiv \alpha_i^h \theta_h(t) \quad h = 1, 2, \dots, \rho \quad (\rho \leq k)$$

essendo $\theta_h(t)$ forme di grado $n-1$ nelle t^α ed α_i^h costanti, la (2.2) diviene:

$$\alpha_i^h \theta_h(\overset{\circ}{t}) x^i = 0$$

con che gli iperpiani tangenti nei punti dello S_k passano tutti per un $S_{r-\rho}$ che risulta tangente fisso nei punti S_k .

I punti comuni alle $\theta_h(t) = 0$ che riempiono una $V_{k-\rho}^{(n-1)\rho}$ sono evidentemente doppi (almeno) per V_{r-1}^n .

Viceversa se nello S_k vi è una $V_{k-\rho}^{(n-1)\rho}$ di punti doppi, necessariamente le $\psi_i(t)$ debbono avere $\infty^{k-\rho}$ soluzioni comuni, e quindi debbono essere necessariamente del tipo

$$\psi_i(t) \equiv \alpha_i^h \theta_h(t)$$

con che gli S_{r-1} tangenti nei punti di S_k formano un sistema lineare di dimensione $\rho-1$; essi passano tutti per un $S_{r-\rho}$ che risulta tangente fisso nei punti di S_k .

Per $\rho = 1$ si ricava il caso esaminato dal Bompiani.

(3) Adottiamo, qui ed in seguito, la ormai classica convenzione di sottintendere il segno di Σ rispetto ad un indice ripetuto una volta in alto ed una volta in basso in una espressione monomia.

3. Supponiamo ora che lo S_k sia tutto costituito da punti s -pli.

La ipersuperficie polare s^{esima} , d'ordine $n-s$, di un generico punto P di S_r rispetto alla V_{r-1}^n è una V_{r-1}^{n-s} la quale è tagliata dallo S_k in una V_{k-1}^{n-s} . Se i coni osculatori Γ nei punti di S_k hanno in comune un cono di dimensione $r-\rho$ e di ordine s^q , $\Gamma_{r-\rho}$, formando un sistema lineare Σ di dimensione $\rho-1$, per ogni punto P dello S_r ne passano ∞^{q-2} , formanti un sistema lineare $\bar{\Sigma}$.

I sistemi lineari $\bar{\Sigma}$ appartenenti al sistema Σ sono ∞^{q-1} , $\rho-1$ è quindi la dimensione del sistema lineare di V_{k-1}^{n-s} segato dalle V_{r-1}^{n-s} su S_k . Questo sistema lineare ha in generale una varietà base che è una $V_{k-q}^{(n-s)^q}$ di dimensione $k-\rho$ e di ordine $(n-s)^q$, i cui punti risultano $(s+1)$ -pli (almeno) per V_{r-1}^n .

Inversamente, con ragionamento del tutto analogo a quello del n. 1, si dimostra che se su un S_k luogo di punti s -pli di una V_{r-1}^n esiste una $V_{k-q}^{(n-s)^q}$ di punti $(s+1)$ -pli per V_{r-1}^n (e non altri punti $(s+1)$ -pli), allora i coni osculatori nei punti dello S_k hanno in comune un cono Γ_{r-s}^q .

Si ha così: *Condizione necessaria e sufficiente perchè una V_{r-1}^n di S_r abbia lungo un suo S_k che sia luogo di punti s -pli, un cono osculatore di dimensione $r-\rho$ fisso, è che esista in S_k una $V_{k-q}^{(n-s)^q}$ luogo di punti $(s+1)$ -pli (almeno) per V_{r-1}^n .*

La dimostrazione analitica di questo teorema si conduce in modo del tutto analogo a quello del n. 2.

Meccanica. — *Sulle vibrazioni delle piastre con nervature.* Nota I di ELIO GIANGRECO, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. INTRODUZIONE. — Lo studio statico delle piastre rinforzate da nervature ha già formato oggetto di diversi lavori, con particolare riguardo al caso di piastre rettangolari con nervature in numero qualsiasi, inclinate a 45° e parallele (1); nulla era stato invece studiato dal punto di vista dinamico sebbene anche questo aspetto del problema interessi spesso il costruttore tanto più se si pensa che a volte le insidie maggiori gli derivano proprio da quei fenomeni vibratorii che nella pratica corrente vengono spesso trascurati.

Nella presente Nota mi propongo di affrontare l'argomento studiando le vibrazioni libere di una piastra rettangolare, solidale con due nervature centrali ed ortogonali, del cui comportamento statico mi sono già occupato nel lavoro dianzi citato (2). Mi sono limitato ad essa per semplicità di calcoli e di sviluppi,

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) Ved. TOLORTI e GRIOLI, *Sul calcolo delle piastre con nervature*. «Giornale del Genio Civile», giugno 1949. Questa trattazione è stata ripresa e completata con numerose tabelle in un Manuale dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, in corso di stampa. Nel caso particolare di una piastra solidale con due nervature centrali ed ortogonali la trattazione stessa è stata da me sottoposta ad un controllo sperimentale. Ved. GIANGRECO, *Di una ricerca teorico-sperimentale sulle piastre con nervature*, in corso di pubblicazione su l'«Ingegneria».

(2) Ved. fine nota (1).

ma l'estensione dal caso statico al caso dinamico si può fare in maniera analoga anche per il caso di più nervature.

Punto di partenza della trattazione della presente Nota è l'equazione integro-differenziale nell'incognito abbassamento w , che regge il problema statico. Essa viene trasformata nella corrispondente equazione dinamica sostituendo in conformità del principio di d'Alembert alle forze attive le forze perdute. Ricercandone poi soluzioni della forma $w = \bar{w}(xy) \cos \omega t$ si riconduce il problema, previa eliminazione del tempo, alla risoluzione di un'equazione integro-differenziale omogenea nell'incognita $\bar{w}(xy)$.

Mediante sviluppo del nucleo in serie di autofunzioni tale equazione integro-differenziale viene in seguito ridotta ad un sistema di equazioni algebriche lineari omogenee e precisamente a ν equazioni se si arresta lo sviluppo in serie del nucleo al ν^{mo} termine. L'annullamento del determinante dei coefficienti di questo sistema di ν equazioni fornisce gli autovalori e quindi le frequenze di vibrazione.

Molto semplice ed espressiva è la formula a cui si perviene per tale via, in prima approssimazione, per la frequenza fondamentale di vibrazione:

$$(1) \quad \sigma = \frac{\pi}{2 \sqrt{a^3 b^3}} \sqrt{\frac{N(a^2 + b^2)^2 + 2 E I_1^x b^3 + 2 E I_2^x a^3}{\rho \delta ab + 2 \mu_1 a + 2 \mu_2 b}}$$

dove: a e b denotano i lati della piastra e le rispettive lunghezze delle due nervature;

I_1^x e I_2^x sono dei momenti di inerzia fittizi che tengono conto della solidarietà fra piastra e nervature e di cui preciserò in seguito l'espressione;

$\rho \delta$, μ_1 e μ_2 sono la densità superficiale e le densità lineari della piastra e delle due travi.

Come è naturale, dalla (1) si rileva, in assenza di travi, la ben nota espressione della frequenza fondamentale di vibrazione di una piastra:

$$\sigma = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{\rho \delta} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}.$$

Ho voluto quindi controllare sopra un caso concreto la bontà della formula (1) confrontando il valore di σ , di prima approssimazione, da essa fornito, con quello di seconda approssimazione. Ho trovato fra le due approssimazioni uno scarto percentuale del 0,128 circa, il che costituisce un ottimo controllo della convergenza del procedimento.

2. BREVE RICHIAMO SULL'IMPOSTAZIONE STATICA DEL PROBLEMA. — Consideriamo una piastra rettangolare di lati a e b rinforzata da due nervature centrali ed ortogonali (ved. fig. 1) e pensiamo per un momento che su di essa agisca un carico ripartito. Se indichiamo con $p(\xi\eta)$ l'intensità del carico per unità di superficie di piastra e con $p_1(\xi)$ e $p_2(\eta)$ l'intensità delle azioni normali trasmesse per unità di lunghezza alle due travi dalla piastra lungo la zona di contatto, l'espressione

dell'abbassamento di un generico punto $P(xy)$, se si trascurano le azioni tangenziali fra piastra e nervature, è del tipo:

$$(2) \quad w(xy) = \int_0^a \int_0^b K(xy \xi \eta) {}^{(3)} p(\xi \eta) d\xi d\eta - \int_0^a K\left(xy \xi \frac{b}{2}\right) p_1(\xi) d\xi - \\ - \int_0^b K\left(xy \frac{a}{2} \eta\right) p_2(\eta) d\eta$$

con

$$(3) \quad \begin{cases} p_1(x) = EI_1 \frac{d^4 w_1}{dx^4} \\ p_2(y) = EI_2 \frac{d^4 w_2}{dy^4} \end{cases}$$

dove I_1 e I_2 sono i momenti di inerzia baricentrici delle due travi.

Come provano i proff. Tolotti e Grioli nella loro Nota ⁽⁴⁾ la valutazione dell'effetto delle azioni tangenziali si lascia in definitiva ricondurre alla sostituzione delle (3) con le

$$(4) \quad \begin{cases} p_1(x) = EI_1^* \frac{d^4 w_1}{dx^4} \\ p_2(y) = EI_2^* \frac{d^4 w_2}{dy^4} \end{cases}$$

dove:

$$(5) \quad \begin{cases} I_1^* = I_1 + \frac{h_1 + \delta}{2} S_1 \\ I_2^* = I_2 + \frac{h_2 + \delta}{2} S_2 \end{cases}$$

essendo: h_1 e h_2 le altezze delle travi AB e CD;

S_1 e S_2 i momenti statici delle sezioni delle due travi rispetto all'asse neutro del sistema nervatura più lastra collaborante.

Qui non riporto la dimostrazione analitica data in detta Nota, ma poichè interessa per l'estensione dinamica, ne espongo il concetto informatore.

Esso consiste nel sostituire le azioni tangenziali che si esercitano fra piastra e nervature con delle equivalenti azioni normali. Chiamando infatti con $\tau_1(x)$ l'intensità dell'azione di taglio che si esplica fra la piastra e la nervatura AB, essa genera nella trave un momento $\frac{h_1}{2} \tau_1$ (positivo se tende le fibre inferiori) ed uno $\frac{\delta}{2} \tau_1$ nella piastra, che equivalgono ad un'unica azione normale di valore $-\frac{h_1 + \delta}{2} \frac{d\tau_1}{dx}$; analogamente per la trave CD. Cosicchè mentre le azioni tangen-

(3) $K(xy \xi \eta)$ è la cosiddetta funzione d'influenza che rappresenta l'abbassamento di un punto (xy) della piastra dovuto ad un carico unitario concentrato in $(\xi \eta)$.

(4) Ved. TOLOTTI e GRIOLI, loco citato.

ziali trasmesse dalla piastra alle travi sono eguali ed opposte a quelle trasmesse dalle travi alla piastra, quando se ne vanno a tradurre gli effetti con equivalenti azioni normali queste non si elidono più mutuamente perchè vengono ad avere lo stesso senso e per di più sommandosi portano a ridurre l'abbassamento della piastra.

Se infatti valutiamo l'azione tangenziale fra la piastra e la nervatura AB pensando ad una trave a T che ha per larghezza della suola la larghezza di soletta collaborante si ha:

$$\tau_1 = ES_1 \frac{d^3 w_1}{dx^3}$$

che ha per equivalente azione normale: $-\frac{h_1 + \delta}{2} ES_1 \frac{d^4 w_1}{dx^4}$. Questo porta ad incrementare la rigidità flessionale della trave della quantità $ES_1 \frac{h_1 + \delta}{2}$ e così pure per la trave CD. Perciò, i rispettivi momenti d'inerzia delle nervature, che tengono conto della soletta collaborante, assumono l'espressione (5).

Accanto alle (2) e (4) bisogna poi associare le:

$$(6) \quad \begin{cases} w_1(x) = w\left(x, \frac{b}{2}\right) \\ w_2(y) = w\left(\frac{a}{2}, y\right) \end{cases}$$

che esprimono l'eguaglianza degli spostamenti della piastra e delle nervature lungo le rispettive rette di contatto.

3. EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI DA CUI DIPENDE LO STUDIO DELLE VIBRAZIONI LIBERE DELLA PIASTRA CON NERVATURE. — Per poter passare ora dal problema statico al problema dinamico dobbiamo sostituire, secondo il principio di d'Alembert, alle forze attive le forze perdute che, per lo studio delle vibrazioni libere, si riducono alle sole forze d'inerzia della piastra e delle travi, normali al piano medio della piastra.

La forza d'inerzia della piastra è $-\rho\delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ e quelle delle travi sono $-\mu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}$ e $-\mu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}$ che vengono a costituire altre azioni normali da sommarsi alle precedenti (ved. paragrafo 2). Si noti che μ_1 e μ_2 sono le densità lineari riferite alla sola sezione delle due nervature (senza soletta collaborante); infatti l'introduzione delle forze d'inerzia non modifica affatto la distribuzione delle azioni normali dovute alla presenza delle azioni tangenziali, le quali sono le uniche che fanno intervenire la larghezza collaborante.

Cosicchè la (2) diviene:

$$(7) \quad w(xyt) = -\rho\delta \int_0^a \int_0^b K(xy\xi\eta) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\xi d\eta - \int_0^a K\left(xy\xi \frac{b}{2}\right) p_1(\xi t) d\xi - \\ - \int_0^b K\left(xy \frac{a}{2} \eta\right) p_2(\eta t) d\eta$$

con:

$$(8) \quad \begin{cases} p_1(xt) = EI_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \mu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \\ p_2(yt) = EI_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} + \mu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \end{cases}$$

ed ancora:

$$(9) \quad \begin{cases} w_1(xt) = w\left(x, \frac{b}{2}, t\right) \\ w_2(yt) = w\left(\frac{a}{2}, y, t\right). \end{cases}$$

In possesso delle (6), (7) e (8), che sono ordinatamente le equivalenti dinamiche delle (2), (4) e (5), proponiamoci di ricercare soluzioni della forma:

$$w(xyt) = \bar{w}(xy) \cos \omega t$$

$$w_1(xt) = \bar{w}_1(x) \cos \omega t$$

$$w_2(yt) = \bar{w}_2(y) \cos \omega t.$$

Si rileva subito che ponendo:

$$(10) \quad \begin{cases} p_1^-(x) = EI_1 \frac{d^4 \bar{w}_1}{dx^4} - \mu_1 \omega^2 \bar{w}_1 \\ p_2^-(y) = EI_2 \frac{d^4 \bar{w}_2}{dy^4} - \mu_2 \omega^2 \bar{w}_2 \end{cases}$$

ed ancora:

$$(11) \quad \lambda = \rho \delta \omega^2$$

la (6), previa eliminazione del tempo, diviene:

$$(12) \quad \begin{aligned} \bar{w}(xy) = \lambda \int_0^a \int_0^b K(xy \xi \eta) \bar{w}(\xi \eta) d\xi d\eta - \int_0^a K\left(xy \xi \frac{b}{2}\right) p_1^-(\xi) d\xi - \\ - \int_0^b K\left(xy \frac{a}{2} \eta\right) p_2^-(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

che insieme alle (8) costituisce il sistema di equazioni integro-differenziali da cui dipende il problema propostomi ed il cui studio, insieme ad un'applicazione concreta, costituisce l'oggetto della Nota II.

Fisica. - *È possibile determinare la velocità della luce in percorsi aperti?* Nota II di MARIO GALLI, presentata (*) dal Corrisp. L. TIERI.

1. In una Nota precedente⁽¹⁾ abbiamo discusso la possibilità di rilevare effetti di prim'ordine del moto di traslazione terrestre, ed abbiamo sostenuto che ciò si potrebbe conseguire⁽²⁾ solo qualora potessimo sincronizzare, indipendentemente dal fenomeno della propagazione luminosa, due cronometri lontani. Lo scopo sarebbe raggiunto, ad esempio, riuscendo a fare rotare in modo rigorosamente sincrono due ruote dentate congruenti poste a distanza conveniente.

Non tutti però riconoscono adeguatamente questa necessità. L'insidia latente in tutti i vari progetti del genere consiste nel limitarsi a riconoscere la necessità di uguagliare i periodi, non già perchè teoricamente non si riconosca anche la necessità di uguagliare la fase, ma perchè questa necessità è poco appariscente nei vari dispositivi, in quanto si dà eccessiva importanza al fatto che si tratterebbe di misure differenziali, e perchè non sempre si avverte sufficientemente che la stessa causa che dovrebbe influenzare la velocità della luce influisce parimenti sulla propagazione dell'onda elettromagnetica regolatrice.

Non ci può essere dubbio che il sincronismo è assolutamente necessario, almeno se si vuole determinare la velocità della luce nel senso letterale della parola. Infatti, nelle usuali determinazioni della velocità della luce non si fa altro che stabilire che il tempo occorrente alla luce per percorrere un certo spazio è uguale al tempo occorrente ad un certo dispositivo per rotare di un certo angolo. Il dispositivo potrebbe essere diversissimo; potrebbe anche non essere un sistema meccanico, come nel metodo di Karolus, ma comunque anche qui non si fa altro che paragonare un tempo incognito con un tempo noto. Nè si potrebbe fare diversamente se non si vuole cambiare il senso del problema. Nel caso attuale, se vogliamo determinare il tempo occorrente alla luce per andare da A a B non potremo fare altro che uguagliarlo al tempo occorrente alla cellula di Kerr posta in B per passare da una fase all'altra. Dovremo in sostanza poter dire: L'impulso luminoso è partito da A quando la fase in B (non in A soltanto) era tale, è giunto in B quando la fase era diventata tale. Ma questo è impossibile se è ignota la relazione di fase tra le due cellule di Kerr. Non si può evadere questa necessità. Questo è evidente almeno se vogliamo esprimere la velocità della luce nelle varie direzioni con un numero. Se però ci si contenta di soli risultati qualitativi (la cui sufficienza non vogliamo escludere in modo assoluto) l'argomento non è più decisivo. Ma comunque nessuno ha mostrato chiaramente come la difficoltà possa essere superata.

La fonte più comune d'inganno è costituita dalla considerazione alquanto superficiale che l'intercettazione di un fascio luminoso operata da due cellule di

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) Cfr. « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. VI, p. 620 (1949).

(2) Conformemente però alla precisazione fatta nel n. III di detta Nota.

Kerr (o eventualmente da dispositivi meccanici) dà risultati diversi secondo che il fascio si propaga da A verso B o da B verso A. Ma giudicando a questo modo non si riflette abbastanza che tale considerazione sarebbe incensurabile solo qualora l'accordo di fase fosse realizzato. In caso diverso la disuguaglianza di comportamento ora segnalata si potrebbe verificare anche se le velocità di propagazione nei due sensi fossero uguali, come risulta evidentemente dalla supposizione fatta precedentemente di due ruote dentate uguali e coassiali e rigidamente collegate ma sfasate di un certo angolo. Salvo per angoli speciali, si potrebbe avere completa intercettazione del fascio che si propaga da A a B ed intercettazione solo parziale del fascio che si propaga da B ad A.

Nè artifici di altro genere suggeriti allo scopo sono molto più felici.

2. Finora ci siamo occupati dell'efficacia del metodo proposto in ordine ad una eventuale dimostrazione, per quanto concerne la propagazione luminosa, del primo principio della relatività. Ma è ragionevole chiedersi se esso possa, con opportune varianti, essere applicato ad una verifica del secondo principio, col quale si afferma la costanza della velocità della luce rispetto alla velocità della sorgente luminosa.

Per quanto riconosciamo che in questa materia la circospezione non sia mai eccessiva, come peraltro risulta da tutte le considerazioni precedenti, crediamo potere asserire che, con riferimento al secondo principio, le prospettive sono molto migliori. Con ciò non si vuole negare che le difficoltà pratiche siano rilevanti, forse anche insuperabili. Ma per lo meno qui è evitabile il circolo vizioso che finora ha impedito ogni fruttuosa applicazione al primo principio.

Abbiamo visto precedentemente che la difficoltà essenziale consiste nel realizzare un perfetto sincronismo fra due cellule di Kerr poste in A e B, specialmente con riferimento alla fase. Ma nel caso presente lo sfasamento può essere ignorato. Possiamo mostrarlo con le seguenti considerazioni.

Supponiamo che la luce che si propaga da A a B sia emessa da una sorgente in moto. Sia v la componente della velocità della sorgente nella direzione A B. In queste condizioni, se è vero il principio di Ritz, la velocità della luce nella direzione AB è $c + v$. Supponiamo che v sia regolabile a piacere, naturalmente entro certi limiti, e supponiamo pure di operare inizialmente con velocità v opportuna in modo da avere in B un massimo luminoso.

Ora, se, ferme restando le altre condizioni, mutiamo soltanto v , se fosse vero il principio di Ritz, il massimo osservato in B non vi potrebbe sussistere, poichè la presenza di esso in B è determinata dalla velocità di propagazione della luce, che per ipotesi è cambiata. Per una modificazione sufficientemente ampia di v , il massimo dovrebbe essere sostituito da un minimo, poi da un altro massimo e così di seguito. Se invece vale il principio della costanza della velocità della luce, nessuna modificazione del genere dovremmo osservare in B. La conseguenza segnalata è evidente teoricamente e sarebbe manifestissima all'atto dell'esperienza poichè darebbe luogo ad un effetto assolutamente inconfondibile; quale sarebbe la sostituzione di un massimo con un minimo o addirittura con un altro massimo.

Per giudicare della praticità della proposta tutto si riduce a valutare l'entità della variazione di v occorrente per provocare uno spostamento apprezzabile del massimo luminoso. A questo scopo supponiamo che le due cellule vibrino esattamente con la stessa fase. Ciò significa, nel dispositivo di Amerio, che i punti A e B distano di un multiplo di lunghezza d'onda della radiazione hertziana adoperata per governare l'eccitazione delle cellule stesse. Vale allora la relazione:

$$l = \overline{AB} = n\lambda.$$

Avremo in B un massimo luminoso se il tempo che impiega la luce per andare da A a B è uguale ad un multiplo di un semiperiodo, se vale cioè la relazione:

$$\frac{l}{c+v} = m \frac{T}{2},$$

dove c rappresenta la velocità normale di propagazione, $c+v$ la velocità di propagazione quando la sorgente si muove nella direzione AB con velocità v . La relazione sopra scritta è valida certamente per $v=0$, ed in tal caso $m=2n$, se indichiamo con n il numero di lunghezze d'onda della radiazione hertziana eccitatrice contenute in AB. Aumentando progressivamente v arriveremo al massimo successivo ed in queste nuove condizioni potremo scrivere:

$$\frac{l}{c+v} = (m-1) \frac{T}{2} = (2n-1) \frac{T}{2},$$

dove n ha lo stesso significato che precedentemente. Da queste relazioni ricaviamo:

$$v = \frac{l}{2n^2 T}$$

dove abbiamo posto n in luogo di $(n-1)$, poichè, nelle migliori condizioni sperimentali, n sarà un numero molto grande. Tenendo presente che $l=n\lambda$ ricaviamo infine:

$$v = \frac{c^2}{2\nu\lambda}.$$

Cioè la velocità v necessaria per passare da un massimo ad un altro massimo successivo è inversamente proporzionale alla distanza AB ed alla frequenza della radiazione regolatrice, come era naturale aspettarsi.

Ciò posto facciamo un esempio numerico. La frequenza della radiazione eccitatrice non può essere grande a piacere, poichè è vincolata all'inerzia della cellula di Kerr. Secondo Amerio, adoperando invece del nitrobenzolo, come si fa abitualmente, il solfuro di carbonio, si può arrivare a frequenze dell'ordine di 10^9 . In tal caso avremo, facendo $1 = 30 \text{ km}$:

$$v \cong 3 \text{ km/sec.}$$

Certamente questa velocità è ancora troppo grande perchè si possa imprimere ad una sorgente luminosa senza eccessive difficoltà ⁽³⁾, a meno che non si voglia

(3) Q. MAIORANA, sperimentando con sorgenti in moto allo scopo di verificare il secondo principio della relatività, raggiunse non senza difficoltà velocità di circa 100 m/sec. Cfr. «Rend. Lincei», ser. V, vol. II, p. 402 (1918). Ma non c'è dubbio che questo limite possa essere notevolmente oltrepassato.

ricorrere ai raggi canali. Adoperando questi si potrebbe, è vero, sperimentare con velocità molto elevate, il che consentirebbe di diminuire ϵ , ma si urterebbe contro gravi difficoltà da altri punti di vista. Gravissima fra le altre difficoltà sarebbe la scarsa luminosità che con essi si può realizzare.

Ma contro l'ostacolo segnalato si possono opporre due considerazioni:

a) in primo luogo non è provato che la frequenza di 10^9 hertz sia l'estremo limite che non è dato oltrepassare con nessun altro metodo;

b) l'ordine di grandezza trovato per la velocità della sorgente luminosa è relativo all'effetto in questione, sostituzione di un massimo con un altro. Ma niente impone di pensare che si debba arrivare a questo effetto visibilissimo per mettere in evidenza un influsso della velocità della sorgente luminosa sulla velocità della luce. Se per esempio ci si contentasse di arrivare da un massimo ad un minimo, la velocità ora calcolata diventerebbe la metà, ossia 1,5 km/sec.

Ma anche uno spostamento relativamente lieve sarebbe sufficientissimo allo scopo. Tenendo conto di questo non c'è dubbio che la velocità da imprimersi ad una sorgente luminosa per scorgere un effetto del genere è notevolmente minore, molto probabilmente non più di 200 o 300 m/sec.

In conclusione, se il metodo suggerito da Amerio e da vari altri autori ⁽⁴⁾ non offre alcuna sicura prospettiva per la verifica del primo principio della relatività, si presterebbe egregiamente per la verifica del secondo principio.

Avvertiamo peraltro che questo giudizio si basa su un esame della difficoltà essenziale ⁽⁵⁾, quella del sincronismo, che qui non pregiudica affatto. Un giudizio completo sulla praticità dell'esperienza può essere dato solo entrando in discussioni che qui vogliamo evitare, anche perchè riteniamo che siano necessarie allo scopo delle esperienze preliminari. Ma sembra giustificata l'opinione superiormente espressa che qui almeno non si possa opporre alcuna difficoltà di ordine concettuale.

(4) Cfr. gli articoli citati nella Nota I.

(5) Altre difficoltà di ordine concettuale potrebbero solo provenire da talune artificiose precisazioni del principio di Ritz. Così Maiorana ha recentemente avanzato la supposizione che la velocità della luce emessa da sorgenti mobili possa essere conforme al principio di Ritz all'atto dell'emissione, ma possa in seguito normalizzarsi durante la propagazione in conseguenza di una oscura interazione tra i fotoni. Cfr. « Rend. Lincei », ser. VII, vol. III, p. 435 (1947). Precedentemente lo stesso Maiorana e Wathaghin avanzarono il sospetto che l'attraversamento di materia ponderabile potrebbe normalizzare la velocità della luce emessa da sorgenti mobili. Cfr. « Rend. Lincei », ser. V, vol. 27, p. 402 (1918); ser. VI, vol. II p. 561 (1925). Tali supposizioni però sono del tutto arbitrarie o comunque, se fossero fondate, escluderebbero radicalmente la possibilità di qualunque esperienza di laboratorio atta a decidere della validità del secondo principio della relatività.

Chimica. — *Sulla determinazione spettrofotometrica della vitamina A* (*). Nota di AURELIO MARIANI e ALDO GAUDIANO, presentata (**) dal Socio D. MAROTTA.

Con il perfezionamento degli apparecchi di misura e principalmente con la creazione di apparecchi a registrazione elettrica, il metodo spettrofotometrico è quello che, fra tutti, si è maggiormente affermato per la determinazione della vitamina A, specialmente nei concentrati oleosi.

Il metodo in sè stesso, per avere universalità di impiego, deve però essere applicato con le opportune precauzioni. Prima di tutto si deve essere in grado di poter misurare su di un prodotto l'assorbimento della luce dovuto esclusivamente alla vitamina, correggendo la lettura diretta dell'estinzione per l'assorbimento dovuto ad altre sostanze che non hanno attività biologica. Dei vari sistemi proposti il più pratico è quello introdotto recentemente da Morton e Stubbs, il quale permette di poter anche identificare le sostanze che accompagnano in maggiore o minore quantità nei prodotti che la contengono la vitamina A.

Nell'applicare praticamente questo metodo analitico, gli Autori hanno riscontrato che, anche lavorando con la massima precisione, si può incorrere in alcuni errori che, in complesso, possono raggiungere valori elevati. Effettuando letture invece che a punti fissi, su tratti lineari della curva nei pressi dei punti interessati e ricavando mediante interpolazione i valori che servono per la correzione, è stato possibile migliorare considerevolmente il metodo ed ottenere dati facilmente riproducibili.

Gli Autori hanno studiato altresì l'andamento dell'assorbimento della vitamina A nei tre solventi più usati: alcool etilico, alcool isopropilico e cicloesano, sia per quello che riguarda la forma che per il reciproco rapporto al massimo caratteristico, al fine di poter estendere il metodo di correzione, e ricavare quindi la potenzialità di un prodotto, servendosi di uno qualsiasi dei tre solventi.

Da questo studio particolareggiato è stato possibile ricavare le seguenti formule di correzione per la vitamina A nella forma esterificata:

$$\left. \begin{array}{l} \text{in alcool etilico} \quad . \quad . \quad \} \\ \text{in alcool isopropilico} \end{array} \right\} E_{\text{corr}} = 7 E_{326,5} - 2,962 E_{311,5} - 4,038 E_{337,5}$$

$$\text{in cicloesano} \quad . \quad . \quad . \quad E_{\text{corr}} = 7 E_{328} - 2,882 E_{313} - 4,118 E_{338,5}$$

In questo caso la curva dell'assorbimento in alcool isopropilico risulta uguale (contrariamente a quanto pubblicato da Oser) a quella riportata da Morton e Stubbs per l'alcool etilico; anche per il cicloesano sono stati trovati gli stessi dati di Morton e Stubbs.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

Per la vitamina A alcool, invece, i punti base, e quindi le formule per la correzione, differiscono in tutti e tre i solventi. In questo caso le formule consigliate, leggermente differenti da quelle proposte da Morton e Stubbs, risultano:

$$\text{in alcool etilico} \quad E_{\text{corr}} = 7 E_{325} - 2,714 E_{310} - 4,286 E_{334,5}$$

$$\text{in alcool isopropilico} \quad E_{\text{corr}} = 7 E_{325} - 2,625 E_{310} - 4,375 E_{334}$$

$$\text{in cicloesano} \quad E_{\text{corr}} = 7 E_{326} - 3,062 E_{312,5} - 3,938 E_{336,5}$$

Studiando poi i reciproci rapporti unitari dell'assorbimento al massimo nei vari solventi e basandosi sul fattore di conversione

$$f = \frac{U. I./g}{E_{1 \text{ cm}}^{100}} = 1900$$

fissato recentemente per l'alcool isopropilico dal Sottocomitato per le vitamine liposolubili della Organizzazione Mondiale della Sanità, vengono proposti i fattori 1880 per gli assorbimenti ricavati usando alcool etilico e 1920 per quelli in cicloesano.

Nel lavoro « in extenso » oltre ad essere raccolti i più attendibili dati sui massimi di assorbimento nell'U. V. e le rispettive attività biologiche delle sostanze analoghe alla vitamina A, viene anche calcolato l'errore medio che si può commettere eseguendo una misura spettrofotometrica di vitamina A con il metodo modificato dagli Autori e vengono dati utili consigli pratici per l'esecuzione di esso.

Geologia Applicata. — *Sulle condizioni geologiche del terreno di fondazione di un eccezionale pilone per elettrodotto in zona sismica* (*).

Nota di FELICE IPPOLITO, presentata (**) dal Socio R. FABIANI.

1. Ho avuto occasione, nello scorso anno, di studiare il terreno di fondazione del pilone di appoggio, in sponda calabra, della linea elettrica a 220 kV che attraverserà lo stretto di Messina, congiungendo la grande rete elettrica di trasporto della penisola con quella della Sicilia. Per la particolarità dell'opera - trattasi di un pilone metallico di oltre 200 m di altezza in zona sismica - mi è parso non del tutto inutile rendere noti i risultati del mio studio sulle particolari condizioni geo-petrografiche del terreno di fondazione.

Non intendo entrare qui nelle questioni tecniche relative alla progettazione dei due piloni, che per la loro altezza sarebbe forse più corretto chiamare torri, con molta maggiore competenza trattate da altri⁽¹⁾, nè tanto meno di soffermarmi

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia Applicata dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) Vedi ad esempio G. KRALL, *Asismica delle torri*. « Rend. Acc. Naz. Lincei » (Classe Sc. Fis. Mat. e Nat.); ser. 8, III, Roma 1947; *Un progetto di torri-piloni alle 200 m. per l'attraversamento dello stretto di Messina con linea aerea a 200 kV*. Ingegneria Ferroviaria; n. 2-6. Roma 1948. G. SILVA, *Projet de traversée du détroit de Messine par une ligne aérienne à 220 kV*. Conf. Int. des Grands Réseaux Electriques à Haute Tension. Paris, 1948.

sulle argomentazioni tecniche che hanno indotto i progettisti a stabilire perchè le fondazioni delle dette torri devono essere monolitiche; mi soffermerò all'incontro alcun poco ad illustrare le sole argomentazioni di indole geologica, che hanno contribuito a questa decisione.

La regione interessata dall'opera che si vuol realizzare è una regione di alta sismicità: la bella carta sismica di Italia, costruita da Mario Baratta nel 1934 ⁽²⁾, sulla base di una lunga e paziente elaborazione di dati, segna infatti la zona dello stretto di Messina al sesto e più alto grado di sismicità, cioè di *sismicità catastrofica*. Qui, come in tutte le regioni sismiche, si possono avere, e si sono infatti avuti, in occasione di terremoti, modifiche notevoli della morfologia superficiale, come infatti lo stesso Baratta illustrò per il terremoto del 1908, in una Memoria ormai divenuta classica, nella quale raccolse anche dati della catastrofe del 1783 ⁽³⁾.

Tali abbassamenti, più notevoli nelle zone in cui affiorano rocce lapidee, meno notevoli laddove affiorano terreni incoerenti, devono, sulla scorta di quanto la scienza oggi insegna, attribuirsi alla formazione o meglio alla « rigenerazione » di faglie, alle quali, in ultima analisi, si è oggi propensi ad attribuire la causa prima di tutti i terremoti di interesse regionale, detti appunto « terremoti tettonici ». Le regioni di alta sismicità devono riguardarsi, alla luce delle teorie moderne, come zone labili della crosta terrestre, come zone cioè in cui le sollecitazioni tettoniche, accumulandosi per tempi più o meno lunghi, provocano di tratto in tratto, a profondità anche notevoli nella litosfera, dei movimenti relativi dei bordi delle faglie, generando quelle perturbazioni elastiche che sono le onde sismiche. Basta consultare un qualsiasi trattato moderno di geologia per trovare abbondanti esempi di improvvisi movimenti relativi permanenti dei bordi di una faglia, in occasione di sismi ⁽⁴⁾; notissima è, ad esempio, la faglia di S. Andrea, in California, che ebbe un nuovo rigetto di 6 m, in soli quaranta secondi, durante il terremoto del 18 aprile 1906 ⁽⁵⁾.

Nel nostro caso dunque i tecnici opportunamente decisero, ad evitare catastrofi per fenomeni del genere, di realizzare delle fondazioni monolitiche calcolate in modo che potessero resistere anche ad un improvviso movimento relativo di una porzione notevole del piano di posa. Sorse però subito l'idea, per quanto concerneva la costa calabra, ove a giudicare dalle sommarie notizie esistenti sarebbero affiorate « rocce cristalline », che, se la roccia fosse integra e fresca e se nell'area della base della torre non vi fossero discontinuità tettoniche, la monoliticità potesse essere garantita dalla roccia stessa e quindi si potesse costruire una torre su quattro appoggi e non su una base monolitica, realizzando un notevole risparmio economico. Ciò specialmente in base alla considerazione che in occasione di un terremoto,

(2) M. BARATTA, *I terremoti in Italia*. Pubblicazione della Comm. Italiana per lo studio delle grandi calamità, presso l'Acc. Naz. dei Lincei. Le Monnier, Firenze 1934.

(3) M. BARATTA, *La catastrofe sismica calabro-messinese (28 dicembre 1908)*. Relazione alla Società Geografica Italiana, Roma 1910.

(4) Vedasi, ad esempio, H. CLOOS, *Einführung in die Geologie*; Berlin 1936 o anche A. HOLMES, *Physical Geology*, London 1943.

(5) R. MAILLET et R. PAVANS DE CECCATY, *Le physicien devant la tectonique*; Congrès mondial du pétrole; Paris 1937.

in zona sismica, è di gran lunga più probabile che si rigenerino vecchie faglie, anzichè se ne vengano a formare di nuove.

Sulla base di queste considerazioni il compito del geologo era dunque quello:

a) di definire, ai fini geotecnici, la natura petrografica della o delle rocce interessate dalla fondazione della torre;

b) di accertare se tale roccia garantisse, per l'area interessata dalla fondazione, la monoliticità; in altri termini accertare se tutta l'area compresa tra i quattro vertici della base della torre appartenesse ad una stessa « zolla tettonica »;

c) di precisare a che profondità dovesse venire impostata la fondazione monolitica o, nella ipotesi più favorevole, i quattro appoggi.

All'uopo consigliai di eseguire, nella zona nella quale dovrà venire poggiata la torre, degli scavi di assaggio per accertare la natura del materiale litoide sottostante alla coltre di alterazione superficiale od al terreno vegetale; e precisamente quattro pozzi esplorabili ai quattro angoli del quadrato di base della torre, collegati da cunicoli in croce, al fine di essere ragionevolmente sicuro che non potesse sfuggirmi la presenza di una traccia di discontinuità tettonica nell'area di base dell'opera. Successivamente visitai a più riprese questi scavi, prelevando un'ampia serie di campioni, che sono stati oggetto di studio petrografico, e giunsi alle conclusioni che seguono.

2. La località prescelta per la costruzione della torre in sponda calabra è a circa quota 170 sul piano di Caporafi, che costituisce il dosso occidentale del rilievo di M. Bove. Secondo il foglio n. 254 al 100.000 della carta geologica d'Italia (rilevato nel 1880-81 da E. Cortese) in questa zona dovrebbe affiorare una formazione di « gneiss, scisti anfibolici e micascisti con vene pegmatitiche ». È proprio questa dizione che indusse i tecnici a ritenere la roccia probabilmente atta a garantire la monoliticità della fondazione, poichè, come è noto, i gneiss e gli scisti anfibolici sono tra le rocce più compatte e salde, che si possano mai rinvenire.

Senonchè il sottoscritto, che da vari anni ha dimestichezza con le formazioni litoidi cristalline della Calabria, fin dai primi sopralluoghi orientativi emise i propri dubbi sull'attribuzione di queste rocce al gruppo dei gneiss, perchè, a prescindere da quello che si è poi rilevato con lo studio petrografico in merito allo spinto dinamometamorfismo della zona, all'epoca in cui fu eseguito il rilievo della carta geologica, ossia settanta anni or sono, non si era usi agli studi di petrografia e l'assegnazione anche delle rocce cristalline a questo o quel gruppo era fatto soltanto in base ad una sommaria osservazione macroscopica.

Ed inoltre occorre in Calabria diffidare sempre delle rocce cristalline perchè queste sono quasi sempre ricoperte, per fattori climatici ben noti, da un enorme e spesso potente manto di alterazione in massa.

Lo studio petrografico dei vari campioni raccolti nei pozzi e nei cunicoli e l'osservazione dettagliata sopra luogo, mi hanno permesso di accertare che nella zona affiora, sotto il sottile mantello vegetale, una formazione incoerente, un materiale ampiamente rimaneggiato e caotico costituito da pezzi e frammenti

angolosi di rocce cristalline varie, sempre profondamente alterate⁽⁶⁾, inglobati in un materiale sabbioso rossastro, proveniente con ogni probabilità da un profondo disfacimento e successivo rimaneggiamento di una roccia gneissica. Verso la superficie, e fino alla profondità di 3-4 m, l'alterazione generale è ancora più spinta, tanto che le pareti interne dei pozzi mostrano un lieve accenno alla separazione poligonale dei suoli argillosi.

Questa coltre di materiale incoerente e caotico, ove sono rappresentati, nei frammenti, sia i materiali sottogiacenti, sia altri provenienti forse da monte, cessa

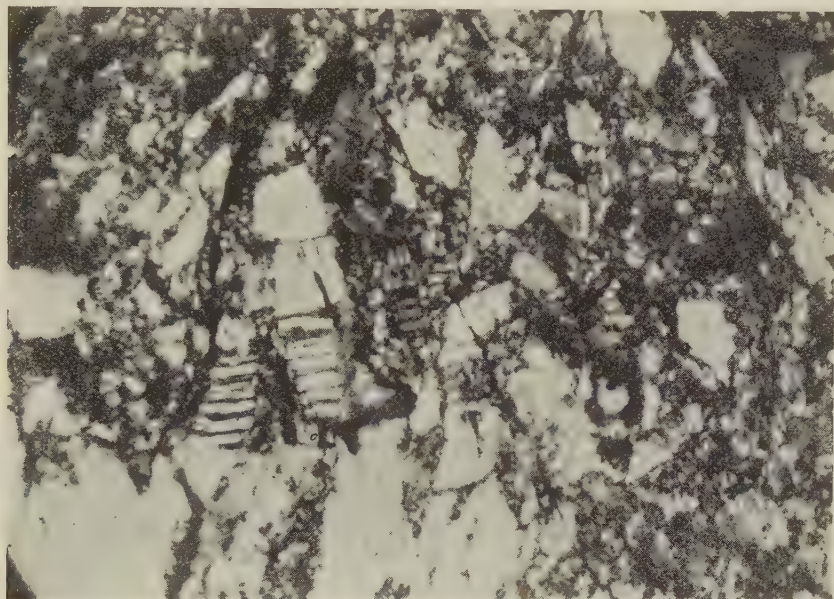


Fig. 1. — Microfotografia di sezione sottile della milonite granitica del piano di Caporafi. Nicols incr.; ingr. 30 volte. Visibili i piccoli frammenti provenienti dalla *macinatura* dei cristalli; le fratture del quarzo e dell'ortoclasio; la distorsione e la rottura dei plagioclasti geminati.

nel pozzo a monte a circa m 9 sotto il piano di campagna, mentre nel pozzo a valle si rinviene per tutta l'altezza di m 10 e continua anche nel cunicolo per circa 7 m dall'imbocco a valle.

A 7 m dall'imbocco del cunicolo verso valle ed a m 9 di profondità nel pozzo a monte si incontra una formazione che sembra a prima vista una roccia salda, ma i cui frammenti si rompono facilmente con un colpo di martello e talora con la semplice pressione delle dita. In effetti si tratta di una roccia che può definirsi come un granito a grana fine più o meno leucocrato e più o meno ricco di minerali micacei, come è dimostrato dallo studio petrografico.

Senonchè questa roccia ha subito tali sollecitazioni tettoniche che i cristalli appaiono tutti, quali più quali meno, minutamente frantumati e cataclasizzati. In particolare il quarzo non solo presenta sempre estinzione fortemente ondulosa,

(6) Gneiss a due miche, aplite granitica, pegmatite granitica, rocce granitiche varie.

ma è sovente brecciato in piccoli detriti angolosi, talvolta anche alquanto arrotondati; i feldspati mostrano di avere subito il medesimo trattamento, ed in particolare i plagioclasti presentano le lamelle di geminazione fortemente contorte e sovente rotte; le miche e la clorite, proveniente dall'alterazione della biotite, sono ridotte in piccole scaglie, che mostrano di frequente un lieve accenno di orientamento.

Secondo la classifica oggi in uso per le rocce che hanno subito gli effetti del dinamometamorfismo ⁽⁷⁾ questa roccia rientra senz'altro nel gruppo delle *cataclasiti*, con tendenza a passare nelle *miloniti* propriamente dette (vedi figg. 1 e 2).

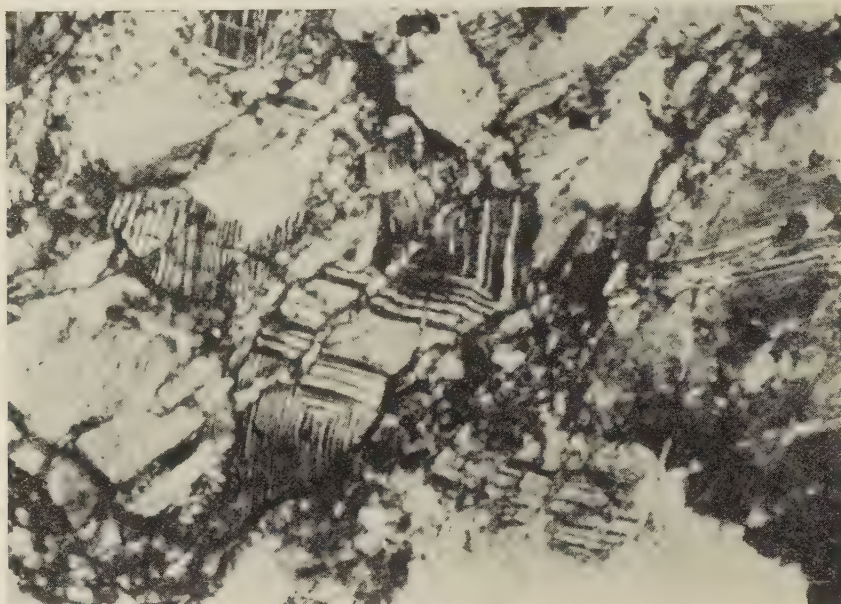


Fig. 2. - Microfotografia di sezione sottile del granito cataclastico del piano di Caporafi. Nicols incr.; ingr. 40 volte. Visibile al centro un cristallo di plagioclasio, con i piani di geminazione distorti, rotto, con un lieve rigetto, e con detriti di cristalli nella rottura.

Inoltre tutti i minerali si presentano fortemente alterati: i feldspati sericitizzati, la biotite alterata in clorite ecc.; il che è da attribuirsi, come ho accennato dianzi, all'effetto usuale del clima calabro, reso naturalmente più pronunziato dallo stato di minuta frantumazione in cui le rocce sono ridotte. Infine tutta la formazione è interessata, ove più ove meno, da una fitta rete di fratture, da qualche centimetro fino a qualche decimetro di spessore, orientate in tutte le direzioni, nelle quali il materiale finemente macinato è praticamente ridotto in una sabbia alquanto argillosa.

3. Sulla base di quanto precede ho pertanto potuto così rispondere ai tre quesiti di cui sopra:

(7) Vedasi R. MALARODA, *Revisione ed aggiornamento della sistematica delle tettoniti a deformazione post-cristallina*. « Rend. Soc. Min. It. », a. III, 1946, pp. 150 e sgg.

a) nella zona ove è prevista la costruzione della torre in sponda calabra, al disotto di un mantello di materiale incoerente e caotico, sul quale non può farsi alcun affidamento per costruzioni quale quella in progetto, in zona sismica, si rinviene una roccia leucogranitica alterata e profondamente cataclasizzata fino a milonitizzata;

b) la profonda cataclasi non può assolutamente garantire la monoliticità della formazione nell'area di fondazione della torre. Non solo la presenza delle numerose fratture, variamente intersecantisi, nelle quali la macinazione del materiale è tanto spinta da doversi ritenere che il movimento relativo sia stato notevole, quanto la cataclasi globale, non seguita da una completa ricementazione, della originaria roccia granitica, che indubbiamente occulta le tracce di eventuali altri fenomeni di scorrimento avvenuti nel seno della massa rocciosa, inducono a ritenere che l'area di base della fondazione non appartiene ad una unica « zolla tettonica »; il che significa che in occasione di sismi, anche di lieve entità, possano prodursi ovunque, nella massa della formazione, movimenti relativi dell'ordine anche dei metri, e quindi non può assolutamente garantirsi che in caso di terremoti i vari punti di appoggio della torre nell'area di base non subiscano movimenti relativi più o meno notevoli;

c) per quanto riguarda il piano di posa dell'opera progettata occorre scartare senz'altro l'ipotesi di appoggiarsi al materiale caotico incoerente ed è necessario approfondirsi per almeno un paio di metri nella formazione rocciosa cataclastica di cui si è detto, come è buona norma per tutte le fondazioni continue in zona sismica, ad evitare l'effetto altamente dannoso delle onde sismiche superficiali.

Cristallografia. — *Osservazioni sulla struttura delle d e l β -asparagine idrate.* Nota di ANDREA ALIETTI, presentata (*) dal Corrisp. P. GALLITELLI.

Le ricerche sulle proprietà delle d e l β -asparagine, condotte dal prof. Sergio Berlingozzi e collaboratori, avevano portato, fino al 1946 ⁽¹⁾, alla constatazione di lievi differenze in alcune proprietà fisiche dei due aminoacidi. Poichè tali differenze potevano anche far supporre che ci si trovasse davanti a due composti non riferibili a tipici antipodi ottici, sorse la necessità di alcune indagini strutturali che portassero possibilmente un contributo chiarificatore alla dibattuta questione.

Nell'anno 1946 il prof. Berlingozzi affidava perciò al prof. P. Gallitelli — allora Direttore dell'Istituto di Mineralogia della Università di Pavia — alcuni cristalli di d e l β -asparagina affinché venissero eseguite alcune ricerche con il roentgengoniometro di Weissenberg.

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) S. BERLINGOZZI, *Ricerche sugli aminoacidi rotatori*. Nota IX. « Atti Soc. Nat. Matem. Modena », vol. 77, Modena, 1946.

I risultati delle ricerche, da me condotte negli anni 1946 e 1947 nell'Istituto di Mineralogia della Università di Pavia, furono comunicati al prof. Berlingozzi, che li riportò nell'ultimo suo lavoro insieme ai dati relativi ad altre proprietà da lui studiate, che lo portarono a confermare per i due stereoisomeri la qualifica di antipodi ottici ⁽²⁾.

Con un voluto ritardo, imputabile alla opportunità di non pubblicare per esteso i dati ottenuti senza un ulteriore sviluppo delle indagini, presento ora notizie precise e complete sui risultati allora raggiunti.

Come è noto, scarse sono fino ad ora le notizie sulla struttura delle β -asparagine. Le prime ricerche roentgenografiche, furono infatti condotte nel 1915 da Haga e Jaeger ⁽³⁾ su cristalli della forma levogira. Con l'esame di spettrogrammi di Laue, ottenuti da lamine tagliate parallelamente a (100) ed a (001), questi Autori confermarono l'appartenenza dei cristalli al sistema rombico, in accordo con quanto era già noto dalle precedenti ricerche cristallografiche ⁽⁴⁾.

Successivamente Bernal ⁽⁵⁾ da una serie di spettrogrammi del cristallo oscillante ottenuti verosimilmente su individui della forma l , giunse a stabilire le dimensioni della cella elementare $a = 5,6 \text{ \AA}$ $b = 11,8 \text{ \AA}$ $c = 9,86 \text{ \AA}$ ed il numero di molecole in essa contenute $N = 4$. Considerazioni, sia sulla lunghezza dei legami fra gli atomi di C, O, N, sia sul comportamento ottico dei cristalli, condussero il Bernal ad ammettere per l'asparagina una molecola di forma anulare, differente cioè da quella più probabile per l'acido aspartico.

Infine, ricerche eseguite nel 1942-1943 col metodo Debye-Scherrer nell'Istituto Chimico della Università di Bologna ⁽⁶⁾ portarono a stabilire la quasi perfetta identità degli spettrogrammi delle polveri ottenute dalle forme d e l della β -asparagina.

Le presenti ricerche sono state eseguite su cristalli di d e l β -asparagina idrata messi gentilmente a mia disposizione dal prof. S. Berlingozzi. Essi si presentano allungati secondo l'asse delle x e tabulari parallelamente a (001): le loro dimensioni non superano $2 \times 1 \times 0,8$ mm. sono incolori, trasparentissimi, ed anche all'osservazione microscopica non mostrano inclusioni o eterogeneità. Le forme presenti sono quelle più comuni per l'asparagina, cioè, in ordine di decrescente sviluppo, {001} {110} {021} oltre ai bisfenoidi {111} e $\{1\bar{1}1\}$ che compaiono rispettivamente nei cristalli destri e sinistri.

Per l'esecuzione degli spettrogrammi con i raggi X si sono scelti cristalli il più possibile equidimensionali, per evitare i dannosi effetti di un ineguale assorbimento dei raggi X nelle diverse direzioni. Mentre è stato facile disporre di

(2) S. BERLINGOZZI, A. CANDELI, G. SARCHI, *Ricerche sugli aminoacidi rotatori*. — X. *Proprietà delle β -asparagine*. «Gazzetta Chimica Italiana», vol. 79, p. 30, 1949.

(3) F. M. JAEGER, H. HAGA, *Over de Symmetrie der Röntgenbeelden van Rhombische Krystallen*. «K. Akad. Wetenschappen. Verslag der Afd. Naturk.», vol. XXIV, p. 472. Amsterdam, 1915.

(4) P. GROTH, *Chemische Krystallographie*, vol. III, p. 278, Leipzig, 1910.

(5) J. D. BERNAL, *The Crystal structure of the Natural Amino Acids and Related Compounds*. «Zeit. Kryst.», vol. 78, p. 363. Leipzig, 1931.

(6) A. M. TOMBA, *Tesi di Laurea in chimica*. Univ. di Bologna, 1943.

individui ugualmente sviluppati secondo gli assi y e z per eseguire gli spettrogrammi intorno all'asse $[100]$, si sono incontrate difficoltà per ottenere cristalli equidimensionali lungo le coppie di assi x e z ed x e y . Dato il prevalente allungamento secondo l'asse x si è ridotta la lunghezza dei cristalli, usati per gli spettrogrammi intorno agli assi $[010]$ e $[001]$, sciogliendo la parte eccedente in acqua: ogni cura è stata posta per non danneggiare con questa operazione le facce delle zone $[010]$ e $[001]$ che dovevano servire all'esatta orientazione dei cristalli.

Tutti gli spettrogrammi sono stati eseguiti con una camera di 57,3 mm. di diametro, utilizzando la radiazione $\text{Cu}_{K\alpha}$. I risultati ottenuti dagli spettrogrammi del cristallo rotante sono riportati nella seguente tabella:

Asparagina destrogira					Asparagina levogira				
Asse di rotazione	n.	2 e mm.	I in Å	Media	n.	2 e mm.	I in Å	Media	
[010]	1	7,7	11,56	11,662	1	7,7	11,56	11,665	
	2	15,7	11,66		2	15,6	11,72		
	3	24,7	11,67		3	24,6	11,70		
	4	35,4	11,71		4	35,6	11,67		
	5	50,0	11,71		5	50,2	11,68		
[001]	1	9,5	9,40	9,58	1	9,4	9,39	9,60	
	2	19,5	9,55		2	19,2	9,66		
	3	31,2	9,66		3	31,2	9,66		
	4	47	9,71		4	47,3	9,66		
[100]	1	16,8	5,46	5,46	1	16,9	5,45	5,46	
	2	39	5,46		2	39	5,46		

Risulta dunque dagli spettrogrammi eseguiti col metodo del cristallo rotante che le celle delle *d* e *l* asparagine hanno dimensioni praticamente identiche, rientrando le differenze osservate entro i limiti degli errori sperimentali. Buon accordo si ha con i valori di Bernal sopra riportati.

I rapporti parametrici che si calcolano dalle lunghezze dei lati della cella elementare sono:

$$\text{asparagina destrogira} \quad a : b : c = 0,4681 : 1 : 0,8212$$

$$\text{asparagina levogira} \quad a : b : c = 0,4682 : 1 : 0,8232$$

assai vicini al rapporto stabilito da Miller, in base a misure goniometriche, e generalmente accettato $a:b:c = 0,4737:1:0,8327$.

Note le dimensioni del parallelepipedo elementare, il volume molecolare e il peso specifico (1,543) della asparagina, è possibile confermare il numero delle molecole contenute nella cella elementare $N = 4$ trovato da Bernal.

Altri dati sperimentali si sono ottenuti con l'esecuzione di spettrogrammi di Weissenberg su cristalli delle forme destro- e levogira, intorno a $[100]$ $[010]$ $[001]$. Per ogni asse di rotazione si sono eseguiti spettrogrammi, sia dello strato equatoriale, sia del I e del II strato spettrale. Complessivamente, cioè, 9 spettrogrammi per la forma destro- ed altrettanti per quella levogira.

La simboleggiatura degli spettrogrammi è stata eseguita per tutte le macchie di interferenza usando il metodo di Schneider. Per brevità non riporto qui le tabelle con i dati raccolti, riservandomi di farlo in un successivo e più completo lavoro sulla struttura delle asparagine. Ricordo solo che nei 9 spettrogrammi della forma destrogira compaiono complessivamente circa 400 interferenze che si ritrovano nei corrispondenti spettrogrammi della forma levogira.

Dalla statistica dei simboli delle interferenze, risultano presenti tutte le combinazioni di indici pari e dispari, esclusi (dOO) (OdO) (OOd) . Le estinzioni di queste interferenze permangono quand'anche si compiano le permutazioni degli indici xyz in zxy , yzx , yxz , xzy , zyx . Ciò porta a concludere che:

1° il reticolato della asparagina è un reticolo semplice;

2° il gruppo spaziale è $D_2^4 - P2_1 2_1 2_1$.

La stima delle intensità relative delle interferenze presenti nei Weissenberg $[100]$ $[010]$ $[001]$ equatore e I e II strato spettrale è stata eseguita per confronto a vista con una scala ottenuta col metodo di de Lange, Robertson e Woodward⁽⁷⁾. Si sono per questo eseguiti spettrogrammi esponendo contemporaneamente 3 pellicole sovrapposte nella medesima camera di Weissenberg. Determinato il coefficiente di indebolimento delle interferenze nella I, II, III pellicola si è ottenuta, dalle misure eseguite con un fotometro Kipp und Zonen autoregistratore, una scala di 15 valori che hanno servito per la stima delle intensità di tutte le interferenze presenti negli spettrogrammi.

Da queste misure risulta che le interferenze aventi il medesimo simbolo presentano, negli spettrogrammi delle d e delle l asparagine idrate, intensità che scartano al massimo del 7-12%; e sono perciò da considerarsi corrispondenti entro i limiti di precisione del metodo utilizzato.

(7) J. J. DE LANGE, J. M. ROBERTSON, I. WOODWARD, «Proc. Roy. Soc. A.», vol. 171, p. 398. London, 1939.

Zoologia. — *La castrazione parassitaria nei Rizocefali ad opera dei Liriopsidi* (*). Nota di GIORGIO M. BAFFONI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Come è noto da numerosi lavori, la « castrazione parassitaria », nei Crostacei, è caratterizzata dall'atrofia dell'ovario nelle femmine e dalla femminilizzazione dei c. s. s. nei maschi. Discussa è la mascolinizzazione dei c. s. s. femminili. Per ciò che riguarda le gonadi maschili, poi, mentre alcuni Autori ne hanno constatato l'atrofia (Giard 1887, Mouchet 1931, Hiraiwa e Sato 1939) o la degenerazione istologica (Potts 1906, Shjino 1931, Okada e Miyashita 1935, Veillet 1945), altri vi hanno trovato la più grande variabilità: dalla normalità ad una maggiore o minore degenerazione (Smith 1906, Tucker 1930, Callan 1940, Baffoni 1949), mentre altri ancora non hanno rilevato alcuna modificazione (Potts 1915, Courrier 1921, Sansin 1938, Reinhard 1942).

Una condizione quasi unica per esaminare l'effetto esercitato dal parassita sulle gonadi maschili e sulle gonadi femminili nello stesso individuo, e quindi nelle stesse condizioni, è offerta dai Rizocefali che sono crostacei ermafroditi (Lilljeborg 1862, Giard 1887) e parassitati dai Liriopsidi (Giard 1873, Fraisse 1878).

L'unico A. che si è occupato dell'argomento, a quanto mi consta, è stato Caullery (1907, 1908) il quale, studiando le modificazioni presentate da *Drepanorchis* (*Sacculina*) *neglecta* (Fraisse) e da *Pellogaster curvatus* (Kossmann), rispettivamente parassitati da *Danalia curvata* (Fraisse) e da *Liriopsis monophthalma* (Fraisse), ha stabilito quanto segue:

a) *Liriopsis* parassita il suo ospite solo durante il periodo del proprio accrescimento (vita intrapalleale), *Danalia*, invece, è un parassita permanente;

b) le forme larvali criptoniscidi bloccano la muta dell'ospite e causano la regressione dei suoi ovociti in vitellogenesi;

c) gli ovari si impoveriscono progressivamente di ovociti: nei casi in cui il parassita è adulto non si rinvencono uova nella cavità incubatrice dell'ospite, però, mentre *Pellogaster*, terminato il periodo di parassitazione, restaura l'ovario e produce una nuova poussée di ovociti, *Drepanorchis* presenta un ovario in completa degenerazione.

Nulla l'A. riferisce a proposito delle modificazioni dei testicoli.

(*) Ricerca eseguita usufruendo di una Borsa di Studio del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Mi sia permesso di esprimere la mia profonda riconoscenza al prof. G. Reverberi, Direttore del Centro di Studio per la Biologia del C. N. R., che lo diresse e revisionò, al prof. R. Dohrn, Direttore della Stazione Zoologica, al prof. E. Caroli, al dott. G. Bacci ed al personale della Stazione Zoologica, per le premure e la benevolenza usatemi durante il mio lungo soggiorno a Napoli. Il lavoro fu ultimato e redatto nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Cagliari.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

Il materiale utilizzato per i rilievi istologici è costituito da 18 *Peltogaster curvatus* normali e 9 parassitati, e da 27 *Drepanorhynchus neglecta* indenni e 12 parassitate. Le gonadi, fissate in Bouin ed isolate al binoculare, furono disidratate nella serie alcool-olio di anilina; le sezioni furono colorate con Mallory-Azan o con ematossilina di Heidenhain o con Unna-Pappenheim.

Gli animali furono pescati nei mesi invernali (dicembre-marzo) degli anni 1946-1949; su 16.000 individui complessivamente esaminati si rinvennero:

	indenni	parassitati
<i>Peltogaster curvatus</i> (su <i>Eupagurus prideuxii</i>)	1%	0,04%
<i>Peltogaster curvatus</i> (su <i>Eupagurus excavatus</i>)	9%	0,37%
<i>Drepanorhynchus neglecta</i> (su <i>Inachus dorsettensis</i>)	23%	2,41%

LE GONADI DEI RIZOCEFALI.

A) L'**ovario** occupa la quasi totalità della massa viscerale dei Rizocefali, ed è costituito da due masse lobate, accollate nella porzione mediana e che immettono, mediante due corti ovidutti, nell'atrio genitale; le uova fecondate vengono spinte nella cavità del mantello (cavità incubatrice) in cui si sviluppano. Stante la trasparenza dei tegumenti dei Rizocefali, le uova in vitellogenesi ed in via di sviluppo conferiscono all'animale la caratteristica colorazione (aranciata in *Peltogaster* e giallo-pallida in *Drepanorhynchus*), che è molto simile a quella delle uova mature dell'ospite. Dalle uova schiudono i nauplius, dopo uno (Delage 1884) o due mesi (Day 1935), che fuoriescono dall'apertura del mantello; dopo l'emissione dei nauplius, il rizocefalo muta: la cuticola esterna del mantello si distacca e trascina seco, sfilandolo, il rivestimento interno della cavità incubatrice; dopo uno o due giorni nella cavità incubatrice viene deposto un altro lotto di uova.

I lobi dell'ovario sono tappezzati internamente da epitelio germinativo dal quale proliferano i giovani ovociti: piccole cellule di 6,5 μ (in *Peltogaster*) 4,2 μ (in *Drepanorhynchus*) di diametro, con citoplasma granuloso ed intensamente basofilo (ricco di RNA), con un grosso nucleo di 4,3 μ (*Peltogaster*) 3,2 μ (*Drepanorhynchus*) di diametro, la cui cromatina si presenta nei primi stadi profasici. Come aveva fatto notare Caullery, gli ovociti si rinvenivano accoppiati a due a due e vengono avvolti insieme dalle cellule follicolari provenienti dai setti connettivali interposti tra le pliche dell'epitelio germinativo; uno solo dei due ovociti raggiunge la maturità. Gli ovociti seguono il normale ciclo della vitellogenesi e, in uno stesso individuo, si rinvenivano tutti allo stesso stadio di maturazione: durante il primo stadio di accrescimento perdono gradualmente la carica di RNA; nel loro nucleo la cromatina si spezzetta in zolle che migrano verso la membrana, vi si accollano, si riducono, ed infine scompaiono del tutto mentre al centro si differenzia un voluminoso nucleolo; al termine del primo periodo di accrescimento nel citoplasma

di uno dei due ovociti gemelli compaiono pochi ma grossi vacuoli (sostanze grasse?) che in breve si riempiono di granuli di tuorlo; l'altro ovocita invece regredisce, perde il nucleolo, il suo nucleo diventa picnotico, poi cromofobo ed infine scompare, il citoplasma infine vacuolizza e la membrana contigua all'ovocita gemello scompare. All'inizio del secondo periodo di accrescimento l'ovocita misura $40\ \mu$ (*Peltogaster*) $22\ \mu$ (*Drepanorchis*), il suo nucleo $14\ \mu$ (*Peltogaster*) $9\ \mu$ (*Drepanorchis*) ed il nucleolo $4\ \mu$; quindi il citoplasma si carica di grosse sferule di vitello, il nucleo perde la sua forma sferoidale e si raggrinza, il nucleolo si rimpiccolisce e l'ovocita raggiunge la maturità. Tra gli ovociti prossimi alla maturazione si notano i piccoli ovociti della deposizione successiva.

B) I testicoli si presentano come due corpi simmetrici, di aspetto traslucido, situati ai lati della massa viscerale e più o meno accollati tra di loro. In essi si distinguono tre porzioni:

a) il deferente: tubulo più o meno lungo, talora spiralato, costituito da un rivestimento epiteliale piatto mono- o bistratificato e da un epitelio cilindrico che determina il lume interno e che secerne chitina; il lume è ostruito dalla chitina eccetto quando gli ovociti hanno raggiunto la loro maturità: in tal caso vi si rinvenivano gli spermatozoi;

b) la porzione intermedia: è la continuazione del deferente che aumenta di diametro e di spessore; l'epitelio interno perde la sua attività secretrice, si ispessisce e si estende in superficie solcandosi in pieghe sempre più profonde; l'epitelio esterno diviene più appiattito e stratificato; la porzione intermedia termina con una plica più accentuata, circolare, nel cui epitelio si osservano numerose mitosi e che comunica, mediante uno stretto passaggio, con

c) la porzione ghiandolare: questa è costituita da un rigonfiamento di varia forma, a fondo cieco; le sue pareti sono la continuazione degli epiteli della porzione intermedia; gli strati esterni si appiattiscono ulteriormente ed assumono un aspetto spugnoso e infine fibroso; nell'interno della cavità, più o meno distaccato dalle pareti, è l'epitelio germinativo, costituito da un rivestimento monostratificato di cellule rotonde che in *Peltogaster* misurano $6,5\ \mu$ di diametro, molto basofile, provviste di un grosso nucleo ($4,3\ \mu$), in cui si distingue un nucleolo: da queste cellule, molto simili a quelle dell'epitelio germinativo dell'ovario, proliferano gli elementi che compiono la loro maturazione nell'interno della cavità. Stante la piccolezza delle cellule e la compattezza dei cromosomi, è impossibile seguire dettagliatamente le varie fasi maturative; dagli elementi dell'epitelio germinativo si hanno gli spermatozoi di I ordine ($4,5\ \mu$ di diametro); dagli spermatozoi di II ordine ($3,5\ \mu$) si hanno gli spermatidi ($2,5\ \mu$) dai quali, originano gli spermatozoi⁽¹⁾; questi, come è caratteristico nei Cirripedi, presentano una lunga testa filamentosa ed una corta coda. Insieme agli elementi germinali in maturazione, nella cavità, si presentano grosse cellule provenienti dalla porzione intermedia della gonade, che si ammassano nella parte più alta della cavità, presso la comunicazione con la

(1) In *Drepanorchis* i protogoni misurano $4,3\ \mu$; gli spermatozoi I, $3\ \mu$; gli spermatozoi II, $2\ \mu$; gli spermatidi $1,5\ \mu$.

porzione intermedia e che, nel corso della spermiogenesi, degenerano; probabilmente sono elementi a funzione trofica. Nella cavità della porzione ghiandolare dei testicoli, normalmente si rinviene solo una piccola quantità di elementi in maturazione, tutti allo stesso stadio maturativo ed in vicinanza dell'epitelio germinativo; gli spermatozoi maturano contemporaneamente alle uova. Secondo Delage (1884) e Smith (1906) le prime cellule germinali originano dalla porzione intermedia in *Drepanorchis* e *Sacculina*, dal fondo cieco della porzione ghiandolare in *Peltogaster*.

EFFETTI DEL PARASSITISMO DA LIRIOPSIDI SUI RIZOCEFALI.

I. Annotazioni biologiche.

A) Nei mesi gennaio-febbraio non è infrequente osservare dei criptoniscium di *Danalia*, in numero vario (da uno a una diecina), attaccati al mantello di *Drepanorchis*, generalmente in prossimità del peduncolo, o direttamente attaccati sui primi segmenti addominali di *Inachus*; essi in due giorni mutano, perdono le appendici ed entrano in contatto con il sistema radicale del Rizocefalo. Gli effetti dei criptoniscium passano inosservati: l'ospite non muta, ma continua a sviluppare i propri embrioni nella cavità del mantello: ho infatti osservato questo fenomeno in una *Drepanorchis* parassitata da due *Danalia* di mm. 4 di lunghezza ed in un'altra parassitata da *Danalia* adulta di 8 mm. Quando *Danalia* ha raggiunto la propria maturità (secondo Caullery dopo 40 giorni dalla muta) si notano le più vistose modificazioni nell'ospite: il mantello, a causa del blocco delle mute e della progressiva riduzione della massa viscerale in seguito all'atrofia dell'ovario, diviene opaco, si ispessisce ed assume una colorazione bruna sempre più carica; l'ovario si impoverisce di vitello ed infine si riduce ad una membranella lassa e trasparente. I testicoli non presentano modificazioni di rilievo: conservano le dimensioni, il turgore e gli aspetti normali; ma vi è di più: mentre in circa il 25% di *Drepanorchis* indenni uno dei due testicoli è atrofico, nei parassitati essi sono di eguali dimensioni ed apparentemente in pari stadio di sviluppo, forse mancando la compressione meccanica esercitata su di essi dall'ovario maturo.

B) *Liriopsis* non è un parassita del sistema radicale dell'ospite Rizocefalo; allo stadio di criptoniscium penetra nella cavità incubatrice di *Peltogaster* e si rinviene tra i pacchetti di uova che ivi si sviluppano. L'azione di *Liriopsis* su *Peltogaster*, se di minor durata, è però più drastica ed immediata che quella di *Danalia* su *Drepanorchis*; parassitato da una giovane femmina di *Liriopsis*, *Peltogaster* perde già il suo turgore e si riduce in grandezza; il mantello si ispessisce, si affloscia e si solca di rughe trasversali: esso non perde la sua trasparenza, però, anzi assume la colorazione rosso-granato della sua linfa, come nei *Peltogaster* immaturi. Secondo Caullery, *Liriopsis* maturo non deve considerarsi parassita, ma inquilino del Rizocefalo; in tre *Peltogaster* che presentavano le caratteristiche cicatrizzazioni dovute al distacco dell'epicarideo, ho notato ovari in vitellogenesi ed in uno di essi uova di recente deposte nella cavità incubatrice. I testicoli di *Peltogaster* non presentano

segni di alterazioni: in tre casi, anzi, ho annotato che apparivano più sviluppati e turgidi che negli animali indenni.

II. — Rilievi istologici.

A) Negli ovari di *Drepanorchis* parassitate da giovani *Danalia*, il primo fenomeno che appare è l'aumento della linfa circolante. Negli ovociti in vitellogenesi si nota la perdita del vitello che lascia ampi vuoti nella cellula: in seguito a ciò questa regredisce e cade in degenerazione; talvolta gli ovociti permangono per un certo tempo come elementi giganti (160 μ di diametro) dal citoplasma fibroso e con un grosso nucleo (120 μ) vescicoso, carico di zolle siderofile o attraversato da un alone grigiastro, ellittico, che occupa circa la metà della sua area. Non tutti gli ovociti degenerano contemporaneamente, anzi l'aspetto caratteristico della gonade di un Rizocefalo parassitato è nel rinvenimento di ovociti di diversa grandezza e di diverso aspetto in uno stesso ovario. Negli ovociti in primo stadio di accrescimento la degenerazione inizia con la formazione di un vacuolo citoplasmatico che gradatamente aumenta di volume spostando e comprimendo il nucleo contro la membrana cellulare; questa infine si lacera, il nucleo diventa picnotico e in breve tutta la cellula si citolizza. Quando *Danalia* ha raggiunto la maturità, dell'ovario non resta che l'epitelio germinativo, le cui cellule presentano vacuolizzazioni notevoli e che non sempre rivestono completamente i setti connettivali ipertrofizzati; nell'interno dei lobuli restano residui di elementi degenerati. Non sembra che vi sia un rapporto tra la durata dell'azione parassitaria e l'intensità degli effetti degenerativi: a volte, infatti, l'ovario di *Drepanorchis* parassitato da *Danalia* matura si presenta meno danneggiato di quello parassitato da un giovane epicarideo.

Nei testicoli di *Drepanorchis* parassitate non si notano tracce di degenerazione: deferente, porzione intermedia e ghiandolare presentano una regolare disposizione, un normale numero di mitosi dei propri elementi e tutti i fatti che si osservano nei testicoli degli animali indenni; nella cavità l'epitelio germinativo è sempre ben conservato; la formazione degli elementi in maturazione è particolarmente abbondante: essi occupano quasi tutta la cavità e, particolare degno di nota e che non si verifica nelle gonadi degli animali indenni, si presentano in tutti gli stadi di maturazione, da spermatogoni a spermatozoi.

B) Negli ovari di *Pellogaster*, conformemente a quanto è stato notato all'esame macroscopico, la degenerazione assume un ritmo molto più accelerato: anche qui gli ovociti in vitellogenesi perdono il tuorlo e degenerano, ma senza dar luogo ad elementi giganti; gli ovociti nel primo stadio di accrescimento si vacuolizzano, presentando però numerosi vacuoli invece che uno solo; anche qui il connettivo interlobulare si ipertrofizza, ma l'epitelio germinativo non appare compromesso. Come in *Drepanorchis*, così in *Pellogaster* si è notato che vi è un diverso grado di degenerazione nelle varie zone dell'ovario. In due *Pellogaster* parassitati da *Liriopsis* mature, l'ovario si presentava ancora molto danneggiato ed involuto, in essi però non si notavano fenomeni degenerativi in atto. In un *Pellogaster* di

mm. 9, parassitato da *Liriopsis* prossima a deporre, si rinvenivano alcuni ovociti in via di sviluppo ancora non riassorbiti.

Per ciò che riguarda i testicoli di *Peltoaster* parassitati, essi attestano la normalità morfologica e funzionale: la spermatogenesi e la spermiogenesi non sono affatto alterate, anzi, come in *Drepanorchis*, rispetto agli animali indenni di egual dimensioni e raccolti nello stesso periodo, sembrano intensificate. In un *Peltoaster* con traccia di precedente infestazione ed i cui ovari erano prossimi a maturare, si sono rinvenuti spermatozoi nel deferente: ciò dimostra la completa restaurazione morfologica e fisiologica dell'apparato riproduttore dopo la parassitazione.

CONCLUSIONI. - Gli effetti dei Liriopsidi sulle gonadi dei Rizocefali sono:

1° degenerazione progressiva dell'ovario e dei suoi elementi, con ritmo ed aspetto particolari, a seconda delle diverse specie-ospiti e dei diversi individui della stessa specie;

2° normalità morfologica delle gonadi maschili, anzi talora un maggior grado di attività funzionale.

BIBLIOGRAFIA.

- BAFFONI G. M., 1949, « Arch. Ocean. Limnol. », 5°.
 CALLAN H. G., 1940, « Journ. exp. Biol. », 17°.
 CAULLERY M., 1907, « C. R. Soc. Biol. », 62°.
 CAULLERY M., 1908, « Mitth. Zool. Stat. Neapel », 18°.
 COURRIER R., 1921, « C. R. Ac. Sci. », 173°.
 DAY J. H., 1935, « Q. Journ. micr. Sci. », 77°.
 DELAGE Y., 1884, « Arch. Zool. Exper. », 2°.
 DUBOSCQ O., 1901, « Arch. Zool. Exper. », 9°.
 GIARD A., 1873, « C. R. Ac. Sci. », 77°.
 GIARD A., 1887, « Bul. Sci. Dép. Nord », 10°.
 GIARD A., 1887, « C. R. Ac. Sci. », 104°.
 FRAISSE P., 1878, « Arb. Zool. Inst. Würzburg », 4°.
 HIRAIWA e SATO, 1939, « Journ. Sci. Hiroshima Univ. », 7°.
 KOSSMANN R., 1874, « Arb. Zool. Inst. Würzburg », 1°.
 LILLJEBORG W., 1862, « N. Ac. Soc. Sci. Upsalensis », 3°.
 MOUCHET S., 1931, « Ann. Océan. Salammbô », 6°.
 OKADA e MIYASHITA, 1935, « Mem. Coll. Sci. Kyoto Imp. Univ. », 10°.
 POTTS F. A., 1906, « Q. Journ. micr. Sci. », 50°.
 POTTS F. A., 1915, « Pubbl. Mar. Biol. Carnegie Inst. », 8°.
 REINHARD E. G., 1942, « Biol. Bull. », 83°.
 SANSIN H., 1938, « C. R. Soc. Biol. », 127°.
 SHJINO M. S., 1931, « Mem. Coll. Sci. Kyoto Imp. Univ. », 7°.
 SMITH G., 1906, *Fauna u. Flora d. Golfes v. Neapel*. 29° Monographie.
 TUCKER B. W., 1930, « Q. Journ. micr. Sci. », 74°.
 VEILLET A., 1945, « Th. Fac. Sci. Univ. Paris ».

Biologia. — *Sui problemi generali del differenziamento e della involuzione indagati su un determinato elemento nervoso* (*). Nota di ALBERTO STEFANELLI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Il problema dei fattori causali del differenziamento cellulare è uno dei basilari della Istologia e della Embriologia, ma l'estrema difficoltà dell'indagine non aveva permesso di portarlo su un campo concreto di ricerca. Con la scoperta di Spemann degli organizzatori e con l'introduzione dei concetti di determinazione, innumerevoli lavori hanno chiarito in termini causali molti fenomeni della morfogenesi, cioè del differenziamento riferito ad organi o a campi cellulari più o meno estesi. Ma solo poche notizie frammentarie sono qua e là apparse sulla determinazione istogenetica, cioè sui fattori che inducono uno specifico destino ad un dato elemento cellulare.

Nel caso specifico delle cellule nervose o meglio, considerando anche l'insieme dei prolungamenti, dei neuroni, il problema si presentava ancor più complesso poichè, pur raggiungendo col differenziamento tutte le cellule nervose dei caratteri strutturali comuni o generali, esse venivano ad acquisire anche dei caratteri del tutto peculiari o particolari tali dal renderle tra loro dissimili e, in certi casi, ad un punto tale da rendere possibile il riconoscimento di un singolo neurone tra la moltitudine degli altri di un animale. È questo il caso tipico delle cellule di Mauthner degli Ittiopsidi di cui da anni mi vado occupando e con criteri anatomo-comparativi, morfologici, morfo-ecologici, fisiologici e sperimentali (1).

Tenendo conto dell'elevato grado di differenziamento di questo elemento e traendo vantaggio oltre che della sua presenza nelle larve degli Anfibî anuri (materiale sperimentale ottimo), della sua precoce differenziazione e della facile localizzazione in stadi anche precocissimi, ho potuto portare su un piano sperimentale, integrando il metodo embriologico con quello istologico, i problemi della determinazione istogenetica; così per la prima volta, con queste mie ricerche, si è fatto uno studio sperimentale sulla determinazione e sul differenziamento di di un singolo neurone.

Da numerose ricerche era risultato che il differenziamento istologico si potesse attuare anche indipendentemente da ogni morfogenesi: il metodo dei trapianti in condizione di isolamento, quello degli espianti e delle culture *in vitro* mi hanno dimostrato come frammenti embrionali, isolati dopò un certo stadio, si differenziassero istologicamente senza che le cellule si organizzassero in qualche struttura superiore. Le mie esperienze di isolamento della cellula di Mauthner

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della Università di Cagliari e nell'Istituto di Anatomia Comparata di Roma.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) Vedi il mio primo lavoro anatomo-comparativo sui Ciclostomi in « Arch. Zool. It. », vol. XX, 1934 e per la successiva bibliografia la Memoria in questa Accademia, ser. VIII, vol. I, fasc. 2, 1947 e il lavoro in « Riv. di Biol. », vol. XLII, 1949.

della *Rana* dimostrano come l'estrinsecazione del differenziamento specifico si ottenga solo isolando la cellula dopo uno stadio definito (per questa cellula lo stadio 12 di Harrison) e come tale specifico differenziamento non solo identifichi una cellula nervosa, ma le particolari condizioni morfologiche di una cellula di Mauthner. È evidente che in quel momento dello sviluppo la cellula embrionale che viene ad occupare quella peculiare sede, ad opera di particolari attività, viene a ricevere un impulso per il differenziamento secondo una via particolare e come questo destino si venga ad attuare anche se la cellula successivamente, ad opera sperimentale, venga isolata da ogni altra possibile azione direttiva. Al momento della determinazione istogenetica, che dalle mie esperienze risulta essere diverso per le varie cellule nervose, secondo una caratteristica distribuzione nel tempo, la cellula acquisisce intrinsecamente la specifica qualità che la rende ormai, sebbene apparentemente ancora non lo sia (differenziamento invisibile), diversa dalle altre. È questo il fattore ereditario considerato teoricamente da Herrick (1925, 1937)⁽²⁾. La cellula in queste condizioni, trapiantata altrove o isolata, manifesta irrevocabilmente la propria specifica natura.

È risultato dalle mie ricerche sulla cellula di Mauthner della *Rana* come il fenomeno della determinazione istogenetica si attui in un tempo che può essere considerato come il susseguirsi di due atti, la cui attività ha potuta essere da me sperimentalmente discriminata. Nel primo atto la cellula neurale embrionale acquisisce i caratteri della cellula nervosa che sono comuni a tutte le cellule nervose (isolando le cellule a questo stadio si differenziano con caratteri nervosi generali); nel secondo atto le vengono attribuiti i caratteri particolari per cui, differenziandosi, assume grandezza, forma e caratteristiche strutturali del tutto particolari. Isolando la cellula a questo stadio, pur con quelle alterazioni provocate dalle nuove condizioni, manifesta sempre la propria particolare natura.

I due atti successivi della determinazione istogenetica sono stati da me definiti quali *determinazione istogenetica generale* e *determinazione istogenetica particolare*.

Tuttavia, se dalle mie numerose esperienze questa « eredità » del differenziamento risulta incontestabile, risulta altresì che fattori successivi di varia natura hanno la loro interazione; sperimentalmente l'azione abnorme di fattori estranei o la eliminazione di quelli normali, pur senza distruggere l'intrinseca natura, vengono ad alterare il normale aspetto del neurone in esame. Fattori trofici, meccanici, di spazio, e fattori funzionali sia intrinseci del neurone stesso, sia estrinseci, provocati dalla attività di elementi attorno alla cellula o più o meno lontano, intervengono in questo processo.

Lo studio del neurone mauthneriano con criterio comparativo-ecologico mi ha permesso di constatare come il suo differente grado di complicazione strutturale e il conseguente aspetto, sia nelle varie specie condizionato al vario grado di attività collegata con l'ecologia, ovvero ai rapporti funzionali dell'animale con il particolare ambiente. Questa ricerca trova la sua base nel significato morfologico e funzionale del neurone di Mauthner come è risultato dalle ricerche di

(2) C. J. HERRICK, «Anat. Rec.», 23, 291 (1922); «Physiol. Rev.», 5, 112 (1925); «J. Comp. Neur.», 67, 381 (1937).

Tagliani (1905), di Beccari (1907), di Barthelmez (1915) e da quelle mie, iniziate con criterio anatomico-comparativo nel 1934 sui Ciclostomi e proseguite poi sino ad oggi sui Teleostei e gli Anfibi (3).

Considerando il grado del differenziamento del neurone mauthneriano negli Ittiopsidi appare come esso sia massimo nei Teleostei e minore negli Anuri, con condizione intermedia negli Urodeli.

Nei Teleostei troviamo la massima complicazione del sistema sinaptico col corpo cellulare e la fibra, rappresentato del canestro pericellulare di Beccari (1907), dall'*axon-cap* di Bartelmez (1915) e dagli *endig clubs* di Marui (1948) e Bodian (1930) oltre alle sinapsi asso-assoniche lungo la fibra (fig. 1). Queste connessioni rendono evidente la complessità funzionale di tale neurone in questi animali (4).

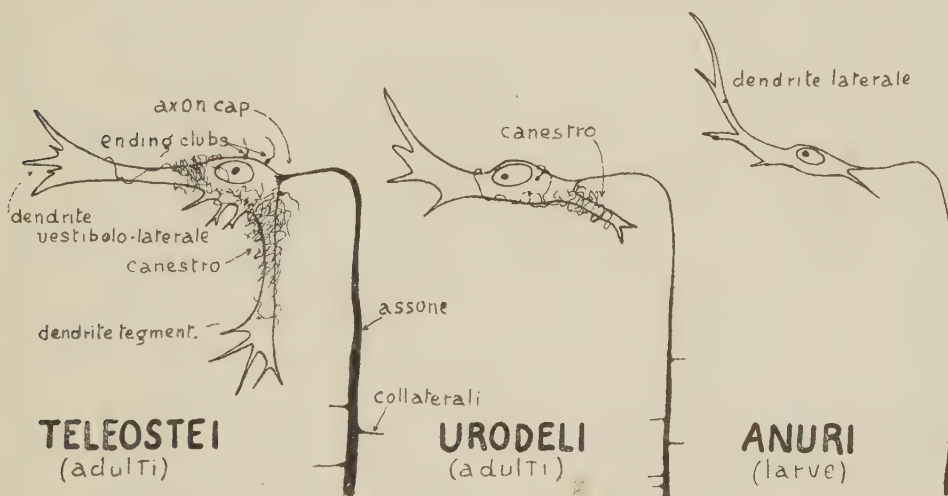


Fig. 1. -- I neuroni di Mauthner negli Ittiopsidi (schematicamente).

Negli Urodeli, come risulta da osservazioni di Herrick (1914), Detwiler (1927) Leghissa (1941) ed altri v'è solo un canestro pericellulare con bottoni terminali (fig. 1) ma, probabilmente (e con mie osservazioni in corso spero di chiarirlo), vi saranno differenze tra le forme perennibranchiate e quelle terragnole. La fibra di Mauthner degli Urodeli presenta collaterali e sinapsi asso-assoniche come nei Pesci. Negli Anuri invece (fig. 1), come ho potuto osservare, il canestro è ridottissimo o assente e così manca ogni altra sinapsi sopra descritta e i rapporti si attuano solo con i dendriti di cui il maggiore si collega con l'area della linea laterale, raggiungendo l'isola dorsale di Kingsbury.

Questa condizione di semplicità dell'apparato mauthneriano degli Anfibi Anuri è stata favorevole per la ricerca morfo-ecologica da me compiuta, permettendomi

(3) Vedi nota 1.

(4) In modo schematico giungono alla cellula: tramite il canestro: impulsi vestibolari, dal nucleo principale del trigemino, dal tratto cerebello tegmentale; tramite l'*axon-cap*: impulsi radi-colari vestibolari, dal mesencefalo e dal fascicolo longitudinale mediale; dai centri vestibolari tramite gli *endig clubs*. Gli stimoli della linea laterale vengono percepiti direttamente dal *dendrite laterale*, connesso all'area laterale.

per questa via di chiarire il significato funzionale del sistema nella sua condizione più elementare quale sistema di coordinamento del movimento della coda nella natazione sotto il controllo diretto della linea laterale e secondariamente vestibolare. Nei Teleostei, invece, la complessità delle connessioni rivela la partecipazione anche di altre attività.

Così, con la mia ricerca morfo-ecologica sugli Anfibi Anuri, è risultato come non solo l'atrofia della coda e della linea laterale, come avviene con la metamorfosi, provochi l'involuzione dei neuroni di Mauthner, ma come ciò avvenga anche se solo uno dei due apparati venga a mancare, come nello *Xenopus laevis* dove la linea laterale rimane e si sviluppa ulteriormente anche dopo la metamorfosi. Con

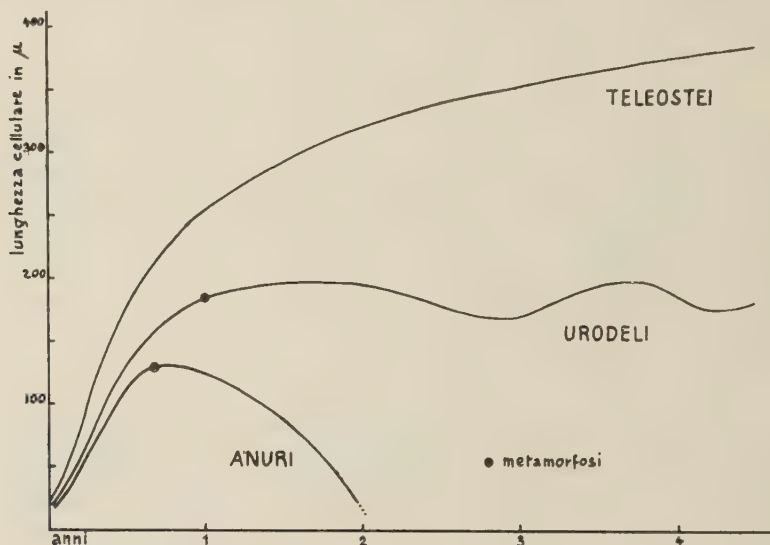


Fig. 2. - Curve approssimative di accrescimento della cellula di Mauthner degli Ittiopsidi.

questo risultato (in parte raggiunto con la collaborazione della Zacchei che ha attualmente in corso lo studio analitico delle trasformazioni della cellula di Mauthner dopo la metamorfosi nello *Xenopus*) possiamo comparare il diverso comportamento nella evoluzione differenziativa di uno stesso elemento nervoso, quale il neurone di Mauthner, in animali con condizione ecologica diversa, quali i Teleostei, gli Urodéli e gli Anuri. Mentre nei Teleostei, come io stesso ho potuto constatare in Salmonidi di varia taglia specifica e di varia età (osservazioni inedite su *Salmo iridaeus*, *S. fario* e *S. lacustris*), l'accrescimento della cellula di Mauthner e la sua complicazione morfologica va aumentando di pari passo con l'accrescimento corporeo secondo la ben nota relazione di Levi (fig. 2), negli Anfibi Anuri tale accrescimento si verifica sino alla metamorfosi, dopodichè, pur continuando l'accrescimento corporeo, la cellula regredisce, diviene più piccola, perde le caratteristiche particolari e finisce per confondersi con gli altri elementi del tegmento così da rendere impossibile decidere se un residuo permanga per tutta la vita o l'atrofia sia completa. Questa involuzione, con il passaggio dell'animale alla vita

terrestre è la più bella riprova della diretta relazione del neurone mauthneriano con il moto della coda nel nuoto regolato dagli eccitamenti della linea laterale. Già Larsell nel 1935 aveva notata l'involuzione della cellula di Mauthner dopo la metamorfosi nella *Rana catesbiana*, ma recenti ritrovamenti di tali cellule in rane adulte rimettevano in questione la cosa. Posso affermare, con nuove osservazioni in *Rana esculenta*, *Bombinator pachipus* e *Xenopus laevis* adulti, come l'involuzione sia un fatto costante negli Anuri sebbene non coincida con la metamorfosi, ma vada lentamente verificandosi nell'animale metamorfosato. Così in *Xenopus* a sei mesi dalla metamorfosi le cellule sono ancora riconoscibili per la loro forma e posizione, ma sono assai ridotte di grandezza e prive dei caratte-

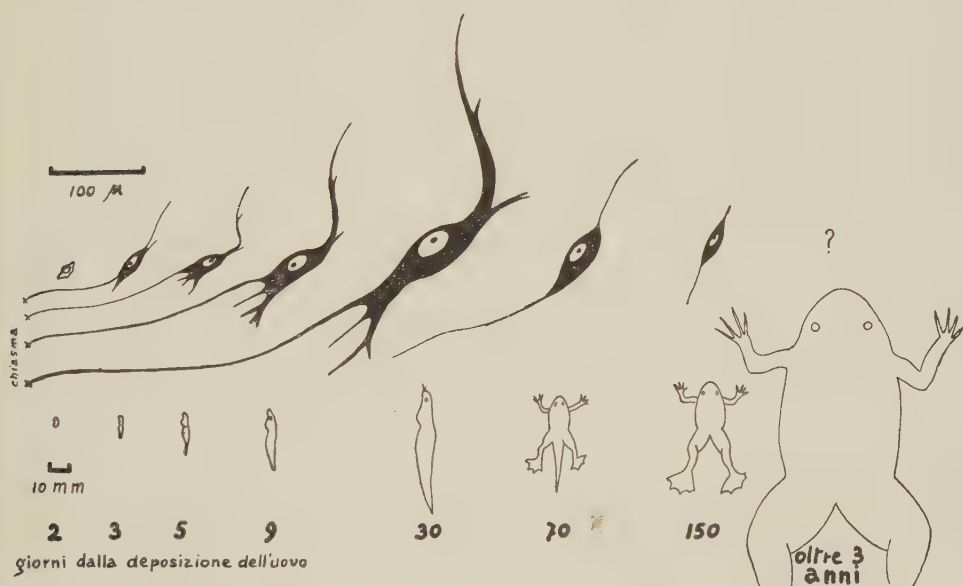


Fig. 3. — Stadi del differenziamento del neurone di Mauthner di un Anuro (*Xenopus laevis*) durante lo sviluppo dell'animale, prima e dopo la metamorfosi.

ristici dendriti e della grossa fibra assonica. In un adulto che certamente aveva più di tre anni non mi è stato possibile trovarne traccia. Così non ne ho trovato traccia in *Bombinator* presi in campagna mentre ho potuto identificarle, assai ridotte, in una rana a completo sviluppo. È evidente come tali differenze siano in rapporto alla età degli animali catturati.

Anche la condizione degli Anfibi Urodeli risulta, dalle prime osservazioni di uno studio organico in corso, assai interessante. Nel *Triton cristatus*, come negli altri Urodeli, le cellule di Mauthner non degenerano, ma in questo animale, in rapporto alla sua vita in acqua durante il periodo degli amori e la sua vita terrestre nel letargo invernale, si osserva una maggior grandezza dell'elemento durante il periodo acquatico ed una diminuzione durante il periodo di vita a terra. Vi è pertanto una limitata e transitoria involuzione periodica coincidente con un processo simile a carico della linea laterale caratterizzato dall'affondarsi nella cute dei bottoni della linea laterale che nel periodo di vita acquatica si riportano in

superficie. Col ciclo funzionale annuale la cellula manifesta un ciclo di sviluppo (fig. 2).

La condizione del neurone di Mauthner degli Anfibi Anuri ci offre così un tipico esempio di cellula nervosa che presenta durante la vita dell'animale un ciclo di evoluzione e involuzione in stretto rapporto con i bisogni funzionali che si modificano profondamente col passaggio da una condizione di vita acquatica della larva alla condizione di vita terrestre dopo la metamorfosi; e tale esempio è di particolare interesse in quanto è possibile seguire questo processo riferendosi sempre alla stessa cellula nei vari animali di stadio successivo. La fig. 3 compendia questo ciclo del differenziamento e della involuzione.

Risulta pertanto da queste ricerche e da quelle da me eseguite sulla determinazione istogenetica come il neurone, estrinsecata la sua specifica natura acquisita con la determinazione istogenetica particolare, natura che, quale fenomeno di preadattamento è perfettamente consona al lavoro fisiologico a cui la cellula è deputata, subisca quindi l'influenza di fattori che successivamente si manifestano e che agiscono sul completamento del suo aspetto specifico. Essenziale tra questi è l'attività funzionale, e il fenomeno di involuzione è un esempio che la natura ci offre del come, cessando la funzione specifica, il neurone vada lentamente regredendo, perdendo prima le sue specifiche qualità strutturali e quindi, dopo essersi confusa con gli elementi reticolari del tegmento (del cui sistema fa parte), non lasciando traccia reperibile.

Il diverso grado del differenziamento raggiunto dal neurone mauthneriano nei Teleostei, Urodeli e Anuri come è messo in evidenza nella fig. 1, è in armonia con il diverso grado di attività natatoria di questi tre gruppi animali, ma esso può essere riferito, da un punto di vista causale, alla persistenza di attività nei primi, alla periodicità nei secondi e alla limitata attività, nel solo periodo larvale, negli ultimi. Queste limitazioni, negli Anfibi, non permettono il raggiungimento dell'elevato grado di differenziamento dei Teleostei, ma esso è perfettamente adeguato alla più limitata attività natatoria.

È questo un esempio del come la causalità e la predeterminazione siano manifestazioni strettamente collegate nei fenomeni della vita.

Desidero concludere facendo ancora osservare come i risultati di queste ricerche siano stati raggiunti con l'applicazione dei vari metodi di indagine biologica (descrittivo-morfologico, anatomo-comparativo, morfo-ecologico, embriologico-descrittivo e sperimentale, fisiologico), convinto come nella ricerca biologica non bisogna essere legati ad apriorismi metodici o, peggio, ad assolutismi schematici. Caso per caso è stato applicato il metodo più adatto, e, dove è stato possibile, l'indagine è stata fatta con metodi diversi.

Biologia. — *La determinazione di arti soprannumerari in «Bufo vulgaris».* — V. *Campi morfogenetici e leggi del Bateson* (*). Nota di TEODORO PERRI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Il problema degli arti soprannumerari da stimoli abnormi, sorto in seguito alle esperienze della Locatelli (1924)⁽¹⁾ nei tritoni adulti e del Balinsky (1925)⁽²⁾ negli embrioni di *Triton*, offre vari aspetti di profondo interesse biologico. Ricordo tra gli altri l'applicazione del concetto di « campo morfogenetico », le leggi della simmetria speculare del Bateson, il meccanismo d'azione degli induttori abnormi nei suoi sviluppi biochimici.

È da alcuni anni che mi occupo della determinazione di arti soprannumerari in *Bufo vulgaris*. Nel 1946 e nel 1947 ne ottenni occasionalmente alcuni casi; poi, a cominciare dallo stesso 1947, li ricercai appositamente e ormai ne ho raccolti moltissimi. Queste ricerche su *Bufo vulgaris* mi sembrano meritevoli di essere continuate, perchè le formazioni soprannumerarie ottenute in questa specie presentano delle peculiarità atte a contribuire ad una migliore conoscenza degli argomenti sopraccennati; si vedrà in seguito se esse dipendano dalla specie sulla quale ho sperimentato, oppure dalla tecnica usata.

In precedenti Note⁽³⁾ ho esposto i risultati man mano raggiunti: sulle ricerche del 1948 ho presentato una Nota (la IV) sulla natura degli induttori da me usati, con particolare riguardo all'acido ribonucleico; in un lavoro in esteso diedi la descrizione analitica dei risultati ottenuti fino al 1947⁽⁴⁾, ed in un altro lavoro in esteso che ho in preparazione, avendo ormai quasi ultimato l'esame del materiale raccolto, conto di dare la descrizione analitica dei casi avuti nel 1948 e nel 1949.

Scopo di questa Nota è di esaminare i reperti già ottenuti, nei loro riferimenti al concetto di « campo morfogenetico » e alle leggi di simmetria speculare del Bateson. Sui quali argomenti già feci degli accenni ed alcune considerazioni in precedenti Note; ma ora desidero tentare una loro coordinazione.

ARTI SOPRANNUMERARI OTTENUTI IN BUFO VULGARIS. — La tecnica che ho usata fu, essenzialmente, quella di asportare, ad embrioni di *Bufo vulgaris* röntgenirradiati con dosi sicuramente letali, ampie parti cefaliche (cioè la parte apicale della testa comprendente la regione boccale, l'ipofisi e parti circonvicine di encefalo; oppure la vescicola ottica con parti vicine di encefalo); e trapiantare la zona asportata sull'addome di embrioni normali. È da notare che il trapiantato fu di notevole volume e che successivamente andò distrutto o interamente o in grandissima parte, onde graduale ed intensa messa in libertà di prodotti di citolisi.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « B. Grassi » dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) « Arch. Ital. de Biol. », vol. 74, 1924.

(2) « Roux' Arch. Entw. mech. », vol. 105, 1925.

(3) Nota I, in questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. III, p. 613 (1947); Nota II, ivi, vol. IV, p. 585 (1948); Nota III, ivi, vol. V, p. 442 (1948); Nota IV, ivi (fascicolo delle ferie 1949).

(4) « Arch. Zool. Ital. », vol. XXXIII, 1948.

Le formazioni soprannumerarie sono o arti semplici cioè unici, o arti duplici cioè coppie di arti, o formazioni più complesse.

ARTI SEMPLICI. — Nei casi ottenuti nel 3° posteriore dell'addome, quando l'autopodio è sufficientemente differenziato, si osserva che trattasi sempre di arto posteriore (mai di arto anteriore) ed è sempre di lateralità opposta al lato sul quale giace: è quindi in simmetria speculare rispetto al vicino arto normale. Inoltre, la faccia dorsale di questi arti è — con rarissime eccezioni d'altronde discutibili — volta verso il dorso. Nel 3° anteriore dell'addome, le formazioni soprannumerarie sono generalmente meno differenziate che nella precedente zona. Quando l'arto è sufficientemente sviluppato, si riconosce che trattasi di arto anteriore (non è mai stato posteriore): e nei pochissimi casi in cui l'autopodio lascia riconoscere la sua lateralità, si vede che è della stessa lateralità del lato sul quale giace. Nel 3° intermedio si hanno i casi meno tipici.

Non sempre questi arti semplici sono veramente tali; perchè in vari casi vi è un secondo arto quasi del tutto rudimentale ma che tuttavia, bene inteso, si lascia riconoscere per arto.

COPPIE DI ARTI. — Sono ancora più interessanti. Ne ho finora raccolte una decina di casi, e quindi in numero notevole pur essendo nettamente minore di quello degli arti unici. Le coppie le ho avute nella metà posteriore dell'addome. Gli arti di ciascuna coppia sono tra loro in simmetria speculare. Quando l'autopodio è sufficientemente differenziato, è risultato ben chiaro trattarsi di un arto destro e di un arto sinistro; inoltre l'arto soprannumerario più vicino al normale posteriore è di lateralità opposta a questo. Se vi è differenza tra i due arti di una stessa coppia, allora il meno differenziato è stato sempre l'arto sito più cefalicamente: con tipi intermedi ci si ricollega in tal modo ai casi, dei quali ho già parlato, di arti unici con accanto un arto rudimentale. Nelle coppie la parte libera degli arti non è volta mai verso il centro dell'addome, bensì verso l'esterno, come appunto fanno i normali; inoltre la parte dorsale dell'arto guarda dorsalmente, e quindi il lato ventrale ventralmente, anche qui adunque come i normali. Nel 3° anteriore dell'addome ho avuto talora due arti soprannumerari, ma che non costituiscono una coppia vera e propria, bensì trattasi dello sdoppiamento di un singolo arto.

FORMAZIONI PLURIME. — Ne ho incontrate solo alcune; come ad esempio di 3 arti, due dei quali formanti una coppia; sono assai atipiche.

Tutti questi arti soprannumerari mostrano, già all'esame al microscopio binoculare, atrofia muscolare; inoltre assenza di movimenti articolari sia attivi che passivi, come già dissi in precedenti pubblicazioni.

CAMPI MORFOGENETICI. — In fisica s'intende per « campo » lo spazio geometrico in cui agiscono delle forze; sono queste che creano il « campo ». In biologia s'intende per « campo », accettando la definizione di Huxley e De Beer, lo spazio in cui agiscono coordinatamente vari agenti che vi imprimono una data direzione morfogenetica. Le divergenze sorgono quando si tratta di decidere se il substrato abbia oppur no importanza. Per il Gurwitsch non vi ha importanza, invece per altri Autori, specie per il Needham, il « campo » è legato al substrato.

Il concetto di substrato, a sua volta, si avvicina, se addirittura non si identifica, a quello di « competenza ». Questo termine esprime la reattività, in senso morfogenetico, di una parte di embrione; il concetto già esisteva in biologia. È in questo senso che alcuni Autori usano indifferentemente i due termini: « campo » e « competenza ».

Il Balinsky dà grande importanza al substrato; infatti egli dice che la piastra laterale ha in sè latente la capacità a dare arti soprannumerari, e che ciò effettivamente si viene stimolata. Ha cioè la « competenza » a dare arti.

È da chiedersi come tale « competenza » venga a trovarsi in detta zona. È generalmente ritenuto che un organizzatore influisca su una parte di embrione molto più ampia della parte che effettivamente formerà l'abbozzo, cioè di quella parte dove più intenso è lo stimolo induttore. Ora pare che la zona influenzata che sta vicina alla parte che effettivamente formerà un dato abbozzo, sia proprio quella ove residua la « competenza ». Sarebbe cioè, ripeto, la stessa causa che agendo su un dato territorio embrionale determina un « campo » nella cui porzione di maggiore intensità si ha la formazione di un dato abbozzo e nel rimanente del territorio si ha la « competenza » (cioè la capacità latente) a formarlo.

L'organizzatore dell'arto non è stato ancora identificato, ma che esista non pare dubbio ⁽⁵⁾. Orbene, applicando il già detto, mi pare si possa ritenere che ciò che nel normale induce un arto, lo fa sviluppare dove più forte è lo stimolo induttore, e nelle vicinanze rimane per un tempo più o meno lungo (nelle esperienze della Locatelli sui triton rimane sino allo stato adulto) la « competenza » arto-formativa. A ciò pensare spinge pure la distinzione (che risulta dalle esperienze del Balinsky per *Triton* e dalle mie per *Bufo vulgaris*) di due zone, l'una con capacità a dare arti anteriori e l'altra arti posteriori.

Mi pare si possa concludere che determinare un « campo » di arto soprannumerario significhi ridestare (o forse anche rafforzare) nella cosiddetta zona degli arti quelle capacità arto-formative che una precedente induzione (da parte dell'induttore dell'arto normale) ha determinato in quella zona. Nel « campo » dell'arto normale il substrato ha quindi una netta importanza, mentre non pare che l'abbia nella primitiva induzione, e perciò ritengo che il dissidio tra quelli che danno e quelli che non danno importanza al substrato non sia del tutto insanabile, se si tiene conto del succedersi nel tempo delle varie influenze organizzatrici.

LE LEGGI DELLA SIMMETRIA SPECULARE DEL BATESON. — Il Bateson (1894) ⁽⁶⁾ esaminò un gran numero di casi di appendici soprannumerarie (antenne, palpi, arti) prevalentemente negli Insetti e nei Vertebrati.

Per la costituzione di queste extrappendici osservò che pure essendo parzialmente deformate, più esili e più corte, sono nella maggior parte dei casi buone copie delle normali.

(5) Mi vado anch'io occupando sia di tale questione, sia dell'individuazione, negli Anuri, dello stadio preciso in cui avviene la determinazione dell'abbozzo dell'arto e della sua primitiva ubicazione: la tutt'altro che precisa conoscenza di questi argomenti è un intralcio ad una chiara visione del problema dell'induzione degli arti soprannumerari.

(6) *Materials for the study of variation*. London (1894).

Esaminando queste appendici soprannumerarie - che di solito sono due - vide verificarsi alcune leggi. La prima dice che gli assi lunghi dell'appendice normale e delle due soprannumerarie giacciono su uno stesso piano. La seconda legge dice che le due appendici soprannumerarie sono tra loro in simmetria speculare, ed inoltre che l'appendice soprannumeraria più vicina alla normale è anche con questa in simmetria speculare. Il Bateson fa presente che non sarebbe esatto asserire che queste leggi siano seguite con precisione matematica, ma nelle parti essenziali sono ben verificate.

P. Della Valle (1911) ebbe un caso di rigenerazione tripla in un arto di *Triton*, nel quale riconobbe una chiarissima verifica delle leggi del Bateson, che vennero pure riconfermate da numerosi altri Autori; le rarissime eccezioni trovate non pare che meritino eccessivo rilievo. L'Harrison estese le leggi del Bateson anche ai casi in cui l'appendice soprannumeraria sia una sola. Le spiegazioni date del come dette leggi si verifichino sono molteplici e contrastanti (ved. la rassegna critica che ne fa il Canella) (7).

Debbo ora ricordare le classiche ricerche dell'Harrison sulla determinazione degli assi di polarità negli abbozzi degli arti. È ben noto che si ammettono nelle uova e negli embrioni degli assi di polarità: antero-posteriore, dorso-ventrale, ecc.; i quali sono connessi con il gradiente assiale del Child e allievi. Nell'arto si distinguono tre assi: dorso-ventrale, antero-posteriore o cefalo-caudale, medio-laterale o prossimo-distale; che sono paralleli agli assi del corpo. Vediamo ora quali rapporti esistano, in base alle osservazioni dell'Harrison, tra gli assi dell'arto e quelli del corpo. L'Harrison trovò, in *Amblystoma punctatum*, che nell'abbozzo dell'arto anteriore, allo stadio di bottone codale, è già stabilmente determinato l'asse antero-posteriore; infatti se l'abbozzo si trapianta ruotato, la direzione che assume l'arto è conforme alla primitiva direzione. Tale asse è, nella stessa specie, determinato persino allo stadio di gastrula avanzata (Detwiler). Diversamente vanno le cose per gli altri due assi. Mediante trapianti dell'abbozzo dell'arto con ruotamento, l'Harrison vide che gli assi dorso-ventrale e medio-laterale si sviluppano sempre parallelamente ai corrispondenti assi dell'embrione: il che significa che allo stadio di bottone codale essi non sono ancora stabilmente determinati, e che è l'embrione che imprime questi assi all'abbozzo dell'arto. Adunque gli assi dell'arto sono impressi dall'embrione; il primo ad assumere una stabile determinazione è l'antero-posteriore, gli altri l'assumono successivamente. Per gli Anuri il Gräper, sperimentando allo stadio di larva (a cominciare dalle giovanissime), ebbe risultati concordanti con quelli dell'Harrison.

Nei miei casi, quando lo stimolo dato dal trapianto provoca la formazione di un nuovo abbozzo di arto (cioè di un arto soprannumerario), tutto lascia ritenere che l'embrione imprima a questo abbozzo i suoi assi di polarità, così come fa rispetto ai normali abbozzi degli arti. Che questo non sia una semplice ipotesi è mostrato dal fatto che nei miei casi gli arti soprannumerari hanno gli assi orientati come nel normale. Naturalmente non vi è da attendersi una concordanza assoluta; occorre pur tener conto delle condizioni abnormi, anche per posizione, che hanno questi abbozzi di arti soprannumerari, e perciò la concordanza avuta,

(7) *Scritti Biologici*, vol. XII (1937).

e della quale ho detto poco sopra descrivendo i reperti personali, è da ritenersi soddisfacente.

Debbo ora insistere sul fatto che notevole è il numero dei casi in cui la formazione soprannumeraria è costituita da una coppia di arti. Anche il Bateson dice che le appendici soprannumerarie sono solitamente due. Vi è una tendenza – almeno nel campo posteriore dell'addome – a dare una coppia completa di arti. Per questi casi di coppie di arti posteriori, le leggi del Bateson sono facili ad intendersi: perchè se si forma una coppia di arti ed i loro assi sono come quelli degli arti normali perchè impressi (come tutto lascia ritenere) dall'intero embrione; ne consegue necessariamente non solo che i due arti soprannumerari sono tra loro in simmetria speculare (perchè sono una coppia di arti) ma ne consegue anche che l'arto più vicino al normale posteriore – essendo la coppia su uno dei lati dell'addome – è con esso in simmetria speculare. In conclusione, dalla tendenza a dare una coppia completa di arti e dalle leggi dell'Harrison sulla determinazione della polarità degli assi degli arti, consegue necessariamente il verificarsi delle leggi del Bateson. Le quali, ripeto, almeno per questi casi sono facili ad intendersi.

Per gli arti unici la spiegazione è meno semplice e bisognerà ricercarla. Comunque ricordo che da ricerche dell'Harrison è risultato che quando il trapianto di un abbozzo di arto determina un arto soprannumerario, a volte accade che il primo arto regredisca e scompaia. E nei miei casi, quando i due arti non sono ugualmente conformati, il meno tipico è stato sempre (per il campo degli arti posteriori) quello più cefalico, cioè quello che dovrebbe essere della stessa lateralità dell'arto posteriore normale. Occorrerà perciò vedere se questi arti unici siano riconducibili ai casi di determinazione di una coppia completa di arti. Noto intanto che nei casi di arto unico abbastanza differenziato, esso è come una coppia di arti della quale si sia sviluppato solo l'arto più vicino al normale, mai l'altro.

Per la zona degli arti anteriori ho già detto in precedenti Note, e qui riconfermo, che la tipicità degli arti soprannumerari è minore. Questo può spiegarsi con il fatto che gli arti anteriori sono, più che i posteriori, vicini alla zona cefalica (centro di notevole attività); ciò conformemente alle vedute del Child e del Cotronei.

Come già dissi in altri lavori, le leggi del Bateson si verificano compiutamente dove sono intense le capacità del « campo », comunque lo si voglia intendere; e troppi fatti mostrano che il « campo » degli arti posteriori è molto più intenso dell'anteriore (ved. la mia Nota III).

CONCLUDENDO. – Il « campo » di un arto soprannumerario è da intendersi come determinato dal ridestarsi, per effetto di uno stimolo, delle capacità artiformative presenti nella zona, e ciò in accordo sia con il Balinsky che con altri Autori. Nei miei casi lo stimolo è rappresentato dai prodotti di citolisi del trapiantato (da embrioni röntgenirradiati con dosi letali).

Nei casi di determinazione di coppie di arti soprannumerari, si è trovato che il verificarsi delle leggi di simmetria speculare del Bateson appare conseguenza di due fattori: la tendenza a dare una coppia di arti soprannumerari e l'esistenza delle leggi dell'Harrison sulla determinazione degli assi degli arti.

Biologia (Biochimica). — *I chetoacidi nel sangue e nelle urine nell'avitaminosi B₁ sperimentale del ratto*^(*). Nota di DORIANO CAVALLINI, LEONARDO TENTORI, BRUNO MONDOVÌ, presentata^(**) dal Socio G. VERNONI.

Dopo le classiche ricerche di Peters e collaboratori che portarono alla scoperta della funzione coenzimatica della vitamina B₁ e dei suoi derivati fosforilati nel metabolismo dell'acido piruvico, molti ricercatori si sono occupati di rintracciare questo composto nei liquidi biologici nel corso del beri-beri sperimentale e clinico e di correlare le sue variazioni quantitative con lo stato di carenza o con la gravità della sintomatologia.

I metodi usati a questo scopo sono stati a preferenza il metodo al bisolfito di Clift e Cook⁽¹⁾ ed il metodo alla dinitrofenilidrazina di Lu⁽²⁾ con le sue numerose modificazioni. Il primo è un metodo generale con il quale si titolano la maggioranza dei composti aventi un radicale carbonilico o aldeidico, mentre il secondo limita il suo campo di azione a tutti quei composti che oltre ad avere un radicale carbonilico o aldeidico siano anche forniti di una o più funzioni acide. Certamente la specificità dei due metodi per l'acido piruvico è assai limitata, e considerando inoltre l'eventualità che la vitamina B₁ possa avere una funzione biologica assai più ampia nel campo dei chetoacidi che non quella di incidere unicamente sul metabolismo dell'acido piruvico⁽³⁾, è del tutto ammissibile che l'aumento di questo composto concordemente constatato in piena sintomatologia beri-berica^(4,6), non sia unicamente dovuto a questo chetoacido ma che vi concorrano altri composti dotati di proprietà analoghe e non differenziabili con i metodi finora impiegati.

Recentemente, facendo uso della cromatografia di ripartizione su carta da filtro, si è riusciti a separare e determinare individualmente un certo numero di chetoacidi di importanza biologica che con i metodi precedenti erano determinati in blocco come acido piruvico^(7,9). Approfittando di questa nuova tecnica ci siamo proposti di riprendere in esame il problema dell'aumento dell'acido piru-

(*) Ricerche eseguite nel Centro di studio per la Fisiopatologia del C.N.R. presso l'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Roma, e nel laboratorio di Biologia dell'Istituto Superiore di Sanità.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) F. P. CLIFT, R. P. COOK, « Biochem. J. », 26, 1788 (1932).

(2) G. D. LU, « Biochem. J. », 33, 249 (1939).

(3) D. E. GREEN, W. WESTERFELD, B. VENNESLAND, W. E. KNOX, « J. Biol. Chem. », 145, 69 (1942).

(4) R. H. S. THOMPSON, R. E. JOHNSON, « Biochem. J. », 29, 694 (1935).

(5) G. D. LU, « Biochem. J. », 33, 774 (1939).

(6) E. STOTZ, O. A. BESSEY, « J. Biol. Chem. », 143, 625 (1942).

(7) D. CAVALLINI, N. FRONTALI, G. TOSCHI, « Nature », 163, 568 (1949).

(8) D. CAVALLINI, N. FRONTALI, G. TOSCHI, « Ric. Scient. », 19, 208 (1949).

(9) D. CAVALLINI, N. FRONTALI, G. TOSCHI, « Nature », 164, 792 (1949).

vico nell'avitaminosi B₁ in modo da stabilire in questo incremento quanto spetti realmente all'acido piruvico e quanto invece sia dovuto ad altri chetoacidi già presenti negli umori o che eventualmente vi possano comparire nel corso della carenza.

PARTE SPERIMENTALE. — Abbiamo condotto le nostre esperienze su un gruppo di ratti maschi, per evitare variazioni individuali legate al sesso ⁽¹⁰⁾, del peso di 50–70 g. La dieta aveva la seguente composizione:

Caseina ⁽¹¹⁾	20	Miscela vitaminica ⁽¹³⁾	Miscela vitaminica ⁽¹³⁾
Amido	45	in saccarosio	in olio d'oliva
Strutto	19	Saccarosio g. 10	Olio d'oliva cc. 10
Saccarosio	10	Riboflavina mg. 20	2-metil-1,4-nafto-
Miscela salina ⁽¹²⁾	4	Ac. nicotinico » 100	chinone mg. 10
Miscela vitaminica		Piridoxina » 10	α -Tocoferolo » 40
in saccarosio	1	Ca pantotenato » 50	
Miscela vitaminica		Ac. p-aminoben-	
in olio d'oliva	1	zoico » 50	
Olio feg. merluzzo	1	Ac. folico » 2	
		Colina g. 1	
		Inositolo » 0,4	

Ogni sette giorni si prelevavano 4 ratti, si uccidevano per decapitazione raccogliendo il sangue in un vaso contenente 10 cc di una soluzione di NaPO₃ 5% + 1,25 cc HCl 2 N. Il recipiente e la soluzione erano pesati prima e dopo aggiunta di sangue e la differenza ci dava la quantità di sangue ottenuto (2–5 cc). Agitata la soluzione per qualche tempo si filtrava ed una aliquota del liquido limpido era trattata per la successiva determinazione cromatografica. Quattro coppie di animali erano tenute in gabbie metaboliche ed ogni sette giorni si raccoglievano le urine delle 24 h su 5 cc HCl 2 N. lavando alla fine della raccolta imbuto e fondo delle gabbiette con 50 cc H₂O, si diluiva quindi la soluzione a 100 o 200 cc. In palloncini tarati da 15 cc contenenti 0,45 g NaPO₃ in polvere si ponevano 10 cc della soluzione di urina, dopo dissoluzione ed aggiunta di 3 cc HCl 2 N si portava al segno con H₂O. 2 cc del liquido filtrato erano trattati per l'esame cromatografico. Al 21° giorno di dieta dopo un notevole abbassamento del peso corporeo e quando la maggior parte degli animali si trovavano in piena sintomatologia polineuritica si iniettava intraperitonealmente 1 mg di tiamina e si sostituiva la dieta con una della stessa composizione in cui nella miscela vitaminica in saccarosio erano aggiunti 10 mg di tiamina. Indipendentemente da questi animali le determinazioni erano eseguite anche su altri che mostravano la sintomatologia beri-berica dopo i 21 giorni di dieta. Per i dati tecnici riguardanti l'applicazione del metodo cromatografico alla determinazione dei chetoacidi rimandiamo agli articoli già apparsi ^(7,9). Come solvente era usata la miscela butanolo-etanolo 20 %.

(10) H. A. HARPER, H. J. DEUEL, « J. Biol. Chem. », 137, 233 (1941).

(11) Caseina purificata della Ditta Piccioni, Brescia.

(12) Osborne Mendel.

(13) Vitamine cristallizzate: Merck, Roche, Erba.

RISULTATI. — Il cromatogramma dei chetoacidi del sangue di ratto normale rivela la presenza di tre chetoacidi; il primo con $R_f = 0,26$ è stato identificato come acido α -chetoglutarico; il secondo con $R_f = 0,36$ come acido piruvico ed il terzo con $R_f = 0,55$ non è stato ancora identificato. Quest'ultimo composto è stato rivelato nelle tre specie animali finora saggiate, uomo, ratto, cavallo; talora è presente in quantità meno abbondanti e ricerche sono in corso per definirne la composizione. Come si può osservare dal diagramma della fig. 1, in accordo con

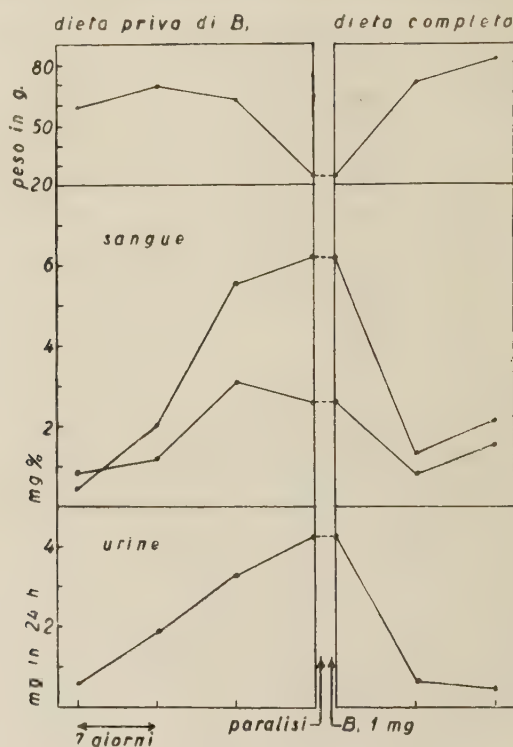


Fig. 1. — Chetoacidi nel sangue e nelle urine di ratto in avitaminosi B_{12} . Nel sangue aumentano 3 chetoacidi: acido piruvico, linea superiore; acido α -chetoglutarico, linea inferiore; un composto sconosciuto che non compare nella grafica (vedi testo). Nelle urine aumenta solo l'acido α -chetoglutarico, un chetoacido sconosciuto compare dopo la prima settimana (vedi testo), l'acido piruvico non è apprezzabile in quantità sufficienti all'analisi. In testa alla grafica è riportato il comportamento del peso degli animali nelle stesse condizioni.

i dati di precedenti Autori, l'acido piruvico aumenta notevolmente nel corso della avitaminosi fino a giungere dai 0,44 mg % di partenza a dei valori di 6,42-7,16 mg % all'apparire dei sintomi di carenza. I valori si abbassano notevolmente dopo cura con tiamina. Oltre a questo chetoacido aumenta notevolmente anche l'acido α -chetoglutarico, sebbene l'incremento non raggiunga quello dell'acido piruvico; da 0,84 mg % si giunge in questo caso a 2,34-3,15 mg %, ed è anche qui evidente l'effetto della vitamina B_{12} nel riportare a valori vicini alla norma il tasso ematico di questo composto. Il terzo chetoacido ha un comportamento assai simile ai precedenti, potremo dire intermedio fra i due, cioè aumenta nel corso della carenza più del chetoglutarico e meno del piruvico ma ha la pecu-

liarità di essere talora assente nel sangue di quegli animali con quadro polineuritico inoltrato. Questo fatto potrebbe essere messo in rapporto con lo stato di nutrizione degli animali in quanto è noto che dopo un periodo di avitaminosi B₁, interviene una forte anoressia e lo stato di paralisi aggrava ancor più questa condizione impedendo completamente all'animale di nutrirsi.

Numerosi lavori riportano le variazioni della concentrazione dell'acido piruvico nelle urine di ratto in avitaminosi B₁, ⁽¹⁰⁾ (14-16) e gli Autori sono tutti d'accordo nell'ammettere un aumento di questa sostanza in rapporto allo stato di carenza della vitamina. I dati da noi ottenuti e controllati più volte ci autorizzano a dichiarare inesatto questo concetto che ormai è riportato anche in numerosi trattati. Nelle urine di ratto normale esistono soltanto tracce di acido piruvico ed il nostro metodo, che finora è il più idoneo a tale tipo di ricerca, ne rivela delle quantità assai scarse. L'acido α -chetoglutarico è eliminato in maggior copia, ed è questo composto che aumenta nella avitaminosi. Evidentemente quello che i precedenti Autori riportano come acido piruvico con metodi non specifici è in massima parte acido α -chetoglutarico. Anche negli stati più avanzati di carenza e quando la sintomatologia beri-berica è in pieno sviluppo, quando cioè l'acido piruvico presente normalmente nelle urine dovrebbe aumentare in rapporto alla aumentata piruvicoemia non si rivela alcuna variazione di questo composto. Al contrario dopo la prima settimana di dieta compare un'altra sostanza avente tutti i caratteri di un chetoacido che nel cromatogramma occupa una posizione subito al di sotto del chetoglutarico ed avente un $R_f=0,32$. Questo composto aumenta con il progredire della carenza ma può essere assente alla fine di essa quando cioè gli animali si trovano in contrattura polineuritica. L'acido α -chetoglutarico torna a valori pressochè normali dopo cura con tiamina e passaggio alla dieta sintetica completa, anche il secondo composto non identificato non è più reperibile negli animali curati.

Il comportamento peculiare dei due chetoacidi non identificati trovati nel sangue e nell'urina, il rapporto di dipendenza che essi mostrano con lo stato carenziale, l'impossibilità che abbiamo incontrato finora di poterli identificare con qualcuno dei composti più noti di questo gruppo, sono tutti dati che concorrono a rendere attraente il problema della loro identificazione per via analitica. Potendo superare le difficoltà tecniche inerenti a tale lavoro ci proponiamo di tornare sull'argomento in un prossimo futuro.

Come conclusione possiamo affermare che la carenza di vitamina B₁ determina nel ratto maschio un aumento nel sangue di acido piruvico e di acido α -chetoglutarico, che nelle urine aumenta in rapporto allo stato carenziale solo l'acido α -chetoglutarico, ed inoltre che due composti non identificati aventi tutti i caratteri dei chetoacidi aumentano in queste stesse condizioni nel sangue e nelle urine, e che il loro comportamento differisce dagli altri in quanto possono anche mancare negli ultimi stati della avitaminosi quando cioè gli animali si trovano in avanzata sintomatologia polineuritica.

(14) G. C. BARENJI, L. J. HARRIS, « Biochem. J. », 33, 1346 (1939).

(15) M. SHILS, H. G. DAY, E. V. MC COLLUM, « Science », 91, 341 (1940).

(16) M. SHILS, H. G. DAY, E. V. MC COLLUM, « J. Biol. Chem. », 139, 145 (1941).

Biologia. — *Sindrome mortale caratterizzata da manifestazioni a carico del sistema nervoso nel ratto alimentato con una dieta altamente purificata contenente solfonamidoguanidina* (*). Nota di LEONARDO TENTORI e GIROLAMO VIVALDI, presentata (**) dal Socio D. MAROTTA.

Con l'introduzione da parte di Marshall e coll. (1) della solfonamidoguanidina quale sostanza antibatterica scarsamente assorbibile, è stato possibile studiare negli animali non solo il fabbisogno delle singole vitamine, ma anche le modalità e l'estensione della sintesi che può avvenirne ad opera della flora intestinale. È evidente che, sopprimendo completamente tale sintesi, è possibile provocare carenze dei singoli fattori del gruppo B, studiare il fabbisogno di tali fattori in diete differenti e fare luce sulle relazioni metaboliche che si sospettano esistere tra di essi.

Tale metodo di indagine ha dato, negli ultimi anni, risultati positivi rendendo possibile la dimostrazione che acido folico e biotina sono sintetizzati dalla flora intestinale del ratto. Analogamente non è improbabile che, ricorrendo allo stesso metodo di sperimentazione biologica, si possa riuscire a mettere in evidenza l'eventuale esistenza di fattori sconosciuti, normalmente anche essi sintetizzati ad opera della flora intestinale.

Abbiamo pertanto eseguito esperienze su 80 ratti albini provenienti dallo stesso allevamento, alimentati con dieta sintetica altamente purificata per i fattori idrosolubili addizionata di tutti i principi attivi noti ad eccezione dell'acido folico. L'esclusione di un fattore noto quale l'acido folico era dovuta alla necessità di avere un indice del grado di sterilizzazione raggiunto nel tubo digerente degli animali in esperimento, dato che sul momento non era nelle nostre intenzioni compiere uno studio batteriologico della flora intestinale.

Gli animali sono stati suddivisi in due lotti: al primo veniva somministrato, mescolato nella dieta, il 2 % di solfonamidoguanidina, al secondo l'1 % di streptomycin. A distanza di circa 4 mesi tutti gli animali alimentati con la dieta supplementata con solfonamidoguanidina, e parte di quelli alimentati con la dieta supplementata con la streptomycin hanno presentato i sintomi ematologici della carenza di acido folico. Gli animali che presentavano la sindrome carenziale sono stati curati con acido folico somministrato parenteralmente fino ad ottenere la completa guarigione ematologica; quelli che tale sindrome non avevano ancora chiaramente manifestato sono stati passati dalla dieta contenente streptomycin a quella contenente solfonamidoguanidina. Continuando nella osservazione degli animali sempre alimentati con le diete sopradette, è stato notato nei ratti alimentati

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) E. K. MARSHALL jr., A. C. BRATTON, W. H. J. CALVIN e J. T. LITCHFIELD jr., « Bull. Johns Hopkins Hosp. », 67, 163 (1940).

con dieta addizionata con solfonamidoguanidina, intorno al 5°-6° mese ed a distanza variabile di tempo, l'insorgenza di una sindrome caratterizzata da ipotermia, torpore, paresi a carico soprattutto degli arti del treno posteriore e, periodicamente, da crisi di tipo tetanico della durata di circa 1-2 minuti primi con estensione degli arti anteriori e posteriori e della coda, arresto completo del respiro ed opistotono marcato, crisi che si risolvevano lentamente con la graduale scomparsa dei fenomeni descritti. Gli animali che hanno presentato questi sintomi sono tutti venuti a morte dopo circa 48-72 ore dall'insorgere della sindrome, che si è manifestata in tutti indistintamente i ratti, in numero di 60, alimentati con dieta contenente solfonamidoguanidina, sia che tale dieta avessero ricevuto fin dall'inizio dell'esperimento, sia che ad essa fossero stati trasferiti da quella addizionata con la streptomicina soltanto uno o due mesi prima; al contrario tutti gli animali che, durante lo stesso periodo di tempo, hanno sempre ricevuto la dieta addizionata con streptomicina non hanno presentato le manifestazioni descritte, e sono tuttora viventi a distanza di circa 8 mesi dall'inizio dell'esperimento.

L'autopsia dei ratti venuti a morte consecutivamente alla sindrome descritta non ha dimostrato alterazioni macroscopiche degne di nota se si eccettuino i caratteristici aumento di volume e di vascolarizzazione della tiroide in relazione con l'influenza che la solfonamidoguanidina esercita sulla ghiandola.

L'indagine batteriologica ha escluso che il complesso sintomatologico descritto sia causato da una infezione a carattere epidemico.

Per quanto riguarda la possibilità che si tratti di manifestazioni tossiche comunque provocate dalla solfonamidoguanidina è noto che, nel corso di ricerche circa l'azione di tale sostanza sulla tiroide e sul metabolismo basale del ratto, numerosi Autori hanno alimentato ratti albinì con diete complete, non sintetiche, addizionate di solfonamidoguanidina nell'ammontare del 2 % senza osservare fenomeni gravi di tossicosi ⁽²⁾ ⁽³⁾; l'osservazione degli animali così trattati è stata prolungata da Astwood e coll. ⁽⁴⁾ fino a 6-7 mesi dall'inizio dell'esperimento, e nel suo lavoro non vengono riferiti fenomeni tossici, nè viene indicata la percentuale della mortalità.

Vitamina B₁, acido folico, concentrati di vitamina B₁₂ dal fegato e da culture di *streptomyces griseus* ed estratti di fegato commerciale somministrati parenteralmente, lievito di birra secco ad alta attività somministrato per sonda gastrica non hanno efficacia preventiva o curativa sulla sindrome descritta; anche 20 unità Collip di estratto acquoso di paratiroide iniettate giornalmente insieme a gluconato di calcio non hanno modificato il decorso mortale della malattia in atto.

Dall'esame dei risultati fino ad ora ottenuti non è possibile trarre una conclusione precisa circa la causa delle alterazioni che sono alla base della sindrome mortale presentata dai ratti alimentati con la dieta contenente solfonamidoguanidina. Si può tuttavia affermare che tali alterazioni non sono dipendenti da una infezione e che, probabilmente, non sono causate da tossicosi da solfonamidoguanidina.

(2) A. M. HUGHES, «Endocrinology», 34, 69 (1944).

(3) G. E. SEEGAR JONES, E. DELFS e E. C. FOOTE, «Endocrinology», 38, 337 (1946).

(4) E. B. ASTWOOD, J. SULLIVAN, A. BISSEL e R. TYSLOWITZ, «Endocrinology», 32, 210 (1943).

I risultati delle citate ricerche sulla azione prolungata della solfonamidoguanidina nel ratto ed il fatto che la sindrome da noi descritta insorga negli animali passati dalla dieta contenente streptomicina a quella addizionata con solfonamidoguanidina, dopo uno o due mesi dal cambiamento di dieta, anzichè dopo 5-6 mesi come avvenuto in tutti gli animali che hanno sempre ricevuto solfonamidoguanidina, giustificano la seconda affermazione che è stata da noi fatta sia pure in via ipotetica.

Che tale sintomatologia non si sia prodotta nei ratti alimentati con la dieta contenente streptomicina può dipendere dal fatto che, a causa della maggiore facilità nello sviluppo di una resistenza alla sostanza da parte di vari ceppi di germi, esista, nel tratto intestinale degli animali trattati con essa, una flora batterica più abbondante e comunque in grado di sintetizzare in maggior copia i principi attivi necessari al benessere degli animali stessi.

Con una recentissima Nota di cui solo ora veniamo a conoscenza, Nichol e coll. ⁽⁵⁾ hanno comunicato in una seduta della Società Americana dei Chimici Biologici, di aver osservato l'insorgere di « una caratteristica paralisi in pulcini mantenuti ad una dieta carente di acido folico oppure ad una dieta contenente vitamina B_{12} e minime quantità di acido folico »; non vengono aggiunti altri particolari.

I fatti osservati nel corso delle nostre ricerche ci sembrano particolarmente interessanti e saranno oggetto di ulteriori esperimenti.

PERSONALE ACCADEMICO

I Presidente dà alla Classe la dolorosa Notizia della morte del Socio Nazionale LUIGI BERZOLARI e ne rievoca brevemente la nobile figura con le seguenti parole:

« L'Accademia ha subito una grave perdita nello scorso mese. È morto il 10 dicembre il Socio Luigi Berzolari che apparteneva da 30 anni all'Accademia. Professore di Geometria proiettiva a Torino, poi di analisi algebrica e geometria analitica a Pavia e finalmente di analisi algebrica e infinitesimale nella stessa Università, egli si dedicò principalmente a ricerche di algebra (teorie delle forme algebriche) con applicazioni geometriche, a questioni di geometria numerativa, a studi di involuzioni piane e di particolari configurazioni dello spazio e degli iperspazi. La sua profonda cultura gli permise di trattare anche questioni concernenti la geometria differenziale e la teoria delle equazioni differenziali. Scrisse esaurienti articoli monografici di geometria algebrica per varie enciclopedie matematiche. Fu per qualche anno Rettore dell'Università di Pavia, Presidente dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Presidente dell'Unione matematica italiana. Fu promotore e animatore della Enciclopedia delle matematiche elementari di cui è uscito due anni fa il quinto volume. Tutto questo multiforme lavoro egli svolse per oltre mezzo secolo con profondo scrupolo e ammirabile disinte-

(5) C. A. NICHOL, A. E. HARPER, L. S. DIETRICH e C. A. ELVEHYEM, « Federation Proc. », 8, 233 (1949).

resse, pensando solo alla scienza e alla famiglia, mai al proprio guadagno sebbene fosse in condizioni più che modeste.

Collocato a riposo per limiti di età nel 1935, colpito da disgrazie familiari, e negli ultimi anni da infermità, Egli trascorse una vecchiaia infelice dovendo provvedere ai bisogni propri e dei suoi con la misera pensione che è concessa a chi ha dato per cinquant'anni tutte le proprie energie all'insegnamento e alla scienza.

Inviando un mesto pensiero al caro Collega ed Amico scomparso e l'espressione del nostro dolore alle figlie di Lui. Egli sarà degnamente commemorato dall'Accademia ».

La Classe unanime si associa.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente presenta quindi alla Classe il fascicolo quadruplo dei Rendiconti delle ferie estive e annuncia che è quasi pronto il fascicolo del mese di novembre.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Abetti offre in omaggio all'Accademia un suo volume dal titolo « Storia dell'Astronomia » e lo illustra brevemente, mettendo in rilievo che la letteratura astronomica italiana, la quale in tempi recenti è andata arricchendosi di pregevoli opere, è tuttora piuttosto scarsa per la parte storica e che, in conseguenza, sussiste ancora una conoscenza incompleta del particolare e importante contributo dato dagli studiosi italiani al progresso dell'astronomia, anche perchè tale contributo è spesso dimenticato nelle opere di storia dell'astronomia scritte all'estero.

Il Socio Sergi presenta, a nome del Comitato di redazione costituito da A. C. Blanc, G. Merla, E. Tongiorgi e L. Trevisan, il volume XLII della « Palaeontographia Italica » che costituisce il primo volume con il quale si inizia una serie che ha per titolo: « Paleontologia ed ecologia del Quaternario ». Con questa nuova serie si è inteso di riunire in volumi appositi tutte le memorie relative al Quaternario, volte al fine comune di fornire nuovi elementi per la conoscenza paleobiologica di questo periodo per la quale concorrono insieme con i dati paleontologici quelli ecologici e paleogeografici. Questa iniziativa merita di essere segnalata in modo particolare perchè con essa si è provveduto ad una necessità da tempo sentita dagli studiosi del Quaternario. L'Italia ora viene ad avere una pubblicazione specializzata che segue quell'indirizzo unitario che solo può favorire la conoscenza integrale di quel momento geologico nel quale l'uomo fa la sua apparizione e che da lui prende il nome.

Il volume contiene tre memorie: la prima, che ne occupa la più grande parte, è dedicata all'uomo di Saccopastore e comprende una introduzione

di A. C. Blanc sul giacimento di Saccopastore seguita dalla completa ed estesa descrizione del secondo cranio di Saccopastore compiuta da S. Sergi, corredata da una ricca iconografia. Nella seconda memoria R. Battaglia descrive un osso occipitale umano rinvenuto nel giacimento pleistocenico di Quinzano nel comune di Verona la cui posizione stratigrafica è incerta e dal B. attribuito al Riss-Würm. Nella terza memoria, F. Frassetto vuol sostenere che l'occipitale di Quinzano appartiene ad un tipo brachioide.

Il Presidente ringrazia i Soci Abetti e Sergi.

L'Accademico Segretario illustra le opere inviate in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza il volume del Socio Straniero B. Gutenberg e del prof. C. F. Richter, dal titolo: «Seismicity of the Earth and associated phenomena», edito dall'Università di Princeton; il volume «Hidrologia Portuguesa 1943-1946» del prof. Luiz de Menezes Corrêa Acciaiuoli, edito a cura della Direzione Generale delle Miniere e dei Servizi Geologici di Lisbona; la «Bibliografia polarografica (1922-1949)», a cura del Socio Semerano, edito dal Consiglio Nazionale delle Ricerche; un estratto del Socio Zagar intitolato «Il Convegno Astronomico di Bonn - Settembre 1949»; un catalogo dal titolo: «Japygidarum et Projapygidarum catalogus» del compianto Socio Silvestri, pubblicato dopo la sua morte, e alcuni studi del Socio Straniero Gutenberg.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Bompiani, Bianchi, Amaldi U., Cotronei, Pupilli, Carnera, Picone, Vernoni, Marotta, Armellini e Fabiani.

Il Socio Semerano presenta una Memoria dei dottori Luigi Riccoboni, Pietro Lanza e Paolo Favero dal titolo: «Comportamento polarografico dell'ossido di azoto».

Il Presidente informa il Socio presentatore e la Classe che sarà nominata una apposita Commissione per l'esame di detta Memoria.

L'Accademico Segretario legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

GIANGRECO E. - Sulle vibrazioni delle piastre con nervature. Nota II^a (pres. dal Socio M. PICONE).

MACHNE X. - Condizioni catelettrotoniche realizzate nel ventricolo di *Emys orbicularis* mediante la distensione (pres. dal Corrisp. G. PUPILLI).

MALARODA R. - Su alcune porfiriti comprese nella serie del Tonale e, in particolare, su un filone di notevole significato geologico (pres. dal Socio A. BIANCHI).

MANARA C. F. - Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari mediante trasformazioni cremoniane (pres. dal Corrisp. B. SEGREGÈ).

NICOLINI T. – Sulle variazioni delle latitudini medie annuali (pres. dal Socio L. CARNERA).

PETRUCCI D. – Ricerche sul metabolismo di *Oryza sativa*, *Triticum vulgare* e *Vicia faba* in anaerobiosi (pres. dal Socio G. VERNONI).

RACAH C. – Sulla caratterizzazione delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi semisemplici di Lie (pres. dal Socio U. AMALDI).

STORCHI E. – Sulle equazioni indefinite della statica delle membrane tese su generiche superficie (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Picone, anche a nome del Collega Amaldi U., legge la relazione con la quale si propone la pubblicazione negli Atti della Memoria del dottor Ferdinando Bertolini dal titolo «Un criterio generale di convergenza per integrali impropri – Applicazioni». Messa ai voti, la proposta è accolta con le solite riserve di carattere finanziario.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 14 gennaio 1950

- ABETTI Giorgio. — *Storia dell'Astronomia*. Firenze, Vallecchi, 1949. Pp. XII-370, in-8°, con tavv.
- ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE. — *Pentru o justă orientare a activității științifice în R.P.R.* București, 1949. Pp. 39, in-8°.
- ACCIAIUOLI Luiz. — *Hidrologia Portuguesa, 1943-46*. Lisboa, 1947. Pp. 286, in-8° (Direcção Geral de Minas e Serviços Geológicos).
- BARRICELLI D. — *Circa il piano di costruzione delle navi con particolare riguardo alla carena*. Genova, SIGLA, 1949. Pp. 29, in-8°, con tavv. (Registro Italiano Navale).
- BENIOFF H. — Vedi: GUTENBERG B., RICHTER C. F. and BENIOFF H.
- CHAKRABARTY S. K. — *Response characteristics of electromagnetic Seismographs and their dependence on the instrumental constants*. Estr. da: « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. XXXIX, n. 3, 1949.
- CHAKRABARTY S. K. and RICHTER C. F. — *The Walker Pass earthquakes and structure of the Southern Sierra Nevada*. Estr. da: « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. XXXIX, 1949, n. 2.
- FRIC RENÉ. — *Catalogue préliminaire de la Correspondance de Lavoisier*. Paris, Peyronnet, s. d. Pp. 55, in-8°.
- GUTENBERG B. — *In case of Earthquake*. Estr. da: « Dicaster », 1949.
- *Microseisms and Meteorology*. Estr. da: « Transactions. American Geophysical Union », 1949.
- *The structure of the earth*. Estr. da: « Scientia », 1949, maggio-giugno.
- GUTENBERG B. — *Unexplained phases in seismograms*. Estr. da: « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. XXXIX, 1949, n. 2.
- GUTENBERG B. and RICHTER C. F. — *Seismicity of the earth and associated phenomena*. Princeton, University Press, 1949. Pp. VII-273, in-8°, con figg.
- GUTENBERG B.; RICHTER C. F. and BENIOFF H. — *Earthquake Study in Southern California, 1948*. Estr. da: « Transactions. American Geophysical Union », vol. XXX, 1949, n. 4.
- HATCH Melville H. — *A Century of Entomology in the Pacific Northwest*. Seattle, University of Washington Press, 1949. Pp. 43, in-8°, con tavv.
- RICHTER C. F. — Vedi: CHAKRABARTY S. K. and RICHTER C. F.
- Vedi: GUTENBERG B. and RICHTER C. F.
- Vedi: GUTENBERG B., RICHTER C. F. and BENIOFF H.
- SEMERANO Giovanni. — *Bibliografia polarografica (1922-1945)*. Parte I. Elenco dei lavori e indice degli autori. Supplemento a « La Ricerca Scientifica », a. XIX, 1949. Pp. 140, in-8° (Consiglio Nazionale delle Ricerche. Centro di studi per la Polarografia).
- SILVESTRI Filippo. — *Japygidarum et Projapygidarum Catalogus*. Estr. da: « Bollettino del Laboratorio di Entomologia Agraria di Portici », vol. IX, 1949.
- STEVENSON Smith. — *The Psychological Origin and Treatment of Enureis...* Seattle, University of Washington Press, 1948. Pp. IX-69, in-8°.
- ZAGAR F. — *Il Convegno astronomico di Bonn (Settembre 1949)*. Estr. da: « Memorie della Soc. Astronomia Italiana », vol. XX, n. 4.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 febbraio 1950

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Geometria. — *Topologia differenziale.* — III. *Calotte superficiali del 2° ordine tangenti in un punto.* Nota^(*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

1. SCOPO DELLA NOTA. — Nelle Note precedenti⁽¹⁾ mi sono occupato di enti e invarianti topologici relativi ad elementi differenziali curvilinei del 2° ordine e a giaciture (del 1° ordine).

In questa Nota esamino enti topologici definiti da calotte del 2° ordine fra loro tangenti in un punto. Limitandomi per ora, per semplicità, al caso di calotte superficiali (σ_2^2 , con la notazione già adottata in I, n. 2) stabilisco per esse la nozione di *giacitura principale*: essa è in un senso l'estensione della nozione di *giacitura principale* relativa a due elementi curvilinei E_2 , e in un altro senso l'estensione della nozione proiettiva di spazio 2-oscultore, o $S(2)$, di una calotta σ_2^2 considerata in uno spazio proiettivo. La dimensione della *giacitura principale* dà la dimensione minima k di una V_k contenente le due calotte (e può essere $k = 3, 4, 5$) e regolare nel loro punto di contatto.

Esamino poi le conseguenze topologiche nei vari casi possibili: si vedrà come si estendano alle coppie di calotte tangenti i fatti noti relativi ad una calotta di uno spazio proiettivo.

2. GIACITURA PRINCIPALE DI DUE CALOTTE SUPERFICIALI TANGENTI. — Sia O , $x^i = 0$, $i = 1, \dots, n$, il punto di X_n centro delle due calotte tangenti da esaminare. Se s'individua la *giacitura tangente* con $x^3 = \dots = x^n = 0$, conviene dividere le coordinate in due gruppi; uno costituito da x^1, x^2 , che indicheremo con x^p o x^{p1}

(*) Presentata nella seduta dell'11 febbraio 1950.

(1) E. BOMPIANI, *Topologia differenziale.* — I. *Enti topologici determinati da elementi differenziali di curve.* — II. *Invarianti topologici di elementi curvilinei.* «Rend. Acc. Lincei», ser. VIII, vol. VIII, 1950. Riferimenti ad esse saranno del tipo I, 1.

o x^{p_2} , $p, p_1, p_2 = 1, 2$ e l'altro dalle coordinate rimanenti che indicheremo con z^i , $i = 1, \dots, n-2$.

Ciascuna delle due calotte in esame sia individuata dalle equazioni

$$(2.1) \quad z^i = a_{p_1 p_2}^i x^{p_1} x^{p_2} + \dots, \quad \alpha = 1, 2$$

($\alpha = 1$ per la prima, $\alpha = 2$ per la seconda calotta).

Che due calotte così rappresentate siano tangenti è fuori dubbio: tuttavia la nozione di contatto così rappresentata *sembra* includere qualche cosa di più del necessario perchè implica (almeno apparentemente) una *corrispondenza* fra i punti delle due calotte (fissata da uguali valori di x_1 e di x_2). Bisogna provare (come già per le curve) che così *non* è. Ciò risulta dal fatto che si può sempre prendere l'identità come corrispondenza fra i fasci di direzioni tangenti e che su due E_2 tangenti si possono prendere parametri fra loro raccordati (I, 5).

Ritorniamo allora alle (2.1) e cerchiamo se esistano σ_{n-1}^2 (calotte $(n-1)$ -dimensionali del 2° ordine) regolari in O contenenti le due σ_2^2 . Una di esse sia rappresentata da

$$(2.2) \quad a_i z^i = a_{p_1 p_2} x^{p_1} x^{p_2} + \dots$$

ove i termini non scritti sono di ordine ≥ 3 nelle sole x^p e di ordine ≥ 2 nelle x^p e in una almeno delle z^i .

Affinchè la σ_{n-1}^2 contenga le due σ_2^2 dev'essere, identicamente nelle x^p

$$a_i a_{p_1 p_2}^i x^{p_1} x^{p_2} = a_{p_1 p_2} x^{p_1} x^{p_2}$$

quindi, per p_1, p_2 qualsiasi ($= 1, 2$)

$$(2.3) \quad a_i a_{p_1 p_2}^i = a_{p_1 p_2}$$

da cui

$$(2.4) \quad a_i (a_{p_1 p_2}^i - a_{p_1 p_2}^i) = 0.$$

Sicchè la $(n-1)$ -giacitura di σ_{n-1}^2 deve contenere, oltre la giacitura tangente comune i tre vettori di componenti

$$0, 0, a_{p_1 p_2}^i - a_{p_1 p_2}^i, \quad p_1, p_2 = 1, 2.$$

Se questi tre vettori sono nulli le due calotte coincidono. Se ciò non accade ve ne possono essere 1, 2, 3 linearmente indipendenti; e poichè essi sono certo indipendenti dalla 2-giacitura tangente (per i cui vettori le prime due componenti *non* sono tutt'e due nulle) insieme ad essa definiscono una giacitura a 3, 4, 5 dimensioni che si dirà *giacitura principale* delle due calotte. Come s'è detto essa è, nel campo topologico, l'analogo dello spazio osculatore $S(2)$ di una calotta nel campo proiettivo.

Posta in evidenza questa giacitura conviene raggruppare le variabili in altro modo. Precisamente distingueremo le variabili x^p, ζ^q, z^i , dando a p i valori 1, 2;

a q i valori 1, oppure 1, 2, oppure 1, 2, 3 secondo la dimensione della giacitura principale e ad i rispettivamente i valori da 1 a $n-3$, o ad $n-4$ o ad $n-5$; e in modo che la giacitura tangente alle due σ_2^2 sia quella di $\zeta^q = z^i = 0$ e la giacitura principale quella di $z^i = 0$ in 0.

Allora le equazioni delle due calotte si scrivono:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \zeta^q = a_{p_1 p_2}^q x^{p_1} x^{p_2} + \dots \\ z^i = a_{p_1 p_2}^i x^{p_1} x^{p_2} + \dots \end{cases} \quad \alpha = 1, 2$$

ove i coefficienti $a_{p_1 p_2}^i$ che figurano nelle z^i non dipendono dall'indice α ; o in altri termini il secondo gruppo di equazioni rappresenta una σ_3^2 o σ_4^2 , σ_5^2 contenente le due calotte. Anzi con una delle trasformazioni ancora lecite di coordinate si potrebbero rendere tutte le $a_{p_1 p_2}^i$ nulle.

Sicchè dalle ultime equazioni si può sempre prescindere nello studio delle due calotte.

Discutiamo ora separatamente i vari casi.

3. GIACITURA PRINCIPALE A TRE DIMENSIONI. — Cerchiamo se nel caso di una giacitura principale a tre dimensioni ($q = 1$) esistano elementi curvilinei E_2 comuni alle due calotte σ_2^2 .

Rappresentiamo un tale elemento con

$$(3.1) \quad \begin{cases} x^p = \lambda^p t + \mu^p t^2 + [3] \\ \zeta = \mu t^2 + [3] \\ z^i = v^i t^2 + [3]. \end{cases}$$

Per la sua appartenenza alle calotte (2.5) (in cui $q = 1$, quindi possiamo sopprimere l'indice q) dev'essere

$$(3.2) \quad \mu = a_{p_1 p_2} \lambda^{p_1} \lambda^{p_2} \quad \alpha = 1, 2$$

e poi, se si sono ridotte le $a_{p_1 p_2}^i = 0$ anche $v^i = 0$ (ma da queste si può sempre prescindere, e non interessano).

Dalle (3.2) segue

$$(3.3) \quad (a_{p_1 p_2}^1 - a_{p_1 p_2}^2) \lambda^{p_1} \lambda^{p_2} = 0.$$

Questa condizione definisce due elementi E_1 da dirsi *elementi asintotici* (o d'incidenza) della coppia di calotte, perchè sono gli analoghi degli elementi asintotici (tangenti asintotiche) di una calotta in S_3 proiettivo (l'altra calotta essendo in tal caso quella del piano tangente).

Avuti questi due E_1 , per ciascuno di essi rimangono definiti μ e v^i . Invece non rimangono definiti μ^1 e μ^2 (sempre relativamente a ciascun valore di λ^1/λ^2 per un E_1 asintotico). Può farsi per esempio $\mu^1 = 0$ (il che corrisponde ad un cambiamento del parametro t in $t' = t - (\mu^1)/(\lambda^1) t^2 + \dots$); ciò fatto rimane arbitrario μ^2 e al variare di esso si ha un *pennello* di E_2 comuni alle due calotte

(1, 4) per ciascun E_1 asintotico: esso è determinato da uno qualsiasi dei suoi E_2 e dalla loro comune giacitura principale (quella tangente alle σ_2^2). Non è possibile individuare un E_2 del pennello senza passare a calotte del 3° ordine.

Se i due E_1 asintotici sono distinti (e se non si bada alla realtà) si possono prendere le loro direzioni come caratterizzate da δ_1^i e δ_2^i ($i = 1, \dots, n$; δ_k^i simbolo di Kronecker); ciò porta che sia

$$(3.4) \quad a_{11} = a_{11} (= a_{11}) \quad , \quad a_{22} = a_{22} (= a_{22}) \quad , \quad a_{12} \neq a_{12}$$

e quindi alle due calotte può darsi la rappresentazione

$$(3.5) \quad \zeta = a_{11} (x^1)^2 + 2 a_{12} x^1 x^2 + a_{22} (x^2)^2 + \dots$$

(e per le z^i rimangono le espressioni (2.5)).

Se invece i due E_1 asintotici coincidono, e si assume la loro direzione definita da δ_i^i ($i = 1, \dots, n$) è

$$(3.6) \quad a_{11} = a_{11} \quad , \quad a_{12} = a_{12} \quad , \quad a_{22} \neq a_{22}$$

e perciò si ha per le due calotte la rappresentazione

$$(3.7) \quad \zeta = a_{11} (x^1)^2 + 2 a_{12} x^1 x^2 + a_{22} (x^2)^2 + \dots$$

Si vede poi subito che le due calotte definiscono (topologicamente) un *fascio* di calotte (∞^1) tale che due qualsiasi di esse hanno gli stessi pennelli asintotici in comune (basta prendere ad arbitrio a_{12} nelle (3.5) o a_{22} nelle (3.6)).

4. GIACITURA PRINCIPALE A QUATTRO DIMENSIONI. - Nell'ipotesi che la giacitura principale sia a quattro dimensioni ($q = 1, 2$) consideriamo due E_2 con la medesima tangente appartenenti uno ad una calotta ed uno all'altra e cerchiamone la giacitura principale. Gli E_2 siano rappresentati da ⁽²⁾

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x^p = \lambda^p t + \frac{\mu^p}{\alpha} t^2 + [3] & p = 1, 2; \alpha = 1, 2 \\ \zeta^q = \frac{\mu^q}{\alpha} t^2 + [3] & q = 1, 2 \\ z^i = \frac{\nu^i}{\alpha} t^2 + [3] & i = 1, \dots, n-4 \end{array} \right.$$

e siano riferiti a due parametri raccordati $t = t + \frac{\rho}{\alpha} t^2 + \dots$

Per l'appartenenza di un E_2 alla calotta (2.5) con lo stesso indice α deve aversi

$$(4.2) \quad \mu_{\alpha}^q = a_{\beta_1 \beta_2}^q \lambda^{\beta_1} \lambda^{\beta_2} \quad , \quad \nu_{\alpha}^i = a_{\beta_1 \beta_2}^i \lambda^{\beta_1} \lambda^{\beta_2}$$

(2) Non va sommato rispetto ad α ; bisognerà naturalmente distinguere μ_{α}^p per $p = 1$ (o 2) da μ_{α}^q per $q = 1$ (o 2).

da cui segue che le v^i_α non dipendono dall'indice α e può porsi $v^i = v^i_\alpha$ ($= 0$ se le $a^i_{p_1 p_2}$ sono state ridotte $= 0$).

La giacitura principale dei due E_2 è quindi determinata dalla loro tangente e dalla direzione

$$(4.3) \quad 0, 0, \mu^q_1 - \mu^q_2, 0, \dots, 0 \quad q = 1, 2$$

cioè da

$$(4.4) \quad 0, 0, (a^q_{p_1 p_2} - a^q_{p_2 p_1}) \lambda^{p_1} \lambda^{p_2} = A^q_{p_1 p_2} \lambda^{p_1} \lambda^{p_2}, 0, \dots, 0.$$

Questa direzione e la giacitura tangente alle due calotte determinano una 3-giacitura dipendente *unicamente* dalle due calotte e dalla tangente (non dagli E_2 considerati). Essa è l'analogo dello spazio $S(2, 1)$ osculatore ad una superficie di uno spazio proiettivo, in un punto in cui sia $S(2) \equiv S_4$, secondo una tangente assegnata. La diremo perciò la 3-giacitura $(2, 1)$ -osculatrice alla coppia di calotte, aventi una 4-giacitura principale, secondo una tangente assegnata.

Queste 3-giaciture $(2, 1)$ -osculatrici variano in un fascio, entro la 4-giacitura principale, al variare della tangente. Viceversa, data una 3-giacitura nella 4-giacitura contenente la 2-giacitura tangente alle calotte, rappresentata da $\xi_g \zeta^g = 0$, essa contiene la direzione (4.4) individuata da λ^1/λ^2 se e solo se

$$(4.5) \quad \xi_g A^g_{p_1 p_2} \lambda^{p_1} \lambda^{p_2} = 0.$$

Questa condizione determina nel punto due direzioni per cui la 3-giacitura data risulta $(2, 1)$ -osculatrice.

Poichè quelle 3-giaciture sono combinazioni lineari di due di esse, sicchè può porsi $\xi_g = \sigma^s_s \xi^s_g$ ($s = 1, 2$) le coppie di direzioni per le quali

$$(4.6) \quad \sigma^s_s \xi^s_g A^g_{p_1 p_2} \lambda^{p_1} \lambda^{p_2} = 0$$

descrivono, al variare della 3-giacitura, un'involuzione, eventualmente degenerare.

Le direzioni doppie di questa involuzione sono invarianti topologici della coppia di calotte: esse sono l'analogo della coppia di tangenti coniugate o dell'unica tangente asintotica (nel caso di un'involuzione degenerare) di una calotta σ^2_2 di un S_4 proiettivo. E per il fatto che le coppie dell'involuzione (4.6) e le 3-giaciture dipendono linearmente dalle stesse σ^s possiamo concludere:

Date due calotte σ^2_2 tangenti con 4-giacitura principale, ogni tangente determina una 3-giacitura che è $(2, 1)$ -osculatrice secondo quella tangente (cioè contiene le 2-giaciture principali relative a tutte le coppie di E_2 con quella tangente). Queste 3-giaciture variano in un fascio e si ha una proiettività fra questo fascio e le coppie di tangenti descriventi un'involuzione, eventualmente degenerare, le cui direzioni doppie sono pure invarianti topologici della coppia di calotte.

Si vede poi facilmente (dalla determinazione delle $A^g_{p_1 p_2}$) che le due calotte definiscono (topologicamente) un fascio (∞^1) tale che per due qualsiasi di esse si hanno gli stessi enti topologici relativi alle due calotte date.

5. GIACITURA PRINCIPALE A CINQUE DIMENSIONI. - Supposta la giacitura principale a cinque dimensioni, quindi $q = 1, 2, 3$ si trova come nel caso precedente che assegnata una tangente e considerati un E_2 qualsiasi della prima calotta e un E_2 qualsiasi della seconda con quella tangente la loro 2-giacitura principale risulta sempre appartenente ad una 3-giacitura definita ancora dalla 2-giacitura tangente alle due calotte e dalla direzione (4. 4) (di cui ora tre componenti, per $q = 1, 2, 3$ sono in generale non nulle).

Al variare della tangente, cioè di λ^1/λ^2 , questa 3-giacitura descrive, nella 5-giacitura principale, un cono quadrico V_4^2 , i cui S_3 generatori sono in corrispondenza con le tangenti alle calotte.

Questo cono è l'analogo topologico del cono di Del Pezzo relativo ad una calotta σ_2^2 di uno spazio proiettivo, avente lo spazio 2-osculatore $S(2) \equiv S_5$.

Chiamiamo perciò il cono trovato nella 5-giacitura il cono di Del Pezzo relativo alla coppia di calotte.

Poichè la direzione (4. 4) dipende soltanto dalle differenze $A_{p_1 p_2}^q$ (che possono ancora alterarsi per un fattore comune), alle due calotte date possono sostituirsi altre due calotte qualsiasi del tipo

$$a_{p_1 p_2}^q = \frac{h a_{p_1 p_2}^q + k a_{p_1 p_2}^q}{h + k}$$

con h, k , qualsiasi. Diremo fascio di calotte l'insieme ∞^1 così ottenuto. Riassumendo si ha:

Date due calotte σ_2^2 tangenti la cui giacitura principale (che è un ente topologico da esse definito) sia una 5-giacitura, rimangono topologicamente individuati:

1) per ogni tangente una 3-giacitura (contenente le giaciture principali degli E_2 delle due calotte con quella tangente);

2) il luogo di quelle 3-giaciture al variare della tangente, che è un cono quadrico (di 3^a specie), cono di Del Pezzo, è una proiettività fra le 3-giaciture e le tangenti da cui dipendono;

3) un fascio di calotte, tali che due qualsiasi di esse danno luogo allo stesso cono di Del Pezzo.

Ora si potrebbero estendere alle coppie di calotte i teoremi da me dati (3) per una calotta di uno spazio proiettivo; mi astengo per ora dal farlo.

(3) E. BOMPIANI, *Costruzione di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei*. «Rend. Acc. Lincei», ser. VI, vol. XXV, 1937; e *Costruzione delle calotte superficiali di 2° ordine in un iperspazio*. «Rend. Acc. Lincei», ser. VI, vol. XXIX, 1939.

Mineralogia. — *Celestina e apatite di stronzio sintetiche contenenti piccole quantità di mercurio.* Nota^(*) del Socio GUIDO CAROBBI.

Dalle ricerche di A. Stock e F. Cucuel⁽¹⁾ risulta che il mercurio è molto diffuso in natura, le rocce ne contengono da 0.0000006 a 0.000004 % in peso; in alcuni scisti ne sono state trovate quantità assai superiori, fino a 23 γ per 100 gr. di roccia ed in alcuni scisti argillosi del carbonifero fino a 143 γ (0.000143 %).

I terreni possono contenere fino a 81 γ di mercurio per ogni 100 gr. ed una polvere sminuzzata dall'attrito stradale fino a 170 γ; i carboni fossili ne contengono da 2.5 a 0.5 γ e pertanto è relativamente ricca di mercurio la fuliggine (circa 2700 γ per 100 gr.) e quindi le polveri stradali. Tracce minime di mercurio sono anche presenti nelle acque delle sorgenti e nelle acque piovane (da 0.01 a 0.5 γ). I terreni agrari sono relativamente poveri di mercurio e da essi le piccole quantità del metallo passano nelle piante e quindi negli animali i cui organi contengono tracce di mercurio; sono specialmente ricchi di questo metallo i pesci (fino a 18 γ per 100 gr.); anche gli alimenti contengono tracce di mercurio ed è probabile che esso abbia importanza biologica, la quantità di metallo contenuta nel vitto quotidiano sembra essere di 5 γ. In complesso si può affermare che le quantità di mercurio quasi ovunque presenti sono dell'ordine di grandezza 10^{-8} gr.

Constatato, con i dati sopra riportati, che la geochimica del mercurio, finora assai poco studiata, presenta un particolare interesse, resta da conoscere in quali minerali ed in genere in quali composti esso possa essere ospitato per poi essere diluito sulla litosfera.

La distribuzione in natura di questi elementi presenti in tracce nei minerali è regolata da leggi solo in parte conosciute. Sono noti i legami esistenti fra la differenziazione magmatica e la composizione chimica di certe soluzioni solide come i feldispati, le olivine, i pirosseni e la biotite; in generale c'è una differenziazione dei costituenti fondamentali dei minerali al variare della composizione del magma dal quale si sono separati, ciò costituisce una estensione delle fondamentali idee di W. Brogger⁽²⁾ sulla differenziazione magmatica.

Adesso H. Haberlandt⁽³⁾ ha messo in evidenza che anche per i costituenti minori dei minerali vale una regola analoga: a seconda della fase magmatica nella quale si è formato il minerale varia la quantità dei singoli costituenti minori e, talvolta, anche la natura di essi. Pertanto la presenza o meno di certi costituenti e la percentuale di essi presente può essere un indizio del tipo di processo

(*) Presentata nella seduta dell'11 febbraio 1950.

(1) *Die Verbreitung des Quecksilber.* «Naturwiss.», 22, p. 390 (1934).

(2) *Die Eruptivgesteine des Kristianagebietes.* — III. *Das Ganggefüge des Laurdalits.* Christiania 1898.

(3) *Ueber die gestzmässige Differentiation von Spurenelementen in Mineralien.* «Tschermaks mineralogische und petrographische Mitteilungen» (Dritte Folge), 1, p. 134 (1948).

Die Bedeutung der Spurenelemente in der geochemischen Forschung. «Monatshefte für Chemie», 77, p. 293 (1946).

genetico del minerale. Specialmente per i costituenti minori delle blende e delle apatiti è stata trovata una loro regola di differenziazione legata alla minerogenesi. Questi costituenti specifici per la conoscenza della genesi del minerale sono stati chiamati *elementi guida tipochimici*.

La presenza del mercurio nelle blende indica secondo Haberlandt (loc. cit.) una genesi a bassa temperatura; il mercurio è quindi un elemento guida tipochimico e perciò la sua ricerca oltre che un interesse generale geochimico presenta un interesse mineralogico.

Il metodo fondamentale col quale è stata ricostruita la distribuzione degli elementi costituenti minori della litosfera è quello spettrografico e fu V. M. Goldschmidt a iniziare da pioniere le ricerche in questo campo. La distribuzione e diluizione sulla litosfera delle terre rare, la grande diffusione dell'europio, la geochimica del gallio, del germanio, dell'indio, dei metalli nobili e di altri elementi rari furono conosciute in seguito a queste ricerche. Dopo l'analisi spettrografica con sensibilità massima intorno a 10^{-10} gr. fu usata anche l'analisi di fluorescenza che può raggiungere la sensibilità di 10^{-9} e, nel caso dell'uranio, di 10^{-11} e poi i metodi radioattivi con sensibilità fino a 10^{-15} ed altri.

Al mercurio l'analisi spettrografica normale non è applicabile per la sua grande volatilità perciò sono ancora scarse le nostre conoscenze della sua geochimica. Stock e Cucuel, nel lavoro già citato, associarono metodi chimici alla misura micrometrica delle goccioline di mercurio distillato ma i loro risultati sono molto parziali e talvolta incerti. Pertanto la geochimica del mercurio deve essere ancora costruita associando nuovi metodi di dosatura alle nostre conoscenze cristallogchimiche.

In alcune proposte per la costruzione di un sistema cristallogchimico degli ioni⁽⁴⁾ feci notare la vicinanza dei raggi ionici medi del mercurio mercurico e dello stronzio (Hg^{+2} 1,11; Sr^{+2} 1,18); in conseguenza avrebbe dovuto essere possibile una loro sostituzione parziale nei reticoli dei minerali per quanto dal punto di vista chimico e mineralogico i due cationi siano molto diversi. U. Ventriglia⁽⁵⁾ in un tentativo di sviluppo della sistematica cristallogchimica degli ioni basandosi, oltre che sul valore del raggio ionico e della valenza, anche sul tipo di legame reticolare e sul numero di coordinazione ha confermato la vicinanza del Hg^{+2} ai cationi alcalino terrosi.

Alcune ricerche fatte con metodi colorimetrici su celestine e stronzianiti naturali mi hanno permesso di accertare che esse possono contenere da 0.0001 a 0.0017%⁽⁶⁾ di mercurio; questi dati non poterono essere controllati con metodi spettrografici normali ma un metodo di scintilla interrotta messo di recente a punto in questo istituto da R. Pieruccini⁽⁷⁾ ha consentito di confermare i dati in questione e affermare che il mercurio è assai diffuso nei composti naturali di

(4) *Proposte per un sistema cristallogchimico degli ioni*. «Atti della Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena», ser. 5^a, 7, p. 128 (1947).

(5) *Sistematica periodica degli elementi che con O, OH, ed F generano reticoli cristallini ionici a legami ionico covalenti*. «Periodico di Mineralogia», 18, p. 41 (1949).

(6) G. CAROBBI e R. PIERUCCINI, *Sulla presenza di piccole quantità di mercurio in alcune celestine e stronzianiti naturali*, da stampare sugli «Atti della Società Toscana di Scienze Naturali», 1950.

(7) Lavoro in corso di elaborazione.

stronzio. D'altra parte Saukov⁽⁸⁾ aveva identificato tracce di mercurio in alcune baritine russe e preparato cristalli artificiali di questo minerale con mercurio. Egli, dopo l'esame di vari campioni di rocce intrusive ed effusive ritiene che il contenuto medio di mercurio della crosta terrestre sia di $7,7 \times 10^{-6} \%$.

Per la preparazione dei cristalli di celestina mercurifera a 150 cc di una soluzione concentrata di cloruro mercurico sono stati aggiunti 15 cc di acido solforico concentrato e poi 100 cc di una soluzione di cloruro di stronzio (contenente gr. 40 di SrCl_2 per litro). Il precipitato, lasciato a contatto del liquido per alcuni giorni, veniva poi filtrato e lavato a fondo con acido solforico diluito ed acqua.

I cristalli rombici di celestina, minutissimi (con dimensioni dell'ordine di 0.01 mm) sono costituiti, per quanto è possibile vedere date le dimensioni, dalla combinazione della base {001} col prisma {110} ed hanno due *habitus* distinti: tabulare secondo la base che risulta limitata da esili facce del prisma, oppure tabulare secondo una coppia di facce del prisma verticale, in tal caso i cristallini hanno contorno rettangolare e naturalmente estinzione parallela ai lati. Nei cristalli del primo tipo col metodo dell'immersione ho misurato:

$$\beta = 1,622 \quad \gamma = 1,629$$

in quelli del secondo tipo ho misurato $\alpha = 1.620$ ed ho accertato che l'altro indice, secondario, è compreso fra 1,629 e 1,622.

L'esame qualitativo ha mostrato che i cristalli contenevano tracce di mercurio rivelabili col metodo di Schmidt e Tornow dell'attivazione dell'alluminio o col ditizone. Per la dosatura del mercurio ho preferito il metodo del ditizone recentemente discusso da H. Barnes⁽⁹⁾ ed applicato da F. L. Kozelka⁽¹⁰⁾ alla determinazione del mercurio nei materiali biologici e da R. F. Milton e J. L. Hoskins⁽¹¹⁾ all'analisi delle urine.

Per l'analisi la celestina veniva disgregata con carbonato potassico ed il residuo disciolto in poco acido nitrico. Alla soluzione, neutralizzata con ammoniaca fino al viraggio al giallo-rossastro del bleu di timolo (usato come indicatore) venivano aggiunti 20 cc di una soluzione al 0.005% di ditizone in CCl_4 . L'eccesso di ditizone verde veniva estratto, in un piccolo separatore, con ammoniaca concentrata e la colorazione gialla o rosso-arancio del complesso ditizone-mercurio veniva confrontata coi colori ottenuti, nelle identiche condizioni sperimentali, con soluzioni titolate di nitrato mercurico ottenute sciogliendo una quantità nota di mercurio metallico purissimo in acido nitrico e diluendo successivamente le soluzioni. Per ottenere buoni risultati è assolutamente necessario usare ditizone purificato al momento dell'uso sciogliendolo in ammoniaca e riprecipitandolo con una corrente di SO_2 ; il ditizone purificato e sciolto in CCl_4 , in assenza di mercurio viene estratto completamente, nel separatore, dall'ammoniaca ed il tetracloruro di carbonio resta incolore. È anche necessario operare sempre con soluzioni che

(8) *Mercury in barytes*. «Compt. Rend. Acad. Sci. U.R.S.S.», 22, p. 254 (1939); *The clark of mercury in the earth's crust*, idem, 32, p. 358, (1941).

(9) *The determination of mercury by means of dithizone*. «The analyst», 72, p. 469 (1947).

(10) *Determination of mercury in biological material*. «Industrial and engineering chemistry. Analytical chemistry», 19, p. 494 (1947).

(11) *The estimation of traces of mercury in urine*. «The analyst», 72, p. 6 (1947).

diano col bleu di timolo il giallo rossastro: un pH diverso ostacola la determinazione. Il risultato dell'analisi dei cristalli di celestina è stato il seguente:

Hg % 0.002.

La dosatura spettrografica ha dato esattamente lo stesso valore. Non era possibile servirsi dell'arco per la grande volatilità del mercurio perciò è stata usata una scintilla interrotta con 360 scariche di 1/16 di secondo ad intervalli di 7/16 di secondo e quindi con un tempo di posa effettivo di 22,5 sec. Il residuo della disgregazione della celestina con carbonato potassico veniva disciolto e la soluzione concentrata fino a cc 1.5 e elettrolizzata, dopo aggiunta di gr. 0.02 di NaCl in una cella di complessivi 4 cc con un catodo di alluminio del diametro di 5 mm ed un anodo di carbone.

Il catodo di alluminio era fissato ad una estremità della cella con un tappo di gomma forato e, per evitare l'attivazione, veniva sottoposto alla scintilla interrotta davanti alla fenditura dello spettrografo immediatamente dopo terminata l'elettrolisi. Con questo metodo possono essere rivelate qualitativamente quantità di mercurio dell'ordine di $5 \cdot 10^{-6}$ e dosate rigorosamente quantità dell'ordine di $3,2 \cdot 10^{-5}$. Come righe di riferimento vengono usate alcune righe del magnesio.

Accertata sicuramente la presenza del mercurio nella celestina sintetica rimaneva da stabilire se i cristalli erano realmente omogenei in modo da potere essere considerati dei cristalli misti. L'esame microscopico molto dettagliato di essi ha mostrato che non sono realmente omogenei e che pertanto non possono essere considerati dei veri cristalli misti; è stato infatti possibile mettere in evidenza, immergendoli in opportuni liquidi, che porzioni delle tavolette esaminate sono costituite da una sostanza con indici di rifrazione molto superiori a quelli della celestina. Tutti i cristallini contengono queste porzioni minime della loro superficie tabulare fatta con celle elementari di una sostanza diversa e spesso nei cristallini tabulari secondo la base ed a contorno rombico la parte con mercurio costituisce quattro piccoli rettangoli con l'allungamento parallelo ai quattro lati della base. Importante è rilevare che i cristallini bolliti a lungo con acqua regia conservano le stesse caratteristiche. Dopo queste osservazioni microscopiche non ho mancato di considerare che, dato che il contenuto di mercurio dei cristalli era del 0.002 %, la porzione di superficie di essi occupata dal solfato di mercurio doveva essere talmente piccola da non potersi identificare col microscopio ma ho dovuto convincermi del contrario specialmente esaminando i cristalli che descriverò in seguito (che contenevano il 1.5 % di Hg) nei quali la superficie apparentemente occupata dal composto di mercurio appariva al microscopio costituita da più della metà della superficie totale ciò che pare dovuto alla grande differenza fra gli indici di rifrazione dei due composti. In numerose altre preparazioni di celestina con questo metodo, variando le condizioni di concentrazione dei liquidi di partenza, non ho ottenuto cristallini più ricchi di mercurio.

Ho tentato allora un'altra via: gr. 20 di HgSO_4 furono trattati con poco acido nitrico concentrato per avere la sicurezza che tutto il mercurio fosse allo stato mercurico e l'acido nitrico fu poi scacciato con poco acido solforico, il prodotto fu disciolto con 250 cc di acqua contenente 40 cc di acido solforico concentrato

e la soluzione fu precipitata con gr. 10 di SrCl_2 disciolti in poca acqua. Il precipitato bianco cristallino di celestina, lasciato un giorno a contatto col liquido, fu poi lavato molte volte con acido solforico 1:10 e poi con acetone ed etere; i cristallini disciolti in acido solforico concentrato mostrano di non contenere neanche tracce minime di cloro cioè di essere ben lavati. L'analisi ha dato i seguenti risultati:

	Hg . . .	1.53	0.008
	Sr . . .	45.44	0.518
	SO_4 . . .	51.18	0.533
a 110°	H_2O . . .	0.64	0.035
sopra 110° ⁽¹²⁾	H_2O . . .	1.08	0.060
		<hr/>	99.87

L'esame microscopico accurato di tali cristalli mostra che essi non sono realmente omogenei nonostante che il fotogramma eseguito col metodo di Debye non mostri la presenza di alcuna riga diversa da quelle della celestina. L'*habitus* dei cristalli è identico a quello dei precedenti, adesso sembra che una gran parte della superficie di essi sia costruita col materiale ad alto indice di rifrazione. Trattati con acqua regia bollente i cristalli conservano completamente le loro caratteristiche.

Nelle stesse condizioni sperimentali precipitando con una quantità minore di cloruro di stronzio si ottengono gli stessi risultati.

Altri cristalli di celestina furono ottenuti precipitando a caldo con gr. 12 di SrCl_2 sciolti in poca acqua 300 cc di una soluzione contenente gr. 20 di HgSO_4 e gr. 40 di acido solforico concentrato. Dopo essere stato tre giorni a contatto col liquido il precipitato veniva lavato con acido solforico 1:10 e poi a lungo con acetone e quindi con etere. Il prodotto conteneva notevoli quantità di mercurio ⁽¹³⁾ ma l'analisi microscopica dettagliata ha mostrato che esso è costituito dai soliti cristalli di celestina misti a aghetti rari ma isolati di un solfato mercurico.

Dai risultati delle due analisi sembra di potere concludere che il composto di mercurio è il solfato neutro rombico come la celestina. Infatti secondo le ricerche di Ditte ⁽¹⁴⁾ le soluzioni usate per le preparazioni descritte (che contenevano più di 67 gr. di SO_3 per litro) non devono determinare l'ingiallimento del solfato mercurico cioè la formazione di sali basici. L'esame delle curve del diagramma $\text{SO}_3\text{--HgO}$ costruito molto più recentemente da C. Hoitsema e J. M. van Bemmelen ⁽¹⁵⁾ porta però ad ammettere come possibile la coesistenza delle nostre soluzioni col sale basico $2 \text{HgO} \cdot \text{HgSO}_4$. Non è possibile stabilire quale sia la funzione dell'acqua.

L'apatite di stronzio è stata preparata portando a 1000° un miscuglio di gr. 10 di fosfato di stronzio, gr. 20 di cloruro di stronzio e gr. 2 di cloruro mercurico e lasciando poi separare i cristallini di apatite dal cloruro di stronzio fuso. La massa raffreddata è stata poi trattata con acqua ed acido acetico. Naturalmente durante la fusione si svolgono fumi di sublimato ma l'apatite contiene ancora piccole

(12) Determinata col metodo di Penfield.

(13) Hg 4.29 Sr 43.11 SO_4 50.31 H_2O 2.09. Somma 99.80.

(14) « Ann. Sci. École Normale », 5, p. 83 (1876).

(15) J. W. MELLOR, *A comprehensive treatise on inorganic and theoretical chemistry*. Vol. 4, p. 971 Londra 1940.

quantità di mercurio rivelabili con la reazione del ditizone e, molto bene, anche con la reazione di attivazione dell'alluminio.

La dosatura è stata eseguita col metodo colorimetrico al ditizone già descritto e per via spettrografica usando l'elettrolisi su elettrodo di alluminio e poi la scintilla interrotta. Con ambedue i metodi ho trovato:

$$\text{Hg } \% 0.001$$

I cristalli dell'apatite di stronzio presentano la combinazione del prisma $\{10\bar{1}0\}$ con la bipiramide $\{10\bar{1}1\}$ e la base $\{0001\}$, l'*habitus* è quasi sempre tabulare secondo la base (mentre quello delle apatiti naturali è quasi sempre prismatico), solo alcuni cristalli sono allungati secondo l'asse verticale e tabulari secondo una coppia di facce del prisma esagonale. I cristalli prismatici sono lunghi al massimo 0.01 mm e quelli pinacoidali hanno un diametro medio di 0.05 mm. Gli indici di rifrazione misurati col metodo dell'immersione risultano essere:

$$\omega = 1.658 \quad \epsilon = 1.664.$$

L'esame accurato del preparato mostra che anche in questi cristallini vi sono delle apparenti minuscole inclusioni con indice molto più elevato di quelli del cristallo di apatite.

Per concludere, dopo aver stabilito che, sia nel caso della celestina sia in quello della apatite non si tratta di veri cristalli misti resta da inquadrare la questione fra i fenomeni noti.

Non può essere presa in considerazione l'epitassia. È passato più di un secolo da quando fu ottenuta l'orientazione dei cristalli di ioduro potassico sulla mica. Nel 1928 L. Royer⁽¹⁶⁾ ha riassunto le nostre conoscenze sull'argomento, ha dedotto delle regole perchè possa verificarsi il fenomeno ed ha illustrato molti nuovi casi. G. Deicha⁽¹⁷⁾ si è poi occupato del mutuo orientarsi dei reticoli cristallini in diversi lavori ma è evidente che in ogni caso si tratta di un vero miscuglio per quanto le due specie di cristalli siano orientate mutualmente.

Invece nel caso della celestina con mercurio non si tratta di una miscela perchè pestando i cristalli e bollendoli con acqua regia essi conservano il mercurio, si può dire che il cristallo è costruito in parte con celle del composto di mercurio incapsulate nel corrispondente composto di stronzio. E neanche possono essere considerati cristalli misti anomali perchè non si presentano al microscopio come una fase assolutamente omogenea. Dei cristalli misti anomali si è occupato Seifert⁽¹⁸⁾ e molti altri autori ma tutti li hanno sempre considerati omogenei.

Ritengo che si possa concludere che il fenomeno osservato, forse molto diffuso fra i cristalli naturali, sia intermedio fra i veri cristalli misti ed i miscugli (anche se costituiti da sostanze diverse associate e mutualmente orientate) e propongo di distinguerlo col nome di *pseudoisomorfismo*.

(16) *Recherches experimentales sur l'épitaixi ou orientation mutuelle de cristaux d'espèces différentes*. «Bull. Soc. Franç. Min.», 51, p. 7 (1928).

(17) *Les faciès cristallographiques de sursaturation et de surfusion*. «Bull. Soc. Franç. de Min.», 68, p. 198 (1945); *Épitaixie et déséquilibre cristallogénétique*. «Idem», 70, p. 177 (1947); *Épitaixie de chlorure de potassium sur les micas*. «Idem», 70, p. 318 (1947).

(18) *Die anomalen Mischkristalle*. «Fortschr. d. Min.», 19, p. 103 (1935) e «idem», 22, p. 324 (1936).

È noto che si passa dalla isogonia all'omeomorfismo quando, oltre alle costanti analoghe, c'è fra due composti analogia di struttura e di composizione chimica; c'è poi isomorfismo quando i due composti danno anche cristalli misti almeno in proporzioni limitate e ciò avviene quando c'è analogia di stato fisico delle particelle e analogia delle azioni esercitate dai leptoni corrispondenti nei due reticoli e quindi analogia delle dimensioni delle particelle.

I ben noti vari tipi di isomorfismo nei quali, si potrebbe dire, il fenomeno è più o meno accentuato, sono tutti compresi fra l'isomorfismo massimo che si verifica fra due composti di formula analoga, con eguale simmetria e con costanti vicine, solubili allo stato solido in tutte le proporzioni e l'isomorfismo minimo che si ha quando nel reticolo vi è una sostituzione molto parziale di leptoni con leptoni vicarianti aventi dimensioni vicine senza che sia talvolta neanche possibile scrivere la formula di un composto contenente i secondi leptoni analogo al composto dove essi devono entrare come vicarianti dei primi.

Tutti i tipi di isomorfismo possono essere considerati, nei composti ionici, un caso particolare del fenomeno generale dell'isomorfogenismo fra ioni; stabiliti i gruppi di ioni isomorfogeni, che possono cioè scambievolmente sostituirsi nei reticoli, è possibile, almeno in parte, prevedere in quali reticoli un certo elemento potrà imboscarsi e quindi come si diluirà sulla litosfera.

All'isomorfismo minimo segue, nell'ordine decrescente di intensità del fenomeno, l'assorbimento interno di Balarew, detto da Smekal adsorbimento reticolare, che si verifica nel caso della fosforescenza o di alcuni colori allocromatici (colore rosso del rubino dovuto al cromo).

I cristalli ordinari dei composti sono caratterizzati da un ordine assoluto delle particelle che li costituiscono, invece nei cristalli misti ed in particolare in quelli dove si ha sostituzione isomorfa fra elementi con valenza diversa bisogna ammettere che ci sia solamente una quasi omogeneità ideale. Quando nella scheelite una parte del calcio viene sostituito dalle terre rare trivalenti si deve ammettere una distribuzione statistica dell'elemento trivalente nei nodi reticolari, dei quali alcuni possono rimanere non occupati; questo tipo di isomorfismo è intermedio come intensità del fenomeno fra l'isomorfismo massimo e l'isomorfismo di massa di Klein.

Ricordati tutti questi gradi di isomorfismo possiamo collocare il descritto pseudoisomorfismo fra l'isomorfismo minimo e le associazioni di cristalli cioè i miscugli come, direi, i cristalli liquidi sono intermedi fra un vero solido, cioè un cristallo, ed un liquido cioè un omogeneo con particelle in disordine.

Non sono d'accordo con V. Chlopin e B. Nikitin che ritennero che i cristalli di clorati e permanganati alcalini contenenti tracce di PbSO_4 fossero un termine di passaggio fra i veri cristalli misti ed i cristalli zonati; questi ultimi sono dei veri cristalli misti e generalmente fra composti con isomorfismo massimo e la zonatura, dovuta alla viscosità della fase liquida durante la cristallizzazione, non ha alcuna relazione con l'isomorfismo; piuttosto può darsi che si tratti di un termine di passaggio fra l'isomorfismo e lo pseudoisomorfismo.

Ritengo che il fenomeno dello pseudoisomorfismo sia molto diffuso in natura e che ad esso sia dovuta la distribuzione e quindi la diluizione di alcuni elementi non isomorficamente ospitabili nei reticoli dei minerali comuni.

Patologia. — *Ricerche sulla separazione di acido nucleinico da cellule batteriche per azione del calore*^(*). Nota^(**) del Corrisp. LUIGI CALIFANO.

Da cellule viventi di *Pneumococco* tipo III esposte per 10 minuti all'azione del calore, a temperature comprese tra 40° e 70° C. si ha passaggio nel liquido

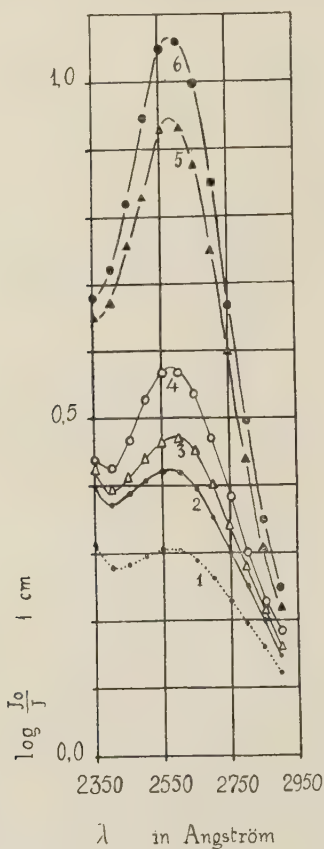


Fig. 1. — *Pneumococco* III.

Curve di assorbimento del liquido di centrifugazione di sospensioni batteriche tenute per 10 minuti:

- 1 a 25° C.
- 2 a 45° C.
- 3 a 50° C.
- 4 a 55° C.
- 5 a 60° C.
- 6 a 70° C.

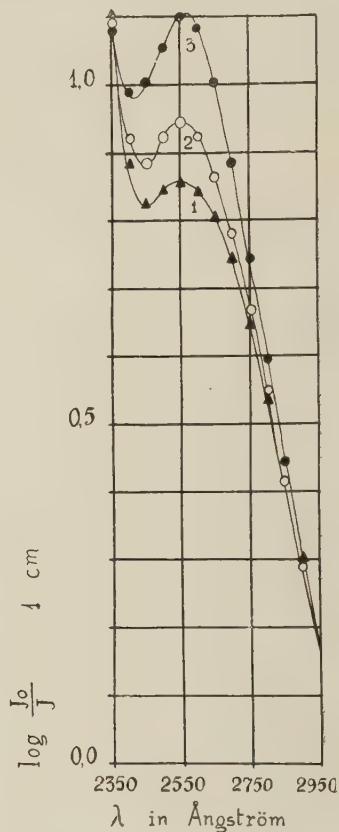


Fig. 2. — *Gonococco*.

Curve di assorbimento del liquido di centrifugazione di sospensioni batteriche tenute per 10 minuti:

- 1 a 40° C.
- 2 a 60° C.
- 3 a 70° C.

ambiente di acido ribonucleinico, che si può dimostrare sia in via spettrofotometrica con la curva di assorbimento che ha il suo apice a 2575-2600 Ångström,

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Microbiologia dell'Università di Napoli.

(**) Presentata nella seduta del 10 dicembre 1949.

sia con la reazione di Bial. Nella figura 1 sono riportate le curve corrispondenti ad un esperimento del genere, e da esse risulta che la quantità di acido nucleinico staccatosi dalla cellula è in rapporto con la temperatura nel senso che la curva più alta corrisponde a quella del liquido separato per centrifugazione di germi tenuti a 70° C. e la più bassa a quella corrispondente a germi tenuti a temperatura ambiente (25° C.). In queste ultime condizioni si ha una minima liberazione di acido nucleinico, appena avvertibile allo spettrofotometro, mentre a 45° C. la quantità che si libera è nettamente apprezzabile. Analogo risultato si ha con il gonococco che a 40° C. già libera una ben dimostrabile quantità di acido nucleinico nel liquido di sospensione (fig. 2). Se si ripete lo stesso esperimento con lo

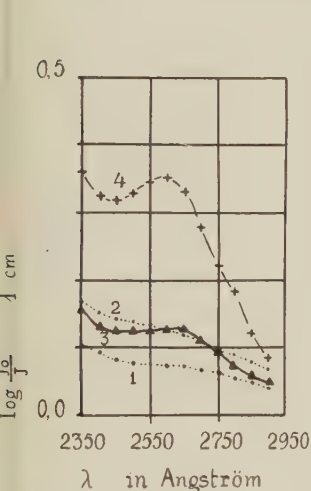


Fig. 3. - Stafilococco aureo.

Curve di assorbimento del liquido di centrifugazione di sospensioni batteriche tenute per 10 minuti:

- 1 a 40° C.
- 2 a 50° C.
- 3 a 60° C.
- 4 a 70° C.

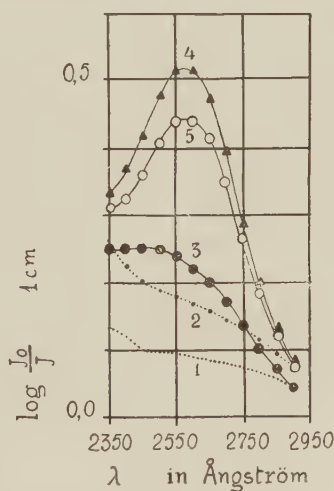


Fig. 4. - Coli 802 I. S. N.

Curve di assorbimento del liquido di centrifugazione di sospensioni batteriche tenute per 10 minuti:

- 1 a 25° C.
- 2 a 40° C.
- 3 a 50° C.
- 4 a 60° C.
- 5 a 70° C.

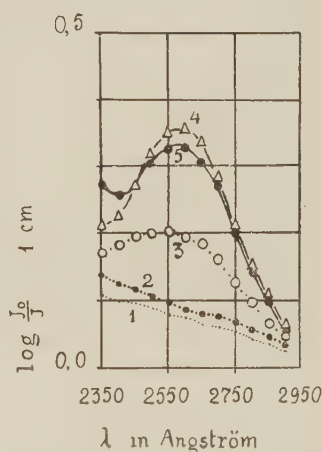


Fig. 5. - Coli 806 I. S. N.

Curve di assorbimento del liquido di centrifugazione di sospensioni batteriche tenute per 10 minuti:

- 1 a 25° C.
- 2 a 40° C.
- 3 a 50° C.
- 4 a 60° C.
- 5 a 70° C.

stafilococco aureo, soltanto a 65-70° C. si ha separazione di acido nucleinico dalle cellule; temperature inferiori sono senza effetti, come si può vedere nella figura 3. Anche il *Micrococcus lysodeicticus* si comporta come lo stafilococco, cioè la liberazione di acido nucleinico avviene solo nelle prove esposte a temperature tra 60° e 70° C. Il *Bacterium coli* mostra un comportamento intermedio, cioè inizio del fenomeno intorno ai 50° C. come è riportato nelle figure 4-5. I vari stipti di questi germi mostrano differenze apprezzabili: in qualcuno, come nel Coli 802 I.S.N. (fig. 4) solo nel liquido corrispondente a germi tenuti a 60° C. si dimostra la curva di assorbimento dell'acido nucleinico; nel Coli 806 I.S.N. (fig. 5) una lieve quantità si ritrova nel liquido corrispondente a germi tenuti a 50° C. Sembra costante, con i quattro ceppi con cui si è sperimentato, la osservazione che a 60° C. la quantità di acido nucleinico che si libera è un poco più elevata che a 70° C. mentre per gli altri germi provati si è ottenuto il massimo di separazione a 70° C.

La prova di Bial è costantemente positiva con intensità corrispondenti alle curve di assorbimento.

Il fenomeno osservato può, credo, servire di spiegazione a due questioni: a quella della perdita della gram positività per azione del calore, osservata da Dubos⁽¹⁾ ed a quella della inattivazione dei germi per azione del calore.

Dubos incidentalmente osservò che pneumococchi riscaldati a 75° C. perdevano la gram positività e non erano perciò utilizzabili nelle ricerche sulla autolisi, fatto successivamente confermato da Dubos e MacLeod⁽²⁾ nelle ricerche sull'azione dell'enzima leucocitario e tissulare su tali germi per cui Dubos propose il metodo della « flash sterilization » consistente nella rapida immersione di una piccola quantità di cellule vive in acqua distillata a 75° C. e successivo rapido raffreddamento; in tali condizioni i pneumococchi conservano il carattere gram positivo.

Questo metodo è stato recentemente utilizzato da Webb⁽³⁾ nelle sue ricerche sulla azione del lisozima su germi gram positivi uccisi al calore e l'Autore dice che specialmente il Cl. welchii presenta perdita della gram-positività se gradualmente portato a 80° C. mentre conserva il carattere gram positivo se trattato con il metodo di Dubos. Poichè noi ora sappiamo che la gram positività è dovuta alla presenza nei germi di ribonucleinato di magnesio e poichè le presenti ricerche dimostrano che il calore determina distacco di acido nucleinico dalle cellule che passa nel liquido di sospensione, possiamo facilmente intendere il fenomeno di Dubos.

Evidentemente la « flash sterilization » con la coagulazione istantanea delle proteine limita o impedisce il passaggio di acido nucleinico dalla superficie batterica nel mezzo circostante.

È da notare, però, che non il solo acido nucleinico che concorre al carattere della gram positività, viene staccato dai batteri per azione del calore perchè il fenomeno si avvera anche con germi gram negativi (gonococco, B. coli) onde si deve concludere che tutto o quasi tutto l'acido ribonucleinico cellulare viene distaccato dalla trama protoplasmatica, così nei germi gram positivi che in quelli gram negativi.

La seconda questione, cui le presenti ricerche possono avere riferimento, è quella della inattivazione dei batteri al calore. È comune cognizione che i vari germi sono variamente sensibili ad esso, muorendo alcuni a temperature relativamente basse (gonococco, meningococco) altri a temperature notevolmente più elevate (70 e più gradi) altri in zone intermedie, tanto che di ogni specie batterica si suole indicare la temperatura di inattivazione. È noto pure che tutte le ricerche finora eseguite non hanno ancora fornito una spiegazione soddisfacente del fenomeno e soprattutto strano è sempre restato il fatto della mancanza di rapporto tra temperatura di inattivazione e temperatura di denaturazione delle proteine. La

(1) R. J. DUBOS, *The autolytic system of pneumococci*. « J. of exp. Med. », vol. 65, p. 875 (1937).

(2) R. J. DUBOS and C. M. MACLEOD, *The effect of a tissue enzyme upon pneumococci*. « J. of exp. Med. », vol. 67, p. 791 (1938).

(3) M. WEBB, *The action of lysozyme on heat-killed Gram-positive Microorganisms*. « J. of gen. Microb. », vol. 2, p. 260 (1948).

dimostrazione data con le presenti ricerche di liberazione dell'acido nucleinico dai germi per azione del calore può, forse, utilmente contribuire alla spiegazione del fenomeno. Liberandosi acido nucleinico la cellula perde un costituente essenziale del suo metabolismo ed un fattore altrettanto essenziale per la sua moltiplicazione (ved. Caspersson⁽⁴⁾) e perciò è praticamente inattivata, anche se le proteine del suo protoplasma non sono coagulate. Tale spiegazione appare probabile anche per il fatto che i vari germi studiati mostrano comportamento diverso: il gonococco, ad esempio, è tra i germi provati quello col quale si riesce a dimostrare distacco di acido nucleinico già a temperature modeste e vicine a quella di inattivazione (40° C.), lo pneumococco presenta il fenomeno intorno ai 55° C., il coli intorno a 60° C. e lo stafilococco solo se riscaldato a 70° C. dà una modesta aliquota di acido nucleinico nel mezzo di sospensione, fatti questi che appaiono in buona corrispondenza con le temperature di inattivazione delle singole specie microbiche. Sono, però, necessarie ricerche sistematiche, particolarmente con i bacilli sporulanti e relative spore, come con i germi termofili, come utili ricerche potranno eseguirsi con cellule di varia età al fine di stabilire se l'inizio del fenomeno avviene nelle cellule più giovani od in quelle più vecchie ed alla soglia o già in via di autolisi. Ricerche queste ed altre particolarmente interessanti data la importanza che gli acidi nucleinici hanno nella costituzione e naturalmente nelle funzioni biologiche dei singoli germi, onde opportunamente Chargaff⁽⁵⁾ parlando di acidi nucleinici e nucleoproteine batteriche dice: « Each bacterial species represents a new problem for which a specific solution must be found ».

MATERIALE E METODI. — Le culture adoperate sono state: Pneumococco tipo III in brodo Martin con glucosio, Gonococco in agar d'Antona, *Micrococcus lysodeicticus*, B. coli e Stafilococco aureo in agar comune. I germi venivano lavati tre volte alla centrifuga con soluzione fisiologica e risospesi pure in soluzione fisiologica. Le sospensioni batteriche, dopo essere state esposte alle varie temperature per dieci minuti, venivano centrifugate a 16.000 giri (tempo totale di centrifugazione 22 minuti). I liquidi di centrifugazione, come tali o diluiti con acqua distillata, erano esaminati con uno spettrofotometro di quarzo di Beckmann, in cuvette di quarzo con lati di 1 cm.

(4) T. CASPERSSON, *The relations between nucleic acid and protein synthesis*. «Symposia of the Society for experimental biology.», vol. 10, p. 127 (1947).

(5) E. CHARGAFF, *On the nucleoproteins and nucleic acids of Microorganisms*. «Cold Spring Harbor Symposia», vol. XII, p. 28 (1947).

Biologia. — *Distribuzione della fosfatasi alcalina in cellule coltivate «in vitro»*^(*). Nota di GIUSEPPE LEVI e ABRAM FAJER, presentata^(**) dal Socio G. LEVI.

In una recente comunicazione⁽¹⁾ uno di noi pose in rilievo i vantaggi che il metodo della coltivazione delle cellule *in vitro* presenta per ricerche istochimiche sulla fosfatasi. Proseguendo in quest'ordine di indagini, ci siamo proposti di rintracciare sullo stesso materiale la distribuzione della fosfatasi alcalina col metodo di Gomori modificato da Danieli. Questo metodo fu applicato sulle colture, come diremo più esattamente in seguito, da Willmer⁽²⁾ e da Chèvremont e Firket⁽³⁾.

MATERIALE E TECNICA. — Furono studiate a preferenza cellule della zona di migrazione del cuore di embrione di pollo dal 5° al 7° giorno, le quali hanno, almeno ai primi passaggi, distinti i caratteri di mioblasti e non possono essere confuse cogli elementi a sottili prolungamenti ramificati, denominati comunemente fibroblasti.

Furono inoltre studiate colture di fegato di embrioni dal 6° al 7° giorno, nelle quali si ebbe abbondante migrazione di cellule endoteliali e talora di cellule epatiche in forma di sottili lamine epiteliali. È noto infatti per le ricerche di W. Lewis e di G. Levi che nelle colture di fegato a questo stadio di sviluppo (nel quale non esiste mesenchima) si ha migrazione di cellule affusate in gran numero, a mutuo contatto di margini, che derivano dall'endotelio dei sinusoidi. Solamente alla periferia della zona di migrazione questi elementi si espandono in superficie in grado considerevole ed assumono i caratteri di elementi molto grandi con tozze propaggini. Per ulteriori caratteri su questi elementi e sui mioblasti vedi la monografia di uno di noi⁽⁴⁾. Le colture vennero allestite in goccia pendente e studiate soltanto al 1° passaggio; il mezzo di coltura era a vicenda costituito da plasma e da succo di embrioni a parti eguali, oppure diluito con liquido Tyrode in varia proporzione; alcune colture furono allestite in mezzo liquido disteso in uno strato molto sottile (siero di sangue, Tyrode e succo di embrioni con o senza aggiunta di traccie di plasma). Le colture venivano studiate viventi a vario intervallo di tempo e venivano fissate di solito alla 48-52° ora; furono complessivamente utilizzate circa 400 colture ben riuscite. Le colture che dovevano essere sottoposte alla reazione di Gomori venivano fissate in formalina al 10% in liquido Ringer a vario pH. Il periodo d'incubazione della coltura fissata era di solito di 24 ore. Furono eseguiti controlli in un mezzo d'incubazione privo di glicerofosfato e parimenti in mezzi nei quali l'azione fosfataseica fu inibita col cianuro di potassio. Diremo subito che i controlli, dal punto di vista della reazione fosfataseica, diedero sempre risultato negativo. A differenza di quanto uno di noi ha

(*) Ricerche eseguite nella «Fondazione Andrea e Virginia Matarazzo» in San Paolo (Brasile).

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

(1) A. FAYER, «Rendic. Accad. Lincei»,

(2) E. N. WILLMER, «I. exp. Biol.», I, 11, (1942).

(3) CHÈVREMONT et H. FIRKET, «Arch. Biol.», 9, 441 (1949).

(4) G. LEVI, *Explantation*. «Ergebn. Anat.», 31, (1934).

notato per la fosfatasi acida, non abbiamo apprezzato conseguenze nella distribuzione della fosfatasi in relazione alla durata del periodo d'incubazione.

OSSERVAZIONI. — In tutte le cellule studiate, elementi miocardici, endoteliali del fegato, cellule epatiche, mioblasti derivati dalle gemme muscolari (in colture di embrioni dall'8° al 12° giorno), il nucleo senza eccezione reagiva positivamente. Il nucleolo appariva intensamente colorato in bruno scuro; una colorazione diffusa brunastrea meno intensa si notava nel succo nucleare; tale colorazione diffusa era di varia intensità a seconda del grado di espansione in superficie della cellula e per conseguenza del nucleo; in cellule assottigliate in grado estremo il succo nucleare era scarsamente colorito. Nelle cellule in mitosi i cromosomi apparivano intensamente colorati, soprattutto nelle cellule nelle quali l'espansione in superficie si era mantenuta anche durante la mitosi⁽⁵⁾; invece nelle cellule che durante la mitosi assumevano forma sferica la reazione fosfatasica era meno intensa o difettava.

Per quel che riguarda la distribuzione dell'enzima nel citoplasma, il fatto più saliente era la costante presenza di zone colorate in bruno scuro in rapporto materiale colle goccioline lipidiche, naturalmente ove queste esistevano. Talora vi era un semplice anello bruno che circondava le singole goccioline; più di sovente ove si erano accumulate numerose grandi goccioline lipidiche, anche gli interstizi tra questi apparivano colorati (fig. 1). Un aspetto particolare variabile nelle singole cellule, presenta quella zona, denominata « zona di Golgi », la quale nelle cellule della zona di migrazione delle colture è in intimo rapporto materiale con quella faccia del nucleo che è rivolta verso la direzione della migrazione della cellula; in corrispondenza della zona di Golgi il nucleo presenta un'incavatura più o meno profonda. È noto che alcuni Autori hanno descritto in quella regione anche nelle cellule coltivate *in vitro*, come nelle cellule dei tessuti, il cosiddetto apparato reticolare interno. Conviene dare un breve cenno preliminare dei caratteri della zona di Golgi, *in vivo* e nei preparati fissati e colorati coll'ematossilina ferrica (fissazione in formalina od in miscela osmiobicromica di Bensley). In cellule viventi colorate col Verde Janus non si apprezza nella zona di Golgi differenza di sorta di fronte alle regioni contigue. I condrioconti arrivano in immediato rapporto con quella zona e talora si spingono in seno ad essa. In colture colorate *in vivo* col Rosso Neutro vi si vedono sovente piccoli vacuoli colorati; l'esistenza di vacuoli e di granuli R. N. in quella zona era stata del resto già segnalata nelle antiche pubblicazioni sulla struttura delle cellule coltivate *in vitro* da W. ed M. Lewis⁽⁶⁾. Talora, ma non costantemente, si vedono a fresco piccole goccioline lipidiche, in contatto reciproco; queste sono più frequenti e più numerose nelle colture al 3°-4° giorno di vita. In colture fissate in liquidi contenenti acido osmico, si distingue in quella regione in varie cellule una piccola centrosfera, che appare come una piccola area rotondeggiante non colorata contenente due centrioli.

Da quali condizioni dipenda la visibilità o meno della centrosfera e dei centrioli, non è possibile di precisare. È probabile che vi abbia parte il grado di espansione della cellula. La centrosfera risalta sul citoplasma contiguo, il quale per un'estensione

(5) G. LEVI, « Acta anatomica », 4, 176 (1947).

(6) W. e M. LEWIS, *Cowdry's General Cytology* (1924).

varia appare colorito intensamente coll'ematossilina; ha struttura varia; per lo più vi si distinguono dei fiocchi o dei piccoli blocchi a forma irregolare ed a contorno poco netto, che risaltano sul ialoplasma omogeneo. Le gocce lipidiche, quando esistono, si colorano in questa zona coll'acido osmico, se il preparato fu montato in gomma.

Da questa zona si dipartono sovente condrioconti per lo più brevi, ma che, specialmente nelle cellule a forma allungata, si seguono per lunghi tratti.

Prendiamo a considerare i caratteri della zona di Golgi nelle colture sottoposte alla reazione di Gomori per la fosfatasi alcalina (figg. 1 e 2). In questo riguardo abbiamo riscontrato differenze considerevoli. Talora quando non esistevano gocce lipidiche nella zona di Golgi, si vedono in un'area circoscritta bastoncini intrecciati con intensa reazione positiva (fig. 2); oppure vi sono granuli di un certo volume a forma irregolare; infine più spesso si ha una colorazione bruna



Fig. 1. - Da una coltura di cuore di embrione di pollo trattata col metodo per la fosfatasi alcalina. Reazione positiva in corrispondenza degli accumuli di gocce lipidiche. Ingr. 400 X.

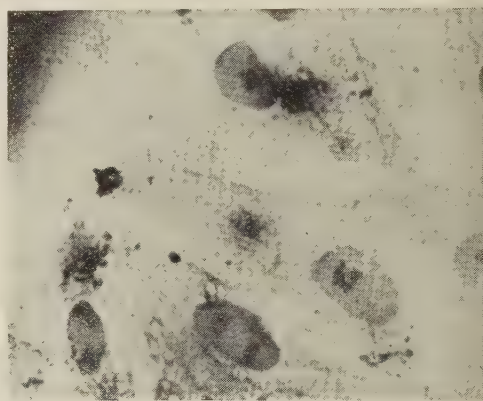


Fig. 2. - Da una coltura di cuore di embrione di pollo al 6 giorno trattata come sopra. Reazione fosfataseica positiva intensa in corrispondenza della zona di Golgi; vi si distinguono bastoncini ricurvi intrecciati, non lipidi. Ingr. 400 X.

diffusa abbastanza ben delimitata. In cellule nelle quali la zona di Golgi contiene gocce lipidiche, si ha un'aspetto analogo a quello riscontrato in altre parti del citoplasma contenenti lipidi: una colorazione intensa negli interstizi tra le goccioline (fig. 1). In cellule molto espanse in superficie la reazione positiva della zona di Golgi è debole; vi sono scarsi granuli oppure una colorazione brunastra diffusa, la quale è situata ad una certa distanza dal nucleo. Tale aspetto concorda con quello visibile nei preparati all'ematossilina ferrica, nei quali, come abbiamo detto, la zona di Golgi quando la cellula è molto espansa a stento si distingue dal citoplasma contiguo.

In singole cellule abbiamo vista (in preparati colla reazione di Gomori) una colorazione diffusa a tutto il citoplasma più o meno intensa; le condizioni che hanno determinato tale reazione positiva di tutto il citoplasma non furono rintracciate. Nelle cellule in mitosi la reazione fosfataseica era positiva in corrispondenza delle gocce lipidiche; ed una debole reazione positiva fu vista pure nelle gemme ialine, le quali, per lo meno nelle cellule che durante la mitosi assumono forma sferica, sono emesse alla fine della metafase e durante la telofase.

È degno di nota che la relazione materiale costante colle gocce lipidiche da noi vista nelle cellule miocardiche ed endoteliali, non esiste invece nei macrofagi, i quali pur contengono gocce lipidiche voluminose ed in gran numero; vi è soltanto qualche granulo di colorito bruno. Aspetto che contrasta con quello da uno di noi ⁽⁷⁾ riscontrato per la fosfatasi acida.

DISCUSSIONE. — I risultati ottenuti sulla reazione fosfatasica del nucleo concordano in linea generale con quelli di Chèvremont e Firket; colla differenza che nelle nostre colture il succo nucleare aveva una colorazione diffusa, mentre secondo quegli Autori presentava granuli sparsi. È probabile che questa differenza dipenda dal differente fissatore da noi usato. Un altro punto che va discusso riguarda i cromosomi delle cellule in mitosi. Secondo Chèvremont e Firket l'intensità della reazione dei cromosomi dipenderebbe dalla velocità con cui la mitosi si svolge. Noi riteniamo invece che la differente intensità con cui i cromosomi sono colorati dipenda da condizioni inerenti alla tecnica, vale a dire che nelle cellule a forma sferica alcuni dei reagenti usati penetrino con maggior difficoltà. Tanto più che non risulta esistano a parità di temperatura variazioni sensibili nella durata del processo di divisione mitotica; vedi un proposito le ricerche di Levi, di Olivo e Delorenzi, di Bucciante. In quanto poi all'interessante constatazione di Chèvremont e Firket, che l'intensità della reazione fosfatasica del nucleo sia in rapporto di dipendenza colla velocità d'accrescimento della coltura, non possiamo portare alcun elemento di giudizio.

Il fatto nuovo da noi posto in luce è la costante relazione materiale tra l'enzima fosfatasico ed il materiale lipidico intracellulare (fig. 1). Una relazione tra la fosfatasi alcalina ed il metabolismo dei fosfatidi fu ammessa da vari Autori, ma non ne fu mai data la dimostrazione citologica. Il rapporto materiale costante tra le gocce lipidiche e le zone di reazione fosfatasica, fa pensare che debbano esistere scambi chimici tra il fermento e le gocce lipidiche, le quali, per vari argomenti, che saranno esposti in altra Nota, riteniamo siano costituite da fosfolipidi.

Chèvremont e Firket hanno osservato inoltre all'estremo distale delle gemme muscolari cresciute da espianti di muscoli una reazione fosfatasica lievemente positiva. In quella regione vi è, com'è noto, un addensamento di condrioconti e di forme di transizione tra condrioconti e miofibrille (G. Levi e M. Chèvremont ⁽⁸⁾). Noi pure abbiamo trovato in varie cellule condrioconti a reazione fosfatasica lievemente positiva. Però questa reazione è estremamente lieve e non varia colla durata del periodo d'incubazione (sino a 48 ore), cosicchè non abbiamo la certezza che essa sia l'espressione di un'azione enzimatica, e non dipenda piuttosto da colorazione dei condrioconti da parte del cobalto. D'altro lato, dato che i condriosomi sono ricchi di fosfolipidi, e dato che, come riteniamo di aver dimostrato, vi è un nesso tra fosfatasi e fosfolipidi, non è inverosimile che le regioni ove i condriosomi sono numerosi abbiano una certa attività fosfatasica.

(7) Loc. cit.

(8) G. LEVI e M. CHÈVREMONT, « Arch. Biol. », 52, 523 (1941).

Abbiamo infine riscontrato con grande frequenza un'intensa reazione fosfatasica positiva nella cosiddetta zona di Golgi, la quale circonda la centrosfera e risiede nella parte in contatto con quella parte del contorno nucleare che è rivolto verso la direzione di migrazione della cellula, ma può risiedere anche ad una certa distanza dal nucleo. Non ritorneremo sui caratteri che essa presenta nelle varie cellule e sull'esistenza (non costante) in seno ad essa di minute gocce di lipidi. Il nostro reperto si accorda con quelli di Emmel^(9, 10), di Deane e Dempsey⁽¹¹⁾ ottenuti in varie cellule dei tessuti.

Che i minuti vacuoli visibili nei preparati col metodo Gomori nella zona di Golgi (fig. 2) siano lipidi e non vacuoli è provato dall'esame di preparati di miscele contenenti acido osmico e montati in gomma, nei quali le gocce lipidiche della zona di Golgi risaltano per la tinta bruna (fig. 1).

Se l'intensa reazione fosfatasica della zona di Golgi sia connessa col metabolismo dei glicidi oppure dei lipidi⁽¹²⁾, è questione che per il momento lasciamo aperta. Il problema si collega a quello della costituzione, della natura e della composizione chimica della zona di Golgi, che malgrado le migliaia di pubblicazioni che lo trattano, è tuttora insoluto. Infatti mentre, secondo le ricerche di Ciaccio⁽¹³⁾ di 25 anni or sono (dimenticate da A. successivi) il cosiddetto apparato di Golgi è costituito da fosfatidi mascherati, le recenti ricerche di Emmel (loc. cit.) e di Gersh⁽¹⁴⁾ dimostrerebbero che esso è costituito da un complesso di carboidrato-proteine, pur non escludendo che anche fosfolipidi partecipano alla sua composizione. Ci basti per il momento di porre in rilievo che nella zona di Golgi esiste una relazione materiale tra fosfatasi e fosfolipidi, relazione che del resto abbiamo riscontrato anche in altre porzioni del citoplasma.

Ricorderemo infine che all'infuori della zona di Golgi abbiamo riscontrato una reazione positiva diffusa più o meno intensa e più o meno estesa a seconda dei casi, nel citoplasma senza rapporto materiale con gocce lipidiche. Ricerche da noi intraprese che sono tuttora in corso sullo stesso materiale hanno confermato quanto per altra via era stato svelato, l'esistenza di una notevole quantità di fosfolipidi, invisibili all'esame *in vivo* e non dimostrabili neppure coll'acido osmico. Infatti mediante colorazione con Nero Sudan di queste stesse cellule abbiamo posto in evidenza granuli minutissimi sparsi nel citoplasma, i quali sono stati evidentemente liberati dal legame che essi avevano nel citoplasma vivente cogli altri costituenti in forma submicroscopica, e soltanto dopochè essi sono divenuti liberi reagiscono col Nero Sudan. Si tratta in altre parole di una lipofanerosi determinata dal processo di fissazione colla formalina. Riteniamo probabile che le zone di fosfatasi diffusa siano in relazione colla presenza di questi lipidi mascherati, la cui quantità risulta essere, secondo le nostre ricerche, molto rilevante.

(9) V. M. EMMEL, « Anat. Rec. », 91, 39 (1945).

(10) V. M. EMMEL, « Anat. Rec. », 95, 159 (1946).

(11) DEANE e E. W. DEMPSEY, « Anat. Rec. », 93, 401 (1945).

(12) Per quel che riguarda la partecipazione della fosfatasi al metabolismo dei lipidi rimaniamo alla recente rassegna di JEAN ROCHE, « Actual. Bioch. », 10, p. 76 (1947).

(13) C. CIACCIO, « C. r. Ass. Anat. Réunion de Liège », p. 160 (1926).

(14) J. GERSH, « Arch. Path. », 47, 88, 99 (1949).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari mediante trasformazioni cremoniane.* Nota di CARLO FELICE MANARA, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

1. Nella presente Nota diamo una dimostrazione elementare della possibilità di approssimare una trasformazione regolare intercedente tra due spazi proiettivi di dimensione qualunque, fino ad un ordine qualsivoglia, mediante trasformazioni cremoniane.

Come è noto, il problema è stato posto e risolto in qualche caso da M. Villa ed E. Bompiani ed è stato portato in discussione al Congresso dell'U. M. I. tenutosi a Pisa nell'autunno del 1948. Recentemente B. Segre — in una Memoria degli Annali di Matematica — ha risolto tra l'altro questa questione, assegnando anche un limite superiore per il numero di trasformazioni quadratiche il cui prodotto approssima, in modo assegnato, una trasformazione regolare (1).

La nostra soluzione è conseguita con metodi elementari, sulla base di un'osservazione del tutto ovvia che, nelle conversazioni di Pisa, venne proposta come mezzo per poter riconoscere la possibilità (o meno) di approssimare cremonianamente una trasformazione regolare qualunque. È chiaro, invero, che questa possibilità si riconduce a quella di approssimare la generica trasformazione regolare elementare data, nel caso piano, da $T \equiv \{x' = x + ax^r y^s; y' = y\}$.

I paragrafi 2, 3, 4 di questa Nota sono dedicati alla esposizione della soluzione nel caso del piano, mentre nel paragrafo 5 è indicata la soluzione nel caso dell' S_3 , soluzione ottenuta sulla base della precedente ed estendibile, con processo ricorrente, a spazi di dimensione qualunque.

2. Sia Φ una trasformazione puntuale tra due piani: π riferito a coordinate x, y e π' riferito a coordinate x', y' . Diremo che una coppia di punti corrispondenti O, O' è una *coppia di regolarità* per Φ , se le coordinate dei punti dell'intorno di O' si possono esprimere mediante funzioni analitiche regolari ed univocamente invertibili delle coordinate dei punti corrispondenti dell'intorno di O . Senza pregiudizio per la generalità, potremo supporre che O e O' siano le origini dei sistemi cartesiani di riferimento nei rispettivi piani. Allora la Φ ammetterà un'espressione analitica del tipo seguente

$$\Phi \equiv \{x' = \sum a_{ik} x^i y^k; y' = \sum b_{ik} x^i y^k\},$$

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) B. SEGRE, *Corrispondenze analitiche e trasformazioni cremoniane*. «Annali di Mat.», ser. IV, to. 29, 1949; Teorema II_n: «Ogni corrispondenza analitica invertibile tra due piani può venire approssimata fino all'ordine n (≥ 2) nell'intorno di due suoi punti corrispondenti comunque fissati mediante una trasformazione cremoniana decomponibile nel prodotto di al più $(n^4 + 10n^3 - 9n^2 - 82n + 108)/4$ trasformazioni quadratiche».

dove i secondi membri sono serie prive del termine noto, convergenti in un opportuno intorno dei valori complessi $x = y = 0$, e tali inoltre che per tali valori non si annulli lo jacobiano delle x' e y' rispetto alle x, y .

Sia ora Ψ una seconda trasformazione regolare intercedente tra π e π' , portante O in O' e per la quale la coppia O, O' sia una coppia di regolarità. Si dice che Φ e Ψ si approssimano⁽²⁾ tra loro d'ordine n nell'intorno della coppia O, O' , se nelle espressioni analitiche di Φ e Ψ sono uguali i coefficienti dei termini simili fino a quelli di grado (complessivo) n incluso.

La relazione ora definita fra le due trasformazioni Φ e Ψ è manifestamente equaliforme, e risulta invariante di fronte alle affinità di ciascuno dei due piani in sè che tengono fermi i punti O ed O' rispettivamente. Di questa proprietà ci varremo subito per ridurre l'espressione analitica della Φ a forma più semplice; a tal fine assumeremo nel piano π' come assi x' e y' le tangenti alle curve che sono rispettivamente le trasformate degli assi x ed y , e su questi nuovi assi assumeremo la unità di misura in modo che sia

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)_{x=y=0} = \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)_{x=y=0} = 1.$$

Con ciò l'espressione analitica della Φ assumerà la forma seguente

$$(1) \quad \Phi \equiv \begin{cases} x' = x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots \\ y' = y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \dots, \end{cases}$$

da cui intenderemo sempre di partire nel seguito, senza pregiudizio della generalità e senza alterazione del carattere di birazionalità delle eventuali operazioni a cui sottoporremo le variabili.

Consideriamo ora le trasformazioni regolari dei due tipi seguenti

$$(2) \quad \begin{cases} T \equiv \{ x' = x + ax^r y^s ; & y' = y \} \\ U \equiv \{ x' = x ; & y' = y + bx^r y^s \} \end{cases} \quad (r \geq 0, s \geq 0, r + s \geq 2),$$

che indicheremo nel seguito col nome di *trasformazioni elementari di grado $r + s$* .

È del tutto ovvio il seguente

LEMMA I. — Ogni trasformazione regolare Φ rappresentata analiticamente nella forma (1) è approssimabile fino ad un ordine n qualunque dal prodotto di opportune trasformazioni elementari T ed U , di grado non maggiore di n , in numero finito; prodotto eseguito in ordine opportuno, e precisamente in modo che il grado delle successive trasformazioni elementari non vada mai decrescendo.

Per brevità, e non essendovi pericolo di confusioni, d'ora innanzi dicendo semplicemente che una trasformazione approssima una T (od una U), avente un certo grado n , intenderemo dire che la approssima fino all'ordine n . È ora facile convincersi della validità del

LEMMA II. — Il precedente Lemma I conserva la sua validità, qualora alle trasformazioni elementari T ed U vengano sostituite delle trasformazioni che le approssimano.

(2) Per una esauriente precisazione di questo concetto vedere B. SEGRE, Memoria citata in (1)

Pertanto sarà sufficiente dimostrare che le trasformazioni elementari T ed U sono approssimabili cremonianamente, per poter concludere che tale è pure ogni trasformazione regolare, fino ad un ordine qualunque.

Nei seguenti paragrafi 3 e 4 costruiremo le trasformazioni cremoniane che approssimano una T od una U qualunque; avvertiamo però che le trasformazioni approssimanti le U si ottengono palesemente da quelle approssimanti le T scambiando le variabili x ed y , e pertanto non saranno da noi riportate.

3. Costruiremo preliminarmente trasformazioni cremoniane approssimanti le T per valori non generali di r ed s , in modo da preparare il terreno per l'approssimazione della T generica, a cui perverremo nel paragrafo 4.

TEOREMA I. — Le T elementari per cui è $r = 0, 1, 2$; s qualunque, sono approssimabili cremonianamente.

Invero tutte le T di questo tipo e dello stesso grado (maggiore di uno) rientrano come caso particolare nelle trasformazioni

$$x' = x + ax^2y^s + bxy^{s+1} + y^{s+2} \quad ; \quad y' = y,$$

visibilmente approssimate dalle trasformazioni di Jonquières

$$x' = x/(1 - axy^s) + bxy^{s+1} + cy^{s+2} \quad ; \quad y' = y.$$

Osservazione. — Nelle T del tipo ora trattato rientrano tutte quelle di grado due.

TEOREMA II. — Le T elementari per cui è $s = 0, 1$; r qualunque, sono approssimabili cremonianamente.

In base al teorema I, basterà considerare le T aventi $r > 2$; allora tutte le T del tipo indicato e dello stesso grado (maggiore di due) rientrano come caso particolare nelle trasformazioni

$$(3) \quad x' = x + x^r(ax + by) \quad ; \quad y' = y \quad (r \geq 2).$$

Ora, per approssimare la generica trasformazione data dalla (3), si considerino anzitutto le quattro trasformazioni di Jonquières date dalle formule seguenti, in cui le lettere x_i ed y_i indicano opportune variabili ausiliarie intermedie

$$C_1 \equiv \{x_1 = x \quad ; \quad y_1 = y + x^{r-1}(ax + by)\}$$

$$C_2 \equiv \{x_2 = x_1 + x_1 y_1 \quad ; \quad y_2 = y_1\}$$

$$C_3 \equiv \{x_3 = x_2 \quad ; \quad y_3 = y_2 - x_2^{r-1}(ax_2 + by_2)\}$$

$$C_4 \equiv \{x_4 = x_3 \quad ; \quad y_4 = y_3/(1 - b(r-1)x_3^{r-1}y_3) + a(r-1)x_3^{r-1}y_3\},$$

ed il loro prodotto $\Theta = C_1 C_2 C_3 C_4$ (ove le operazioni vanno effettuate nell'ordine da sinistra a destra). Tenendo conto del fatto che nelle (3) è $r \geq 2$, ed indicando con $[r+2]$ termini di grado complessivo non minore di $r+2$, si ha facilmente:

$$\Theta \equiv \{x_4 = x + xy + x^r(ax + by) + [r+2] \quad ; \quad y_4 = y + [r+2]\}.$$

Stabiliremo il teorema II mostrando che esistono opportune trasformazioni di Jonquières, in numero finito, tali che il prodotto della Θ per esse è una trasformazione approssimante la (3) d'ordine $r+2$. Basta invero considerare la

$$C_5 \equiv \{x_5 = x_4 - x_4 y_4 \quad ; \quad y_5 = y_4\}$$

e le

$$C_{5+i} \equiv \{x_{5+i} = x_{4+i} + x_{4+i} y_{4+i}^{2^i} ; y_{5+i} = y_{4+i}\},$$

in cui i è limitato dalla condizione che sia $2^{i+1} < r + 1$.

Si ha facilmente

$$\Theta C_5 \equiv \{x_5 = x - xy^2 + x^r(ax + by) + [r + 2] ; y_5 = y + [r + 2]\}$$

$$\Theta C_5 \cdots C_{5+i} \equiv \{x_{5+i} = x - xy^{2^{i+1}} + x^r(ax + by) + [r + 2] ; y_{5+i} = y + [r + 2]\},$$

e quindi, detto j il primo valore di i per cui è $2^{j+1} \geq r + 1$,

$$\Theta C_5 \cdots C_j \equiv \{x_j = x + x^r(ax + by) + [r + 2] ; y_j = y + [r + 2]\},$$

con che il teorema II risulta provato.

Osservazione. - Nei tipi trattati nel presente paragrafo rientrano tutte le T di grado non maggiore di quattro.

4. Sia ora da approssimarsi una T generica che, per l'osservazione fatta alla fine del precedente paragrafo, potrà suppersi di grado maggiore di quattro. In base ai teoremi I e II, sarà anzi lecito supporre

$$(4) \quad r > 2, \quad s > 1.$$

Facciamo anzitutto la seguente

Osservazione. - La T è approssimata dal prodotto delle trasformazioni V e W date da

$$V \equiv \{\bar{x} = x + (s + 1)ax^r y^s ; \bar{y} = y - rax^{r-1}y^{s+1}\},$$

$$W \equiv \{x' = \bar{x} - sa\bar{x}^r \bar{y}^s ; y' = \bar{y} + ra\bar{x}^{r-1} \bar{y}^{s+1}\}.$$

Si ha infatti facilmente

$$VW \equiv \{x' = x + ax^r y^s + [r + s + 1] ; y' = y + [r + s + 1]\}.$$

Ora sussistono le seguenti proposizioni:

LEMMA III. - La V , sopra definita, è approssimabile dal prodotto di quattro trasformazioni di Jonquières.

Ed invero, posto:

$$C_1 \equiv \{x_1 = x ; y_1 = y + ax^r\}$$

$$C_2 \equiv \{x_2 = x_1 + y_1^{r+1} ; y_2 = y_1\}$$

$$C_3 \equiv \{x_3 = x_2 ; y_3 = y_2 - ax_2^r\}$$

$$C_4 \equiv \{x_4 = x_3 - y_3^{r+1} ; y_4 = y_3\},$$

si ha facilmente, tenendo conto delle limitazioni (4),

$$C_1 C_2 C_3 C_4 \equiv \{x_4 = x + (s + 1)ax^r y^s + [r + s + 1] ; y_4 = y - rax^{r-1}y^{s+1} + [r + s + 1]\}.$$

LEMMA IV. - Se è $r \geq s$, la W sopra definita è approssimabile dal prodotto di tre trasformazioni di Jonquières.

Infatti, posto

$$G_1 \equiv \{x_1 = x ; y_1 = y - ax^r y\}$$

$$G_2 \equiv \{x_2 = x_1 + y_1^s ; y_2 = y_1\}$$

$$G_3 \equiv \{x_3 = x_2 ; y_3 = y_2 + ax_2^r y_2\},$$

si consideri il prodotto $\Gamma = G_1 G_2 G_3$; tenuto conto delle limitazioni (4), si ha facilmente

$$\Gamma \equiv \{x_3 = x + y^s - sa x^r y^s + [r + s + 1] \ ; \ y_3 = y + ra x^{r-1} y^{s+1} - a^2 x^{2r} y + [r + s + 1]\},$$

Ora, se è $r \geq s$, il termine $-a^2 x^{2r} y$ che figura nell'espressione di y_3 data dalla Γ è conglobabile in quelli indicati col simbolo $[r + s + 1]$, e pertanto la Γ stessa è una trasformazione approssimante W .

Tale argomentazione viene a cadere quando $r < s$; allora però sussiste il

TEOREMA III. — *Se $r < s$, esistono opportune trasformazioni di Jonquières, in numero finito, tali che il prodotto della Γ e di esse è una trasformazione approssimante W fino all'ordine $r + s$.*

Invero, si assuma

$$G_{3+i} \equiv \{x_{3+i} = x_{2+i} \ ; \ y_{3+i} = y_{2+i} + a^{2i} x_{2+i}^{r 2^i} y_{2+i}\} \quad (i \geq 1),$$

dove i si limiti superiormente colla condizione che sia $r \cdot 2^i < r + s + 1$. Si dica j il minimo valore di i per cui $r \cdot 2^{i+1} \geq r + s + 1$, e sia $\Delta = \Gamma G_4 \cdots G_j$; è chiaro allora che il prodotto della Δ per

$$G_{j+1} \equiv \{x_{j+1} = x_j - y_j^s \ ; \ y_{j+1} = y_j\}$$

approssima W .

Le proposizioni che precedono possono essere riassunte nel conclusivo

TEOREMA IV. — *Ogni trasformazione elementare del tipo*

$$T \equiv \{x' = x + ax^r y^s \ ; \ y' = y\} \quad \text{o} \quad U \equiv \{x' = x \ ; \ y' = y + bx^r y^s\}$$

è approssimabile fino all'ordine $r + s$ da un prodotto di trasformazioni di Jonquières in numero finito.

Di conseguenza, tenuto conto di quanto ~~si~~ è detto nel paragrafo 2, varrà il

TEOREMA V. — *Ogni trasformazione regolare intercedente fra due piani proiettivi, nell'intorno di una coppia O, O' di punti corrispondenti che sia una coppia di regolarità, è approssimabile cremonianamente fino ad un ordine n prefissato.*

5. Diamo qui la dimostrazione dei teoremi analoghi a quelli dianzi enunciati, per il caso in cui le trasformazioni regolari di cui si tratta intercedano fra due spazi lineari a tre dimensioni; avvertiamo però che la dimostrazione che esporremo può considerarsi come l'inizio di un procedimento ricorrente, e che pertanto i metodi tenuti e le conclusioni acquisite sono da ritenersi valevoli per spazi ad un numero qualunque di dimensioni.

Osserviamo anzitutto che a questo caso si estendono, con ovvie ed immediate modifiche, le osservazioni fatte nel paragrafo 2 ed i lemmi I e II ivi enunciati. Ci ridurremo quindi a ricercare le trasformazioni cremoniane approssimanti la

$$T \equiv \{x' = x + ax^r y^s z^t \ ; \ y' = y \ ; \ z' = z\},$$

dove potremo supporre che sia $r > 1$, altrimenti la T sarebbe già cremoniana, e che s e t siano non nulli, altrimenti potremmo applicare direttamente il teorema IV considerando le due sole variabili interessate.

Posto $\alpha = a/(s+1)$, consideriamo nello spazio le seguenti quattro trasformazioni di Jonquières

$$C_1 \equiv \{x_1 = x \quad ; \quad y_1 = y + \alpha x^r z^t \quad ; \quad z_1 = z\}$$

$$C_2 \equiv \{x_2 = x_1 + y_1^{s+1} \quad ; \quad y_2 = y_1 \quad ; \quad z_2 = z_1\}$$

$$C_3 \equiv \{x_3 = x_2 \quad ; \quad y_3 = y_2 - \alpha x_2^r z_2^t \quad ; \quad z_3 = z_2\}$$

$$C_4 \equiv \{x_4 = x_3 - y_3^{s+1} \quad ; \quad y_4 = y_3 \quad ; \quad z_4 = z_3\}.$$

Si ha facilmente che il prodotto $\Theta = C_1 C_2 C_3 C_4$ assume la forma

$$x_4 = x + \alpha (s+1) x^r y^s z^t + [r+s+t+1];$$

$$y_4 = y - \alpha r x^{r-1} y^{s+1} z^t + [r+s+t+1] \quad ; \quad z_4 = z.$$

Ora, in base al teorema IV, è possibile assegnare una trasformazione cremoniana K operante soltanto sulle due variabili y_4 e z_4 che approssima fino all'ordine $r+s+t$ la trasformazione seguente

$$y_5 = y_4 + (r\alpha x_4^{r-1}) y_4^{s+1} z_4^t \quad ; \quad z_5 = z_4;$$

ed è chiaro che il prodotto $\Theta \cdot K$ approssima la T data dalla (5) fino all'ordine $r+s+t$. Ricordando le osservazioni fatte all'inizio del presente paragrafo, potremo pertanto concludere con il

TEOREMA V. — *Ogni trasformazione regolare intercedente tra due spazi lineari ad un numero qualsivoglia di dimensioni, nell'intorno di una coppia O, O' di punti corrispondenti che sia una coppia di regolarità, è approssimabile cremonianamente fino ad un qualunque ordine n prefissato.*

Matematica. — *Sulla caratterizzazione delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi semisemplici di Lie.* Nota di GIULIO RACAH, presentata (*) dal Socio U. AMALDI.

Si costruisce un sistema di operatori i cui autovalori caratterizzano univocamente le rappresentazioni irriducibili dei gruppi semisemplici di Lie.

1. Se

$$(I) \quad \sum_q e^q X_q$$

è il generico elemento infinitesimale di un gruppo semisemplice di Lie, c_{pq}^{\dots} le sue costanti strutturali,

$$g_{pq} = \sum_{st} c_{ps}^{\dots t} c_{qt}^{\dots s}$$

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

i coefficienti della forma fondamentale di Cartan e g^{pq} i coefficienti della forma contragrediente alla precedente, è stato dimostrato da Casimir ⁽¹⁾ che l'operatore

$$(2) \quad G = \sum_{pq} g^{pq} X_p X_q$$

è permutabile con tutti gli operatori del gruppo.

Segue dal lemma di Schur che in una rappresentazione irriducibile del gruppo, l'operatore G è rappresentato da un multiplo γI della matrice unitaria.

Casimir si è servito di questa proprietà per dare una dimostrazione algebrica molto semplice ed elegante della completa riducibilità delle rappresentazioni del gruppo delle rotazioni in tre dimensioni ⁽²⁾; la dimostrazione originale di Casimir è però applicabile solo a questo gruppo, perchè è basata sulla proprietà, valida solo in questo caso, che a rappresentazioni irriducibili non equivalenti corrispondono differenti autovalori γ dell'operatore G . L'estensione della dimostrazione a tutti i gruppi semisemplici è stata fatta da van der Waerden ⁽³⁾ con una lunga serie di considerazioni e calcoli assai complicati, che contrastano con la semplicità del metodo di Casimir.

Ci proponiamo di dimostrare in questa Nota che l'operatore G non è unico nel suo genere, e che ogni gruppo semisemplice di rango l possiede l operatori funzioni delle X_q , che sono permutabili con tutti gli operatori del gruppo, indipendenti tra loro e tali che a rappresentazioni irriducibili non equivalenti corrispondono differenti sistemi di autovalori.

Se si usa questo sistema di operatori anzichè il solo operatore G , la dimostrazione originaria di Casimir è valida per tutti i gruppi semisemplici.

2. Se poniamo

$$(3) \quad X^p = \sum_q g^{pq} X_q,$$

la condizione di permutabilità dell'operatore

$$(4) \quad F = f(X^p)$$

con tutti gli operatori del gruppo può essere scritta nella forma

$$(5) \quad [X_q, F] = \sum_p [X_q, X^p] \frac{\partial F}{\partial X^p} = 0, \quad (q = 1, 2, \dots, r)$$

quando nella derivazione dei singoli termini del polinomio f e nella contemporanea moltiplicazione per $[X_q, X^p]$ si abbia cura di non turbare l'ordine dei fattori, cioè di porre $[X_q, X^p]$ al posto del fattore X^p che scompare nella derivazione. Tenendo conto del fatto che le « componenti covarianti » dellé costanti strutturali,

$$(6) \quad c_{pq\ell} = \sum_s c_{pq}^{\dots s} g_{s\ell},$$

(1) H. CASIMIR, « Proc. Roy. Acad. Amsterdam », 34, 844 (1931).

(2) H. CASIMIR, e B. L. VAN DER WAERDEN, « Math. Ann. », III, 1 (1935), § 2.

(3) H. CASIMIR, e B. L. VAN DER WAERDEN, « Math. Ann. », III, 1 (1935), §§ 4 e 5.

sono antisimmetriche rispetto a tutti e tre gli indici ⁽⁴⁾, abbiamo

$$(7) \quad [X_q, X^p] = \sum_{st} g^{st} c_{qt}^{*s} X_s = \sum_s c_{sq}^{*p} X_s,$$

e perciò

$$(8) \quad [X_q, F] = \sum_{sp} c_{sq}^{*p} X_s \frac{\partial F}{\partial X^p} = 0.$$

Confrontando questa condizione con le equazioni differenziali caratteristiche per gli invarianti del gruppo aggiunto ⁽⁵⁾,

$$(9) \quad E_q(f) = \sum_{sp} c_{sq}^{*p} e^s \frac{\partial f}{\partial e^p} = 0,$$

vediamo che gli operatori F si ottengono dagli invarianti del gruppo aggiunto sostituendo gli operatori X^p alle variabili e^p , previa conveniente simmetrizzazione. Diciamo «conveniente» simmetrizzazione, perchè la completa simmetrizzazione è sempre sufficiente, ma non è generalmente necessaria.

Poichè il rango di un gruppo di Lie è dato appunto dal numero degli invarianti indipendenti del gruppo aggiunto, abbiamo provato l'esistenza di l operatori F soddisfacenti la (5) e indipendenti tra loro.

3. Se indichiamo con A_q gli operatori infinitesimali del gruppo parametrico, e costruiamo nel modo indicato nel paragrafo precedente l'operatore $\bar{F} = f(A^p)$, gli elementi di matrice della rappresentazione irriducibile per cui F assume l'autovalore φ sono autofunzioni di \bar{F} corrispondenti al medesimo autovalore φ . Casimir ha dimostrato questo teorema per l'operatore G , ma la sua dimostrazione vale per tutti gli operatori F che soddisfano la (5).

Anche la caratteristica della rappresentazione, come somma di elementi di matrice, è una autofunzione di \bar{F} corrispondente al medesimo autovalore; se assumiamo per essa l'espressione data da Weyl ⁽⁶⁾

$$(10) \quad \chi = \frac{\xi(l_1, l_2, \dots, l_l)}{\xi(r_1, r_2, \dots, r_l)}$$

ed osserviamo che questa espressione cambia solamente il segno quando applichiamo agli l_k una sostituzione del gruppo discreto S , possiamo concludere che gli autovalori φ corrispondenti a una rappresentazione irriducibile, considerati come funzioni dei parametri l_k caratteristici della rappresentazione stessa, sono invarianti rispetto alle sostituzioni del gruppo S .

Se l'operatore $F = f(X^p)$ è un polinomio omogeneo di ordine n negli X^p , il suo autovalore $\varphi(l_k)$ è un polinomio di ordine n negli l_k , generalmente non omogeneo; il suo calcolo effettivo può essere assai laborioso, ma è invece assai semplice il calcolo dei suoi termini di ordine massimo.

Se sostituiamo alla (1) la sua forma canonica ⁽⁷⁾

$$(11) \quad \sum_i \lambda^i H_i + \sum_\alpha \sigma^\alpha E_\alpha,$$

(4) F. ENGEL, «Math. Zeitsch.», 31, 177 (1929).

(5) L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*. (Bologna 1928). p. 220, eq. (7).

(6) H. WEYL, «Math. Zeitsch.», 24, 389 (1925).

(7) Cfr. H. CASIMIR e B. L. VAN DER WAERDEN, loc. cit., p. 6.

ed applichiamo l'operatore $F = f(H^i, E^a)$ al vettore e_Λ il cui peso

$$(12) \quad \Lambda = \sum_i \lambda^i m_i = \sum_i \lambda_i m^i$$

è il massimo peso della rappresentazione che consideriamo, vediamo subito che l'autovalore di F sarà un polinomio negli m^i , i cui termini di ordine massimo avranno l'espressione $f(m^i, 0)$; e pertanto, se esprimiamo questo autovalore in funzione degli

$$(13) \quad l_k = m_k + r_k,$$

i termini di ordine massimo di $\varphi(l_k)$ avranno anch'essi la forma $f(l^i, 0)$.

Nel caso particolare dell'operatore di Casimir è facile vedere che

$$(14) \quad \gamma(l_k) = \sum_{ik} g^{ik} (l_i l_k - r_i r_k) = \sum_{ik} g^{ik} m_i (m_k + 2r_k),$$

formula che è stata già da noi usata in alcuni casi particolari⁽⁸⁾.

È interessante osservare che un integrale $f(\lambda^i, \sigma^a)$ del sistema (9) è univocamente determinato nell'intorno di un punto regolare dell'iperpiano $\sigma^a = 0$ se fissiamo arbitrariamente $f(\lambda^i, 0)$; risulta da quanto abbiamo detto sopra, che, perchè $f(\lambda^i, \sigma_a)$ sia un polinomio, è necessario che il polinomio $f(\lambda^i, 0)$ sia invariante rispetto alle sostituzioni del gruppo S .

4. Per completare la nostra tesi basta ora dimostrare che tale condizione è anche sufficiente, cioè che per ogni gruppo semisemplice di rango l si può costruire un sistema di l invarianti del gruppo aggiunto

$$(15) \quad f_h(\lambda^i, \sigma^a) \quad (h = 1, 2, \dots, l)$$

tale che le funzioni $f_h(\lambda^i, 0)$ costituiscono una base intera per gli invarianti di S . Gli invarianti (15) costituiranno pertanto una base intera per gli invarianti del gruppo aggiunto.

Invarianti del gruppo aggiunto furono ottenuti per la prima volta da Killing come coefficienti delle potenze di ρ nello sviluppo del determinante caratteristico⁽⁹⁾

$$(16) \quad \Delta(\rho) = \left| \sum_p \epsilon^p c_{pq}^{\dots s} - \rho \delta_q^s \right|,$$

Cartan⁽¹⁰⁾ ha ottenuto altri invarianti, che rientrano nel tipo più generale dato dai coefficienti delle potenze di ρ nello sviluppo del determinante

$$(17) \quad \left| \sum_p \epsilon^p (D_p)_{\alpha\beta} - \rho \delta_{\alpha\beta} \right|,$$

dove le matrici D_p costituiscono una rappresentazione qualsiasi degli operatori infinitesimali X_p , cioè sono matrici che soddisfano le relazioni

$$(18) \quad \sum_\beta (D_p)_{\alpha\beta} (D_q)_{\beta\gamma} - \sum_\beta (D_q)_{\alpha\beta} (D_p)_{\beta\gamma} = \sum_s c_{pq}^{\dots s} (D_s)_{\alpha\gamma};$$

(8) G. RACAH, « Phys. Rev. », 76, 1352 (1949).

(9) L. BIANCHI, loc. cit., p. 242.

(10) E. CARTAN, *Tesi*. (Parigi 1894), p. 154.

per dimostrare questo teorema basta ripetere la dimostrazione di Engel⁽¹¹⁾ per gli invarianti di Killing, salvo a sostituire la (18) alle relazioni quadratiche tra le c_{pq}^{rst} .

Poichè l'operatore $\sum_i \lambda^i H_i$ è rappresentato da una matrice diagonale i cui elementi sono i pesi della rappresentazione considerata, gli invarianti del gruppo aggiunto che si ottengono da una data rappresentazione si riducono per $\sigma^a = 0$ alle funzioni simmetriche elementari dei suoi pesi. Basta dunque dimostrare che tra le funzioni simmetriche elementari dei pesi delle rappresentazioni di un gruppo semisemplice di rango l ne esistono l che costituiscono una base intera per gli invarianti di S . Dimostreremo questa proprietà per i differenti gruppi semplici; l'estensione ai gruppi semisemplici deriva immediatamente dal fatto che questi ultimi sono notoriamente prodotti diretti di gruppi semplici.

a) Per i gruppi di tipo A il gruppo S è il gruppo delle permutazioni nelle $l + 1$ variabili λ^i ; i pesi della rappresentazione costituita dal gruppo unimodulare in $l + 1$ dimensioni sono le λ^i stesse, e le loro funzioni simmetriche elementari costituiscono notoriamente una base per gli invarianti del gruppo delle permutazioni.

b) Per i gruppi di tipo B, C e D il gruppo S è il gruppo delle permutazioni nelle l variabili λ^i con cambiamenti di segno in un numero qualsiasi di esse nei casi B e C, e in un numero pari di esse nel caso D; i pesi delle rappresentazioni costituite rispettivamente dai gruppi delle rotazioni in $2l + 1$ dimensioni e dai gruppi complessi e gruppi delle rotazioni in $2l$ dimensioni sono $\pm \lambda^i$, e, nel caso B, lo zero; le loro funzioni simmetriche elementari di ordine dispari sono nulle, e quelle di ordine pari sono le funzioni simmetriche elementari nelle $(\lambda^i)^2$; esse costituiscono pertanto una base intera per gli invarianti di S nei casi B e C, ma non nel caso D. Per ottenere una base intera anche in quest'ultimo caso, bisogna sostituire all'invariante di ordine massimo $(2l)$ quello di ordine l che si ottiene partendo da una delle due rappresentazioni di ordine 2^{l-1} che Cartan⁽¹²⁾ ha indicato con g_1 e g_2 ; a meno di una costante numerica $f(\lambda^i, 0)$ è uguale in questo caso al prodotto delle λ^i più, se l è pari, una funzione simmetrica nelle $(\lambda^i)^2$.

c) Per i cinque gruppi eccezionali non vale la pena di entrare nei particolari strutturali, in alcuni casi assai complicati, dei rispettivi gruppi S ; si può verificare che le rappresentazioni di ordine minimo indicate da Cartan⁽¹³⁾ possiedono in ciascun caso l funzioni simmetriche elementari dei pesi, indipendenti tra loro e tali che il prodotto dei loro ordini è uguale all'ordine del rispettivo gruppo S , ordine che è stato indicato da Witt⁽¹⁴⁾. Esse sono:

- per E_6 le funzioni di ordine 2, 5, 6, 8, 9 e 12;
- per E_7 le funzioni di ordine 2, 6, 8, 10, 12, 14 e 18;
- per E_8 le funzioni di ordine 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24 e 30;
- per F_4 le funzioni di ordine 2, 6, 8 e 12;
- per G_2 le funzioni di ordine 2 e 6.

(11) L. BIANCHI, loc. cit., p. 243.

(12) E. CARTAN, «Bull. Soc. Math. de France», 41, 91 (1913).

(13) E. CARTAN, *Tesi*, p. 142 e sgg.

(14) E. WITT, «Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.», 14, 289 (1941).

Meccanica. — *Sulle vibrazioni delle piastre con nervature.*
Nota II di ELIO GIANGRECO, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Nella Nota I ho sommariamente accennato al procedimento seguito per lo studio delle vibrazioni libere di una piastra rinforzata da nervature. Ho in seguito richiamato l'impostazione statica del problema iniziandone l'estensione dinamica che qui continuo a trattare.

4. RIDUZIONE DELLE EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI AD UN SISTEMA DI EQUAZIONI ALGEBRICHE LINEARI. — Assumiamo per il nucleo $K(xy\xi\eta)$, nel caso in esame, il seguente sviluppo in serie (5):

$$K(xy\xi\eta) = \frac{4}{\pi^4 Nab} \sum_{mn} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi \xi}{b} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2}$$

e quindi

$$K\left(xy\xi \frac{b}{2}\right) = \frac{4}{\pi^4 Nab} \sum_{mn} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi \xi}{a}}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \quad (n=1, 3, 5, \dots)$$

$$K\left(xy \frac{a}{2} \eta\right) = \frac{4}{\pi^4 Nab} \sum_{mn} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \quad (m=1, 3, 5, \dots)$$

La (12) diventa allora:

$$w(xy) = \sum_{mn} \alpha_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

con

$$(14) \quad \alpha_{mn} = \frac{\lambda g_{mn} - (-1)^{\frac{n-1}{2}} c_m - (-1)^{\frac{m-1}{2}} d_n}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2}$$

ed avendo posto:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^a \int_0^b \bar{w}(\xi\eta) \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} d\xi d\eta = g_{mn} \\ \int_0^a \bar{p}_1^-(\xi) \sin \frac{m\pi \xi}{a} d\xi = c_m \\ \int_0^b \bar{p}_2^-(\eta) \sin \frac{n\pi \eta}{b} d\eta = d_n. \end{array} \right.$$

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(5) Ved. NÁDAI, *Elastische Platten*, p. 174.

Tenendo ora conto della (13) e della (10) le espressioni di g_{mn} , c_m e d_n assumono rispettivamente la forma:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{mn} &= \alpha_{mn} \frac{ab}{4} \\ c_m &= \sum_{mn} \frac{1}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \left[\left(\frac{2 EI_1^x}{Na^4 b} - \frac{2 \mu_1 \lambda}{\pi^4 N \rho \delta} \right) \left((-1)^{\frac{n-1}{2}} \lambda g_{mn} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - c_m - (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} d_n \right) \right] \\ d_n &= \sum_{mn} \frac{1}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \left[\left(\frac{2 EI_2^x}{Na b^4} - \frac{2 \mu_2 \lambda}{\pi^4 N \rho \delta} \right) \left((-1)^{\frac{m-1}{2}} \lambda g_{mn} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} c_m - d_n \right) \right] \end{aligned} \right.$$

$$(m, n = 1, 3, 5, \dots).$$

Sostituiamo le (16) nella (14) ed arrestiamo il nucleo $K(xy\xi\eta)$ all'espressione di v^{na} approssimazione, il che equivale a limitare la \sum_{mn} ad un certo numero finito di coppie di interi positivi dispari.

Si perviene così ad un sistema di v equazioni algebriche lineari omogenee in v incognite: l'annullamento del determinante dei coefficienti fornisce l'equazione secolare delle frequenze.

5. CALCOLO DEGLI AUTOVALORI. - 1^a Approssimazione. — Si perviene alla seguente espressione di λ :

$$(17) \quad \lambda = \frac{\pi^4 \rho \delta}{a^3 b^3} \frac{N(a^2 + b^2)^2 + 2(EI_1^x b^3 + EI_2^x a^3)}{\rho \delta ab + 2(\mu_1 a + \mu_2 b)}$$

e dalla (11)

$$(18) \quad \omega = \frac{\pi^2}{\sqrt{a^3 b^3}} \sqrt{\frac{N(a^2 + b^2)^2 + 2(EI_1^x b^3 + EI_2^x a^3)}{\rho \delta ab + 2(\mu_1 a + \mu_2 b)}}.$$

Se la piastra fosse quadrata ($a = b$) e le due nervature di eguale sezione ($I_1^x = I_2^x = I^x$; $\mu_1 = \mu_2 = \mu$) la (16) e la (17) diventerebbero rispettivamente:

$$\lambda = \frac{4 \pi^4 \rho \delta}{a^4} \frac{Na + EI^x}{\rho \delta a + 4 \mu}$$

$$\omega = \frac{2 \pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{Na + EI^x}{\rho \delta a + 4 \mu}}.$$

2^a Approssimazione. — Si perviene al seguente sistema di 4 equazioni omogenee nelle 4 incognite c_1, d_1, c_3 e d_3 :

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(\frac{2 EI_1^x}{Na^4 b} - \frac{2 \mu_1 \lambda}{\pi^4 N b \rho \delta} \right) \left[\lambda \gamma_{11}^2 \frac{c_1 + d_1}{\gamma_{11} \lambda - \pi^4 N} - \right. \\ &\quad \left. - \lambda \gamma_{13}^2 \frac{c_1 + d_3}{\gamma_{13} \lambda - \pi^4 N} - c_1 (\gamma_{11} + \gamma_{13}) - (d_1 \gamma_{11} - d_3 \gamma_{13}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \left(\frac{2 EI_2^x}{Na b^4} - \frac{2 \mu_2 \lambda}{\pi^4 Na \rho \delta} \right) \left[\lambda \gamma_{11}^2 \frac{c_1 + d_1}{\gamma_{11} \lambda - \pi^4 N} - \right. \\
 &\quad \left. - \lambda \gamma_{31}^2 \frac{c_3 + d_1}{\gamma_{31} \lambda - \pi^4 N} - (c_1 \gamma_{11} - c_3 \gamma_{31}) - d_1 (\gamma_{11} + \gamma_{31}) \right] \\
 c_3 &= \left(\frac{162 EI_1^x}{Na^4 b} - \frac{2 \mu_1 \lambda}{\pi^4 Nb \rho \delta} \right) \left[\lambda \gamma_{31}^2 \frac{c_3 + d_1}{\gamma_{31} \lambda - \pi^4 N} - c_3 \gamma_{31} + d_1 \gamma_{31} \right] \\
 d_3 &= \left(\frac{162 EI_2^x}{Na b^4} - \frac{2 \mu_2 \lambda}{\pi^4 Na \rho \delta} \right) \left[\lambda \gamma_{13}^2 \frac{c_1 + d_3}{\gamma_{13} \lambda - \pi^4 N} + c_1 \gamma_{13} - d_3 \gamma_{13} \right]
 \end{aligned}$$

dove si è posto per semplicità $\gamma_{mn} = \frac{1}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2}$. Annullando il determinante dei coefficienti si ricava l'equazione secolare delle frequenze.

6. ESEMPIO NUMERICO. — Con riferimento ad un caso concreto consideriamo una piastra quadrata in calcestruzzo di lati m. 1.84 e spessore cm. 5, rinforzata da due nervature di egual sezione 0.06×0.10 m². Assumendo come larghezza di soletta collaborante quella regolamentare, la sezione delle due nervature si trasforma in una sezione a T con la suola di 0.05×0.56 m². Le caratteristiche geometrico-elastiche del sistema valgono:

$$\begin{aligned}
 EI^x &= 75,426400 \text{ tm}^2 & ; & \quad Na = 45,342857 \text{ tm}^2 \\
 \rho \delta &= 1,2742 \times 10^{-2} \text{ tm}^{-3} \text{ sec}^2 & ; & \quad \mu = 0,1529 \times 10^{-2} \text{ tm}^{-2} \text{ sec}^2
 \end{aligned}$$

avendo assunto un peso specifico di $2,5 \text{ tm}^{-3}$.

Si è ottenuto così in prima approssimazione

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 1769,5306 \text{ tm}^{-3} \\
 \sigma &= \frac{\omega}{2\pi} = 59,3101 \text{ sec}^{-1}.
 \end{aligned}$$

In seconda approssimazione si è invece pervenuti per λ alla seguente equazione di II° grado:

$$\lambda^2 - 64,849,681 \lambda + 111,344,170,10 = 0$$

da cui:

$$\lambda_1 = 1764,9965 \text{ tm}^{-3} \quad \lambda_2 = 63084,7245 \text{ tm}^{-3}.$$

La più bassa frequenza di vibrazione si ottiene in corrispondenza di λ_1 e vale:

$$\sigma_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 59,2341 \text{ sec}^{-1}$$

che, essendo di pochissimo differente (naturalmente in difetto, perchè è un valore più approssimato) da quella ottenuta in prima approssimazione conferma la rapida convergenza del procedimento. In corrispondenza dell'altra radice si ha:

$$\sigma_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 354,1292 \text{ sec}^{-1}.$$

Meccanica. — *Sulle equazioni indefinite della statica delle membrane tese su generiche superficie.* Nota di EDOARDO STORCHI, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

In questa Nota mi occupo dell'integrazione delle equazioni indefinite della statica dei continui bidimensionali (membrane) su generiche superficie prestabilite ⁽¹⁾; e precisamente del sistema esprimente la solenoidalità del tensore simmetrico degli sforzi. Posta la metrica della superficie in forma isoterma, pervengo ad una forma particolarmente semplice del suddetto sistema che dico « canonica » e che ben si presta alla discussione.

Stabilisco qui una soluzione particolare corrispondentemente alla quale è nullo l'invariante lineare del tensore degli sforzi e ritrovo la soluzione data da B. Finzi per le superficie a curvatura costante, dimostrando inoltre che soltanto per membrane su queste applicabili è possibile esprimere l'integrale generale delle equazioni indefinite di equilibrio mediante una combinazione lineare di una funzione arbitraria $\chi(x, y)$ e delle sue derivate prime e seconde.

Cominciamo con l'osservare che, assunto un conveniente sistema di coordinate curvilinee x_1 e x_2 sulla superficie, alla metrica:

$$ds^2 = a_{rs} dx^r dx^s \quad (r, s = 1, 2)$$

si può attribuire la semplice forma:

$$(1) \quad ds^2 = \lambda(x_1, x_2) [dx_1^2 + dx_2^2]$$

coinvolgente un unico coefficiente.

Il sistema

$$p_{|k}^{ik} = 0$$

che caratterizza l'equilibrio del continuo, si scrive d'altra parte, introdotti i simboli di Cristoffel ed eseguita la derivazione tensoriale:

$$(2) \quad p_{|k}^{ik} = \frac{\partial p^{ik}}{\partial x^k} + p^{jk} \left\{ j \atop k \right\}^i + p^{ij} \left\{ j \atop k \right\}^k = 0.$$

Nella (2), $\left\{ j \atop k \right\}^i$ e $\left\{ j \atop k \right\}^k$ indicano i simboli di Cristoffel di seconda specie, legati ai simboli di prima specie ed al tensore fondamentale dalla nota relazione:

$$\left\{ l \atop k \right\}^i = a^{lr} (ik, r) = \frac{1}{2} a^{lr} \left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{kr}}{\partial x^i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^r} \right).$$

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) Dell'argomento e relativamente ad un notevole caso particolare (quello delle superficie di rotazione) mi sono occupato in una precedente Nota: *Integrazione delle equazioni indefinite della statica dei sistemi continui su una superficie di rotazione.* Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. VII, fasc. 5, pp. 227-231 (1950). Per la bibliografia vedasi la Nota stessa.

Osservando allora che: $a_{11} = \lambda$; $a_{12} = a_{21} = 0$; $a_{22} = \lambda$; $\|a_{ik}\| = \Delta = \lambda^2$; $a^{11} = 1/\lambda$; $a^{12} = a^{21} = 0$; $a^{22} = 1/\lambda$ e posto per semplicità di notazione: $x_1 = x$, $x_2 = y$ si trae:

$$(3) \quad \begin{cases} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} & ; & \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} & ; & \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \end{cases}$$

Il sistema (2) tenuto conto delle (3) e posto:

$$(4) \quad p^{11} = X, \quad p^{12} = p^{21} = Y, \quad p^{22} = Z, \quad \mu = \frac{1}{2} \log \lambda$$

diviene allora, dopo facili semplificazioni:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + 3X \frac{\partial \mu}{\partial x} + 4Y \frac{\partial \mu}{\partial y} - Z \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y} - X \frac{\partial \mu}{\partial x} + 4Y \frac{\partial \mu}{\partial x} + 3Z \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Il problema della determinazione dell'integrale generale del sistema (5) caratterizzante dunque l'equilibrio di una membrana su superficie prestabilita non è stato finora risolto in generale mentre si conoscono le soluzioni relative ai seguenti 3 casi particolari:

- 1° superficie a curvatura totale nulla (piano e sviluppabili)⁽²⁾;
- 2° superficie a curvatura costante e su queste applicabili (sfera, pseudosfera)⁽³⁾;
- 3° superficie di rotazione⁽⁴⁾.

Nel sistema (5) mentre $X(x, y)$, $Y(x, y)$, $Z(x, y)$ indicano gli incogniti sforzi, $\mu(x, y)$ denota una funzione conosciuta (l'elemento caratteristico della metrica) ma per il resto qualsiasi. La funzione μ dipende solo dal tensore fondamentale. Anche la curvatura totale k , grazie al « teorema egregium » di Gauss dipende solo da tale tensore e risulta:

$$k = \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \right\}$$

ossia, per l'ultima delle (4):

$$(6) \quad k = -e^{-2\mu} \Delta \mu.$$

Ciò premesso andiamo a studiare il sistema (5).

Un tentativo di semplificazione che si mostrerà fecondo, ci è suggerito dalla struttura stessa del sistema.

Si ponga:

$$(7) \quad X = Ae^{\gamma\mu}, \quad Y = Be^{\gamma\mu}, \quad Z = Ce^{\gamma\mu}$$

denotando con A, B, C le tre nuove funzioni incognite e con γ una costante da determinarsi.

(2) G. B. AIRY, loc. cit. in (1).

(3) B. FINZI, loc. cit. in (1).

(4) E. STORCHI, loc. cit.

Con una tale sostituzione il sistema (5) diviene:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + [(\gamma + 3)A - C] \frac{\partial \mu}{\partial x} + (\gamma + 4)B \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} + (\gamma + 4)B \frac{\partial \mu}{\partial x} + [(\gamma + 3)C - A] \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

e si nota subito che per $\gamma = -4$ esso acquista una forma particolarmente semplice che diremo « forma canonica ». Nel nuovo sistema da studiarsi, che è dunque il seguente:

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = (A + C) \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} = (A + C) \frac{\partial \mu}{\partial y} \end{cases}$$

le funzioni incognite A, B, C sono legate agli sforzi dalle formule:

$$(9) \quad p^{xx} = \frac{A}{\Delta}, \quad p^{xy} = p^{yx} = \frac{B}{\Delta}, \quad p^{yy} = \frac{C}{\Delta}$$

nelle quali $\Delta = \lambda^2 = e^{4\mu}$ indica il determinante della metrica.

Un'osservazione si presenta spontanea: se $A = -C$, la soluzione generale del sistema (*) (che si riduce al sistema d'equilibrio relativo al caso delle sviluppabili) risulta:

$$A = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad B = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$

denotando χ una funzione arbitraria di x ed y .

Poichè $A + C = 0$ implica χ funzione armonica e quindi:

$$I = (p^{xx} + p^{yy}) \cdot \lambda = \Delta \chi \cdot \lambda^{-1} = 0,$$

tenuto conto della (9) si trae la prima conclusione:

« Assumendo χ funzione armonica di x ed y , si ottiene la seguente soluzione del sistema indefinito d'equilibrio di una membrana su superficie prestabilita di metrica generica:

$$p^{xx} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad p^{xy} = p^{yx} = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad p^{yy} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$

corrispondentemente alla quale è nullo l'invariante lineare del tensore degli sforzi e quindi, nel caso di una membrana elastica, il coefficiente di dilatazione cubica ».

Ritornando ora al caso generale, notiamo come le soluzioni di Airy e di Finzi, relative rispettivamente alle superficie sviluppabili e alle superficie a curvatura costante, suggeriscano un notevole tentativo per attaccare il problema, legando gli sforzi ad una funzione arbitraria $\chi(x, y)$ e alle sue derivate prime e seconde.

Posto:

$$(10) \quad \begin{cases} A = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + b(x, y) \frac{\partial \chi}{\partial x} + c(x, y) \frac{\partial \chi}{\partial y} + d(x, y) \chi \\ B = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + f(x, y) \frac{\partial \chi}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial \chi}{\partial y} + h(x, y) \chi \\ C = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + m(x, y) \frac{\partial \chi}{\partial x} + n(x, y) \frac{\partial \chi}{\partial y} + p(x, y) \chi \end{cases}$$

eseguite le derivazioni ed effettuate le sostituzioni in (*), si ottiene il seguente sistema differenziale di dodici equazioni nelle nove funzioni incognite $b, c, d, f, g, h, m, n, p$:

$$(11) \quad g - \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

$$(12) \quad b - \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

$$(13) \quad c + f = 0$$

$$(14) \quad \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + h + (c + n) \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

$$(15) \quad \frac{\partial b}{\partial x} + d + \frac{\partial f}{\partial y} - (b + m) \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

$$(16) \quad \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} - (d + p) \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

$$(17) \quad n - \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$$

$$(18) \quad f - \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

$$(19) \quad g + m = 0$$

$$(20) \quad \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} + p - (c + n) \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$$

$$(21) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + h + \frac{\partial m}{\partial y} - (b + m) \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$$

$$(22) \quad \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} - (d + p) \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$$

Dalle (11), (12), (13), (17), (18), (19), si trae subito:

$$g = \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad ; \quad b = \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad ; \quad n = \frac{\partial \mu}{\partial y} \quad ; \quad f = \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad ; \quad c = -\frac{\partial \mu}{\partial y} \quad ; \quad m = -\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

mentre dalle (15) e (20) si ottiene: $d = -\Delta\mu$; $p = -\Delta\mu$. La (14) dà poi: $h = 0$, valore che si accorda con quello dedotto dalla (21). Le nove funzioni $b, c, d, f, g, h, m, n, p$ sono state così determinate mediante $\mu(x, y)$, l'elemento che caratterizza la metrica.

Sostituendo in (16) e (22) si ha poi:

$$-\frac{\partial(\Delta\mu)}{\partial x} = -2\Delta\mu \frac{\partial \mu}{\partial x}, \quad -\frac{\partial(\Delta\mu)}{\partial y} = -2\Delta\mu \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

ossia, se $\Delta\mu \neq 0$ e quindi non si tratta di sviluppabili:

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \log \Delta\mu - \mu \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \log \Delta\mu - \mu \right) = 0. \end{cases}$$

Queste dicono che affinché il sistema (*) sia soddisfatto con la soluzione dianzi trovata occorre e basta che risulti:

$$(24) \quad \frac{1}{2} \log \Delta \mu - \mu = \text{costante}.$$

Implicando la (24): $k = -\Delta \mu / e^{2\mu} = \text{costante}$, si conclude, tenendo presenti le (9), con la seguente proposizione:

« Se la curvatura totale k della superficie considerata è costante (sviluppabili, sfera, pseudosfera o superficie su queste applicabili) l'integrale generale delle equazioni indefinite della statica dei continui è il seguente:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} p^{xx} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \Delta \mu \chi \right) \\ p^{xy} = p^{yx} = \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \\ p^{yy} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \Delta \mu \chi \right). \end{array} \right.$$

Questo risultato era già stato stabilito per altra via ed in forma tensoriale da B. Finzi ⁽⁵⁾ e sussiste anche relativamente alle sviluppabili, per le quali $\Delta \mu = 0$.

Il metodo da noi seguito ci permette però di invertire tale risultato e precisamente di affermare che:

« Non è possibile soddisfare alle equazioni indefinite d'equilibrio di un continuo su superficie prestabilita, legando linearmente gli sforzi ad una funzione $\chi(x, y)$ dalle sue derivate prime e seconde se non nel caso che la curvatura totale gaussiana della superficie sia nulla o costante ».

Astronomia. — *Orbita provvisoria della stella binaria ADS 7871.*
Nota di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. La stella 7871 del *Catalogue of double stars* di Aitken ($\alpha = 10^h 37^m, 1$; $\delta = 9^\circ 6'$; $m_1 = 7,2$; $m_2 = 9,2$; Spettro = F5), brevemente indicata col simbolo ADS 7871, è una doppia molto stretta che venne osservata da Maedler nel 1843 e successivamente da O. Struve, da Schiaparelli e da altri astronomi, e studiata da Glasenapp, da Gore ed ultimamente (1946) da Ekemberg, il quale però è giunto a risultati in netto contrasto con quelli trovati dai suoi predecessori. Infatti mentre Glasenapp nelle sue due orbite, calcolate verso il 1872, trova una forte eccentricità di circa 0,5 e mentre Gore nella sua orbita, calcolata verso il 1892, trova un'eccentricità ancora maggiore, Ekemberg invece da un'orbita quasi circolare ($e = 0,04$). Ciò mi ha indotto a studiare nuovamente il problema, pervenendo a risultati che espongo in questa breve Nota.

(5) B. FINZI, loc. cit. in (1).

(*) Nella seduta del 12 maggio 1949.

TABELLA I.

Epoca	θ	ρ	Osservatore
1843,22	373 ^o ,7	0'',35	Mädler
45,30	373 ,3	0 ,20	Mädler
51,27	352 ,6	0 ,48	Struve
51,28	377 ,5 (?)	0 ,25	Mädler
61,26	348 ,8	0 ,59	Struve
68,03	339 ,2	0 ,50	Dembowski
71,31	328 ,4	0 ,59	Struve
79,32	315 ,7	0 ,35	Schiaparelli
80,16	334 ,3	0 ,62	Burnham
83,71	330 ,2	0 ,53	Engelmann
84,21	326 ,0	0 ,55	Perrotin
87,27	315 ,6	0 ,52	Schiaparelli
92,37	316 ,0	0 ,48	Burnham
93,28	311 ,7	0 ,55	Schiaparelli
94,75	311 ,5	0 ,43	Comstock
97,35	303 ,4	0 ,69	Aitken
1900,99	301 ,4	0 ,53	Washington Obs.
03,27	300 ,7	0 ,59	Lewis
06,74	301 ,3	0 ,61	Wirtz
08,30	287 ,0	0 ,47	Van Biesbroeck
12,92	286 ,5	0 ,48	Aitken
15,03	288 ,0	0 ,42	Rabe
15,25	284 ,6	0 ,46	Van Biesbroeck
15,31	277 ,8	0 ,48	Comstock
16,22	286 ,8	0 ,61	Doolittle
21,91	267 ,5	0 ,45	Aitken
22,06	274 ,5	0 ,46	Neckville
23,82	258 ,5	0 ,46	Van den Bos
24,25	269 ,2	0 ,47	Van Biesbroeck
25,25	265 ,2	0 ,47	Doberck (AN Bd. 228)
39,27	243 ,6	0 ,45	Schmeidler (AN Bd. 270)

2. Dai cataloghi di stelle doppie di Aitken e di Burnham e da ricerche compiute nella biblioteca dell'Osservatorio di Monte Mario (Roma), ho ricavato la lista di

osservazioni, riportata nella Tabella I, dove indico sempre con ϑ l'angolo di posizione e con ρ la distanza angolare tra la stella principale A ed il satellite B.

3. Queste misure indicano chiaramente un moto *retrogrado* di B intorno ad A, poichè l'angolo ϑ va diminuendo col tempo ed anzi dal 1843 ad oggi è diminuito di circa 130° . Ma evidentemente il valore assai piccolo di ρ , e quindi la strettezza del sistema, ha reso le misure molto difficili e perciò incerte; come del resto apparisce chiaramente dalla tabella ora riportata, dove alle volte ϑ sembra aumentare per poi tornare a diminuire; ciò che è impossibile. In conseguenza il primo compito, che mi sono proposta, è stato l'esame delle osservazioni.

Per procedere nel modo più semplice, mi sono servita del metodo grafico. E cioè, sopra un foglio di carta millimetrata ho tracciato con grande scala due diagrammi cartesiani, prendendo sempre per ascissa il tempo e per ordinate nell'uno i valori dell'angolo ϑ e nell'altro quelli della distanza ρ . Ho disegnato quindi con la massima cura le curve rappresentanti l'andamento medio dei due diagrammi, le quali con le loro ordinate rappresentano i valori di ϑ e di ρ depurati dagli errori accidentali di osservazione. Ho così ottenuto i seguenti valori perequati che prenderò come luoghi normali:

1843,0	375,0	0'',45	1909,0	290,0	0'',52
54,0	357,5	0 ,51	20,0	273 ,7	0 ,49
65,0	343,0	0 ,56	31,0	256 ,5	0 ,48
76,0	330,5	0 ,58	39,0	243 ,5	0 ,47
87,0	318,0	0 ,56			
98,0	304,5	0 ,54			

Come appare da questo specchietto, le irregolarità accidentali dovute ad errori di osservazioni sono scomparse; l'andamento di ϑ e di ρ in funzione del tempo è divenuto abbastanza regolare ed i dieci valori riportati sembrano abbastanza attendibili. Ma, per avere un maggiore controllo, ho calcolato approssimativamente l'area descritta dal raggio vettore AB nei 96 anni intercorrenti tra il 1843,0 ed il 1939,0 e quindi, dividendo per 96, ho trovato l'area α descritta da AB in un anno. Ciò posto, ho determinato le aree α_i descritte dal raggio vettore annualmente in ciascuno dei nove intervalli di tempo compresi tra il 1843,0 ed il 1854,0; tra il 1854,0 ed il 1865,0 ecc. prendendo per valori di ϑ e di ρ quelli perequati ora riportati ed ho eseguiti i rapporti $\alpha_i: \alpha$, ottenendo per ciascun intervallo di tempo i risultati seguenti

$\alpha_1: \alpha = 0,993$	$\alpha_4: \alpha = 1,000$	$\alpha_7: \alpha 1,001$
$\alpha_2: \alpha = 1,003$	$\alpha_5: \alpha = 1,006$	$\alpha_8: \alpha 1,000$
$\alpha_3: \alpha = 1,000$	$\alpha_6: \alpha = 1,003$	$\alpha_9: \alpha 0,994.$

4. Come appare da questo specchietto, i rapporti sono molto prossimi all'unità (come appunto deve aversi per la legge delle aree), onde i dieci luoghi normali appaiono abbastanza attendibili per poter servire di base almeno ad un'orbita preliminare; quale è appunto quella che mi propongo di ricercare.

Ho quindi riportato in un grafico i dieci punti normali (individuati ciascuno dalle coordinate polari ρ e ϑ), ho disegnato l'ellisse apparente e da questa

sono passata all'ellisse reale, applicando le note formule⁽¹⁾ date dall'astronomia siderale.

Come risultato del calcolo, ho avuto i seguenti elementi dell'ellisse reale:

$a = 0'',620$; $e = 0,659$; $i = 116^{\circ},9$; $\Omega = 6^{\circ},4$;
 $\omega = 263^{\circ},5$; $P = 144,74$; $T = 1836,49$;

dove *a* indica il semiasse maggiore, *e* l'eccentricità, *i* l'inclinazione (maggiore di 90° essendo il moto retrogrado e determinata sempre a meno del segno, come è noto dalla teoria), Ω la posizione del nodo, ω la distanza angolare tra il nodo ed il periastro contata nel senso del moto del satellite, *P* il periodo in anni e *T* la data dell'ultimo passaggio al periastro.

TABELLA II.

Data	ϑ_{oss}	ϑ_{calc}	ρ_{oss}	ρ_{calc}	$\Delta\vartheta$	$\Delta\rho$
I) <i>Orbita Ekemberg</i>						
1843,0	375°,0	381°,6	0'',45	0'',41	− 6°,6	+ 0'',04
54,0	357,5	361,9	0,51	0,46	− 4,4	+ 0,05
65,0	343,0	346,0	0,56	0,50	− 3,0	+ 0,06
76,0	330,5	332,3	0,58	0,53	− 1,8	+ 0,05
87,0	318,0	319,5	0,56	0,54	− 1,5	+ 0,02
98,0	304,5	306,4	0,54	0,51	− 1,9	+ 0,03
1909,0	290,0	291,9	0,52	0,49	− 1,9	+ 0,03
20,0	273,7	274,9	0,49	0,45	− 1,2	+ 0,04
31,0	256,5	255,0	0,48	0,42	+ 1,5	+ 0,06
39,0	243,5	239,3	0,47	0,41	+ 4,2	+ 0,06
II) <i>Orbita Giannuzzi</i>						
1843,0	375°,0	374,5	0,45	0,40	+ 0,5	+ 0,05
54,0	357,5	353,1	0,51	0,52	+ 4,4	− 0,01
65,0	343,0	340,9	0,56	0,58	+ 2,1	− 0,02
76,0	330,5	329,9	0,58	0,58	+ 0,6	0,00
87,0	318,0	318,2	0,56	0,56	− 0,2	0,00
98,0	304,5	305,2	0,54	0,52	− 0,7	+ 0,02
1909,0	290,0	290,1	0,52	0,49	− 0,1	+ 0,03
20,0	273,7	273,7	0,49	0,47	0,0	+ 0,02
31,0	256,5	256,5	0,48	0,47	0,0	+ 0,01
39,0	243,5	244,1	0,47	0,48	− 0,6	− 0,01

(1) Cfr. G. ARMELLINI, *Trattato di Astronomia Siderale*, vol. II, p. 431 e sgg.

5. Passo ora a confrontare questa mia orbita con quelle precedentemente trovate da altri astronomi.

Come è noto, le due vecchie orbite di Glasenapp, che risalgono al 1872, e quella un po' più recente (1892) del Gore, paragonate con le osservazioni, danno scarti così forti, che Aitken le considera come aventi interesse puramente storico. Per brevità, mi limiterò quindi all'esame della sola orbita moderna, quella trovata⁽²⁾ tre anni or sono (1946) da Ekemberg.

Gli elementi orbitali di Ekemberg, sono:

$$a = 0'',549 \quad ; \quad e = 0,041 \quad ; \quad i = 136^{\circ},0 \quad ; \quad \Omega = 146^{\circ},1 \quad ; \\ \omega = 117^{\circ},0 \quad ; \quad P = 232,0 \quad ; \quad T = 1843,4.$$

Come si vede, la data T dell'ultimo passaggio al perielio è poco diversa dalla mia, mentre invece vi è qualche differenza per il semiasse a ed una differenza ancora più notevole per la durata del periodo P . Risultano poi differentissimi i valori di Ω ed ω per le due orbite; ma si deve osservare che la posizione del periastro ha debole importanza in orbite quasi circolari. La vera differenza delle due orbite sta quindi nel fatto che quella di Ekemberg è quasi circolare ($e = 0,041$), mentre la mia presenta una forte eccentricità ($e = 0,659$) anche maggiore di quella trovata da Gore che ebbe $e = 0,579$.

6. Volendo esaminare quale delle due orbite soddisfi meglio alle osservazioni, ho calcolato i valori di ϑ e di ρ per i dieci luoghi normali sopra indicati, valendomi delle formole date dall'Astronomia Siderale⁽³⁾ e servendomi sia degli elementi orbitali di Ekemberg, sia dei miei.

Sono così pervenuta alla Tabella II.

Uno sguardo alla Tabella II mostra subito che, mentre nell'orbita di Ekemberg le differenze $\Delta\vartheta$ e $\Delta\rho$ tra i valori osservati e quelli calcolati di ϑ e di ρ hanno carattere *sistematico*, nella mia orbita hanno carattere *saltuario* e sono molto più piccole. Eseguendo la somma dei quadrati delle differenze, prendendone la media ed estraendo la radice quadratica, si hanno infatti per gli scarti quadratici medi i seguenti valori:

A) *Orbita Ekemberg*

$$\Delta\vartheta_m = 3^{\circ},26 \qquad \Delta\rho_m = 0'',046.$$

B) *Orbita Giannuzzi*

$$\Delta\vartheta_m = 1^{\circ},59 \qquad \Delta\rho_m = 0'',022.$$

Credo quindi di poter concludere che la mia orbita sia preferibile a quella di Ekemberg, od almeno, che *non è in nessun modo dimostrato che la binaria ADS 7871 abbia un'orbita quasi circolare*, come risulterebbe dagli elementi di Ekemberg. Ciò tanto più che, secondo la Statistica Stellare, le stelle binarie con periodo di circa due secoli presentano generalmente notevoli eccentricità, in media superiori a 0,5. La ADS 7871 rientrerebbe quindi nella regola generale.

(2) Cfr. MEDDELANDEN, «Lund Astr. Obs.», serie II, n. 116.

(3) Cfr. G. ARMELLINI, op. cit., vol. II, p. 438.

Astronomia. — *Determinazione del passo del micrometro in A. R. del cerchio meridiano Repsold mediante stelle circumpolari e zenitali.* Nota I di RICCARDO BARBATELLI, presentata (*) dal Socio L. CARNERA.

Nell'atto di iniziare una serie di comunicazioni con i risultati delle osservazioni al cerchio meridiano dell'Osservatorio di Capodimonte, credo non inutile premettere un breve cenno sulle vicende di questo strumento, con riserva di dare una dettagliata descrizione del massimo strumento di questa specola in altra pubblicazione.

La sala meridiana ove era stato sistemato in origine il C. M. secondo l'originale progetto del Piazzzi, risultava per le moderne esigenze di tali strumenti ormai ben poco adatta, essendo inserita nello stabile adibito ad uffici, e prospiciente ad un grande terrazzo in cemento (ora ricoperto di aiuole) che irradiava parte del calore assorbito disturbando sensibilmente l'osservazione.

Nell'anno 1935 venne pertanto costruita una delle più moderne sale meridiane di Europa, completamente isolata, con apertura automatica e dotata di tende atte a riparare l'interno dalle radiazioni solari quando si debba lavorare ad osservare durante il giorno.

In seguito agli eventi bellici lo strumento che aveva subito radicali lavori di rimodernamento dovette essere smontato, e potè essere definitivamente sistemato nell'anno 1946, ma la scarsità di personale disponibile non permise la sistematica ripresa delle osservazioni che negli ultimi tempi.

Primo lavoro che s'impose fu quello di ristudiare tutte le costanti strumentali e soprattutto di determinare i valori angolari e gli errori delle due viti del micrometro, che, costruito dal Repsold secondo il ben noto modello a registrazione automatica, era stato introdotto fin dall'epoca della Direzione del prof. Contarino.

Sono i risultati di queste prime indagini che costituiscono l'argomento di questa Nota; ed in questa in particolare sono esposti parte degli studi sulla vite in ascensione retta.

Essa è collegata con un tamburo graduato, e sullo stesso asse vi è pure un disco di agata fornito di 8 contatti in argento di lunghezza variabile, per far sì da poter distinguere facilmente sulla striscia del cronografo la corrispondenza dei segnali con le posizioni del filo mobile e quindi delle letture sul tamburo della vite, che può compiere 20 rivoluzioni.

Il campo può essere illuminato o direttamente mediante una piccola lampadina, la cui felice disposizione permette sia di illuminare la zona circostante (ed in particolare i tamburi delle viti) che di rendere luminosi i fili lasciando oscuro il campo; oppure indirettamente, mediante una forte lampada che, inviando attraverso l'asse di rotazione del cannocchiale un fascio di raggi su due prismi a riflessione totale, e da questi su una piccola superficie speculare disposta al centro

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

della lente obbiettiva, illumina i fili del micrometro. L'intensità dell'illuminazione del campo è regolabile mediante una manopola disposta parallelamente all'asse ottico. Nelle osservazioni è sembrato conveniente illuminare il campo con luce rossa.

L'asse orizzontale dello strumento poggia, per mezzo di due supporti cilindrici di ghisa (sul tipo delle più recenti costruzioni, fatti nell'officina dell'Osservatorio), su due robusti pilastri monoliti di marmo del tutto indipendenti dal pavimento della sala e portati dal sottostante grande pilastro costruito in mattoni.

Il cannocchiale è munito di una lente di mm. 165 di apertura con una distanza focale di 202 cm.: si possono osservare in campo illuminato stelle fino alla 9^a grandezza ed a fili lucidi fino alla 9^m,5.

Il tubo del cannocchiale è stato recentemente rivestito di una camicia di rame, per evitare le brusche variazioni di temperatura e le flessioni prodotte dal calore emanato dagli edifici circostanti.

Sono stati aggiunti inoltre avanti all'obiettivo tre diaframmi di garza di diverso spessore e manovrabili facilmente con manopola disposta di fianco all'oculare che permettono di ridurre la grandezza apparente delle stelle rispettivamente di circa 2^m,5, 5^m,0 e 7^m,5.

I metodi di osservazione adoperati per questo primo lavoro con lo scopo di ricavare il valore angolare medio di una rotazione della vite in A. R. sono stati i seguenti:

per le stelle circumpolari, si è seguita la stella col filo mobile in A. R. per tutte le 20 rotazioni, da 0^R.0 a 20^R.0;

per le stelle zenitali, si è invece fissato un certo punto del campo corrispondente alla 5^a rotazione ed a partire da questa posizione si è seguita la stella fino alla 15^a rotazione.

Della registrazione cronografica sono stati letti sempre 5 appulsi per ogni rotazione della vite, corrispondenti a letture distanziate di 0^R.2 e dei 5 istanti è stata calcolata la media: la differenza fra le due medie successive, corrispondenti al passaggio della stella per due posizioni del filo mobile distanti 1^R.00 è stata ridotta alla distanza equatoriale, e dei 20 valori ottenuti da ciascuna stella della prima serie e dei 10 di quelli della seconda serie si è fatta la media.

Per le stelle della prima serie si è tenuto conto della riduzione all'equatore anche dei termini di secondo ordine.

Per le declinazioni delle stelle, tolte sempre dal catalogo F. K., e dal N. G. C. di Boss (quelle di cui alle tabelle è dato il numero) è sembrato superfluo calcolare il luogo apparente, data la insignificante variazione che sarebbe risultata sul valore del $\cos \delta$ ai fini di questo calcolo, ed anzi per quelle del N. G. C. si è adottato senz'altro la posizione media per il 1950 data dal catalogo tenendo conto che le osservazioni sono state fatte negli ultimi mesi del 1949, e quindi più vicine al 1950.0 che al 1949.0.

Della terza serie di osservazioni fatte allo stesso fine si riferirà nella prossima II Nota.

Le tabelle che seguono contengono in modo chiaro ed evidente i risultati ottenuti.

Accanto alle date di osservazione è indicato o il nome o il numero del N. G. C. di ciascuna stella quindi la declinazione media di questa ed infine il valore del passo medio dedotto espresso in secondi di tempo.

Sono 56 valori ricavati dalle stelle circumpolari, e 100 dalle stelle zenitali; e le osservazioni, pur essendo di tipo diverso, hanno condotto a risultati che si possono ben ritenere praticamente identici: essi mostrano l'alto grado di efficienza che possiede lo strumento nella sua nuova installazione e dopo il radicale lavoro di rinnovamento fatto negli anni che precedettero l'ultima guerra.

I valori delle medie ricavati dalle due serie sono infatti:

$$\text{dalle circumpolari} \quad I^R = 4^s.5556 \pm 0^s.0023 \quad \text{e. m.}$$

$$\text{dalle zenitali} \quad I^R = 4^s.5588 \pm 0^s.0025 \quad \text{e. m.}$$

facendo di questi la media pesata si ha complessivamente:

$$I^R = 4^s.5572 \pm 0^s.0016.$$

Ma questo valore potrebbe essere definitivo solo in assenza di errori progressivi, poichè i due valori su cui si basa non si riferiscono esattamente allo stesso intervallo della vite.

TABELLA I.

Circumpolari da 0 a 20 rotazioni.

Data	Stella	δ	Valore medio	Data	Stella	δ	Valore medio
5 settem. 1949	26071	83° 50' 5"	4.540	16 settem. 1949	31999	84° 4' 7"	4.548
" "	27502	84 36 3	4.578	18 settem. 1949	32308	81 32 7	4.537
" "	28572	83 0 9	4.568	" "	32790	82 46 6	4.567
" "	29545	80 57 6	4.586	" "	33043	82 30 5	4.573
" "	29921	80 8 4	4.557	26 settem. 1949	29921	80 8 4	4.533
" "	30375	82 41 7	4.550	" "	29545	80 57 6	4.586
" "	30730	80 4 3	4.560	" "	30375	82 41 7	4.561
" "	31223	85 51 5	4.555	" "	30730	80 4 3	4.541
" "	31671	81 7 8	4.540	" "	31223	85 51 5	4.553
7 settem. 1949	26071	83 50 5	4.555	" "	31671	81 7 8	4.498
" "	26773	83 22 2	4.557	" "	32308	81 32 7	4.528
" "	27502	84 36 3	4.554	" "	32790	82 46 6	4.565
" "	27974	84 31 6	4.555	" "	33043	82 30 5	4.570
" "	28572	83 0 9	4.565	" "	30349	80 0 2	4.538
" "	29019	82 20 9	4.556	" "	30760	82 13 1	4.548
" "	29545	80 57 6	4.565	" "	31133	82 50 0	4.526
" "	29921	80 8 4	4.564	" "	31546	80 37 8	4.566
" "	30375	82 41 7	4.557	27 settem. 1949	28572	83 0 9	4.585
" "	30730	80 4 3	4.561	" "	29019	82 20 9	4.577
" "	31223	85 51 5	4.564	" "	30375	82 41 7	4.574
" "	31671	81 7 8	4.562	" "	30730	80 4 3	4.584
" "	32308	81 32 7	4.558	" "	31223	85 51 5	4.565
" "	32790	82 46 6	4.551	" "	31671	81 7 8	4.514
8 settem. 1949	24837	81 28 5	4.562	" "	32308	81 32 7	4.540
" "	25309	83 20 2	4.556	" "	32790	82 46 6	4.558
" "	26071	83 50 5	4.568	" "	30760	82 13 1	4.570
" "	26773	83 22 2	4.544	" "	31133	82 50 0	4.553
6 settem. 1949	31671	81 7 8	4.540	" "	31546	80 37 8	4.576

TABELLA II.

Zenitali da 5 a 15 rotazioni.

Data	Stella	δ	Valore medio	Data	Stella	δ	Valore medio
22 luglio 1949	K. Lyrae	36° 2' 26"	4.565	20 agosto 1949	23141	35° 10' 37"	4.565
» »	0 Cygni	50 6 17	4.553	» »	23294	24 53 52	4.553
» »	15. Cygni	37 13 56	4.602	» »	23374	37 20 37	4.602
» »	η Cygni	34 56 57	4.574	» »	23452	46 17 24	4.574
» »	28. Cygni	36 41 24	4.531	» »	23546	23 0 22	4.531
20 agosto 1949	307. Herc	43 52 56	4.573	» »	23647	34 44 14	4.573
» »	2415. Herc	40 35 0	4.545	» »	23704	50 54 3	4.545
» »	π Herc	36 52 0	4.570	» »	23786	34 46 53	4.570
» »	72. Herc	32 32 0	4.586	» »	23863	37 19 56	4.586
» »	77. Herc	48 18 0	4.567	» »	23935	32 46 1	4.567
» »	λ Herc	26 9 0	4.557	» »	24020	27 40 5	4.557
» »	2444. Herc	41 17 0	4.548	» »	24098	35 14 14	4.548
» »	J. Herc	46 2 0	4.565	» »	24178	34 17 38	4.565
» »	μ Herc	27 45 0	4.548	» »	24262	30 0 29	4.548
» »	3485. Oph	9 51 45	4.561	» »	24342	40 0 59	4.561
» »	89. Herc	26 3 29	4.560	» »	24415	37 15 22	4.560
» »	26690	35 5 21	4.583	» »	24495	15 28 41	4.583
» »	26781	32 37 22	4.506	23 agosto 1949	23294	24 53 8	4.506
» »	26866	39 51 27	4.588	» »	23774	37 20 37	4.588
» »	26946	33 37 15	4.578	» »	23452	46 17 24	4.578
» »	27027	33 5 12	4.554	» »	23546	23 04 21	4.554
» »	An. 27204	30 17 26	4.549	» »	23647	34 44 14	4.549
» »	An. 27204	30 17 26	4.576	» »	23704	50 54 32	4.576
» »	27292	32 18 17	4.563	» »	23786	34 49 4	4.563
» »	27360	34 53 14	4.562	» »	23863	37 19 57	4.562
» »	27436	39 47 15	4.595	» »	23935	32 46 0	4.595
» »	27528	36 18 0	4.559	» »	24020	27 40 5	4.559
» »	27608	40 2 11	4.565	» »	24098	35 14 14	4.565
» »	27686	35 21 28	4.565	» »	24178	34 17 38	4.565
» »	27775	40 42 57	4.573	» »	24262	30 0 29	4.573
» »	27876	38 19 49	4.562	» »	26866	39 51 28	4.562
» »	27953	37 49 10	4.590	» »	26946	33 37 5	4.590
» »	28406	39 59 12	4.566	» »	27027	33 5 12	4.566
» »	28485	33 43 5	4.582	» »	27111	35 6 0	4.582
» »	28551	36 45 46	4.534	» »	27204	30 17 24	4.534
» »	28637	34 30 12	4.568	» »	27392	32 18 17	4.568
» »	28714	38 9 0	4.493	» »	27360	34 53 14	4.493
» »	28827	32 7 30	4.563	» »	27436	39 47 15	4.563
» »	28904	42 2 6	4.572	» »	27528	36 18 0	4.572
» »	28981	34 11 8	4.491	» »	27608	40 2 11	4.491
» »	29071	30 43 14	4.545	» »	27686	35 21 28	4.545
22 agosto 1949	28637	34 30 12	4.556	» »	27775	40 42 57	4.556
» »	28714	38 9 0	4.556	» »	27876	38 19 49	4.556
» »	28827	31 54 22	4.587	» »	27953	37 49 10	4.587
» »	28904	42 2 6	4.560	» »	28049	40 10 35	4.560
» »	28981	34 11 8	4.552	» »	28145	33 34 28	4.552
» »	29071	30 43 14	4.528	» »	28230	31 57 4	4.528
» »	29151	33 25 55	4.539	» »	BD31 4046	32 9 0	4.539
» »	29250	35 6 51	4.493	19 settem. 1949	π Herc	32 31 58	4.493
» »	29319	40 3 21	4.595	» »	72 Herc	36 52 0	4.595

Fisica matematica (Elettrotecnica). — *Sulla distribuzione transitoria disuniforme di una corrente continua in una lamiera e in un cilindro, e sulla resistenza di rotaia*^(*). Nota di DINO ZANOBETTI, presentata^(**) dal Socio G. GIORGI.

1. Quando in un conduttore elettrico percorso da corrente continua permanente il campo elettrico esistente subisce un incremento, positivo o negativo, sino a raggiungere un nuovo valore permanente, la corrente non assume immediatamente il nuovo valore di regime a causa di un effetto pellicolare transitorio.

La densità di corrente nel conduttore è cioè una funzione del tempo e delle coordinate nel conduttore per tutto il periodo, teoricamente infinito, di transizione.

Tale fenomeno, inizialmente osservato da Lord Kelvin⁽¹⁾, è interessante sia dal punto di vista teorico sia per talune applicazioni ingegneristiche; esso infatti — come si vedrà — non può essere assolutamente trascurato nel caso di conduttori di notevole sezione e di materiale magnetico quali le rotaie.

Scopo della presente Nota è lo studio di tale effetto pellicolare transitorio in un conduttore cilindrico circolare, il quale caso, per essere il perimetro minimo, rappresenta un limite atto ad orientare utilmente la mente sull'entità del fenomeno stesso.

Lo studio del conduttore costituito da una lastra piana a facce parallele e di grande superficie percorso dalla corrente in direzione parallela alle facce è stato già svolto esaurientemente da Steinmetz⁽²⁾ il quale lo ha anche applicato alla determinazione della resistenza di rotaia. I risultati che egli si proponeva hanno peraltro carattere puramente qualitativo.

2. Riteniamo utile premettere al nostro studio un richiamo ai risultati di Steinmetz ricavandoli per altra via mediante la trasformazione di Laplace.

Sia un conduttore limitato da due facce piane parallele indefinite distanti $2l_0$ isolato nello spazio e lontano da altri conduttori, avente conducibilità elettrica γ e permeabilità magnetica μ , percorso da una corrente continua permanente di densità G_0 . All'istante $t=0$ il campo elettrico esistente venga incrementato positivamente o negativamente sino ad un valore che permanga per ogni $t > 0$.

Durante il tempo teoricamente infinito che trascorre prima che la densità di corrente assuma il nuovo valore di regime G_1 , la sua distribuzione, se si indica con l la distanza dal piano mediano del conduttore, è retta dal sistema:

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 G(l, t)}{\partial l^2} - \mu\gamma \frac{\partial G(l, t)}{\partial t} = 0 \quad -l_0 < l < l_0 \quad t > 0$$

$$(2.2) \quad G(l, t) = G_1 \quad l = \pm l_0 \quad t > 0$$

$$(2.3) \quad G(l, t) = G_0 \quad -l_0 < l < l_0 \quad t = 0.$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Elettrotecnica e delle Comunicazioni Elettriche dell'Università di Bologna. Si ringraziano i professori V. Gori, direttore dell'Istituto, G. Supino e B. Segre per l'interesse e l'aiuto prestato alla compilazione della presente Nota.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1949.

(1) *The Electrician*, p. 490, marzo 1890.

(2) *Transient Electric Phenomena and Oscillation*, §§ 65-66, 1908.

La L-trasformata di (2. 1), tenuto conto di (2. 3) è

$$(2. 1^*) \quad \frac{\partial^2 G^*(l, s)}{\partial l^2} = \mu \gamma s G^*(l, s) - G_0 \quad -l_0 < l < l_0 \quad s > 0.$$

La L-trasformata di (2. 2):

$$(2. 2^*) \quad G^*(l, s) = G_1/s \quad l = \pm l_0 \quad s > 0.$$

L'integrale generale della (2. 1*) è:

$$G^*(l, s) = \frac{G_0}{s} + A \cosh \alpha l + B \sinh \alpha l \quad \alpha^2 = \mu \gamma s$$

dove per le due condizioni espresse dalla (2. 2*)

$$A = (G_1 - G_0)/s \cosh \alpha l_0 \quad B = 0$$

e quindi

$$(2. 4) \quad G^*(l, s) = \frac{G_0}{s} + (G_1 - G_0) \frac{\cosh \alpha l}{s \cosh \alpha l_0} \quad s > 0.$$

La antitrasformata del primo termine del secondo membro è G_0 , quella del secondo termine non compare nelle tavole usuali ma si può ricavare col ben noto procedimento d'inversione

$$(2. 5) \quad G(l, t) - G_0 = \frac{G_1 - G_0}{2\pi j} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{c-j\lambda}^{c+j\lambda} \frac{e^{st} \cosh \beta l}{s \cosh \beta l_0} dz \quad \beta^2 = \mu \gamma s$$

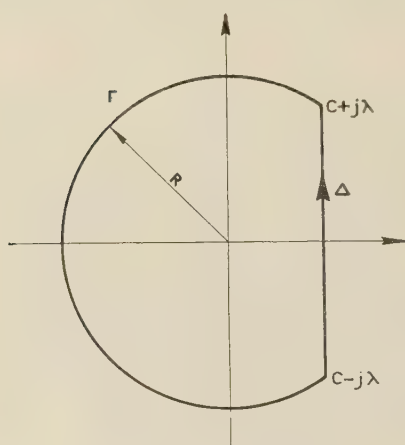


FIG. 1

dove c è un reale così grande che tutte le singolarità dell'integrando vengano a trovarsi alla sinistra della retta ($c - j\lambda, c + j\lambda$) e l'integrale s'intende eseguito lungo il segmento Δ di tale retta (fig. 1).

Poichè $\cosh \beta l$ è funzione univoca di z , l'integrando lo è pure. Completiamo allora il cammino di integrazione con un arco di cerchio Γ di raggio R non passante per alcun polo dell'integrando. Poichè al limite l'argomento di z rimane compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ si dimostra che l'integrale lungo Γ per $R \rightarrow \infty$ tende a zero. Al limite perciò l'integrale (2. 5) vale, per il teorema di Cauchy, $2\pi j$ volte la somma dei residui dell'integrando ai poli.

Ora l'integrando ha poli semplici per $z = 0$ e per $\cosh \beta l_0 = 0$, cioè

$$(2. 6) \quad \beta = j \frac{(2n-1)\pi}{2l_0} \quad \text{ossia} \quad z = -\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4\mu \gamma l_0^2} \quad n = 1, 2, \dots$$

Il residuo al polo $z = 0$ è $\cosh 0 = 1$; il residuo ai poli (2. 6) è dato da

$$\frac{e^{st} \cosh \beta l dz}{z d \cosh \beta l_0}, \quad \text{per} \quad z = -\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4\mu \gamma l_0^2}.$$

Sostituendo si ha finalmente

$$(2.7) \quad G(l, t) = G_1 \left\{ 1 + \left(1 - \frac{G_0}{G_1} \right) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \exp \left[- \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4 \mu \gamma l_0^2} t \right] \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} l \right\}$$

che è la medesima espressione ricavata da Steinmetz per altra via. Essa è suscettibile di una semplice rappresentazione grafica come in fig. 2 dove si sono tracciate le curve G/G_1 in funzione di $t/\mu\gamma l_0^2$ per vari valori di l/l_0 e per $G_0 = 0$. Tutte le curve partono evidentemente dall'origine ma per valori di $t/\mu\gamma l_0^2$ minori di 0.005 la convergenza della serie diviene lenta e i calcoli laboriosi.

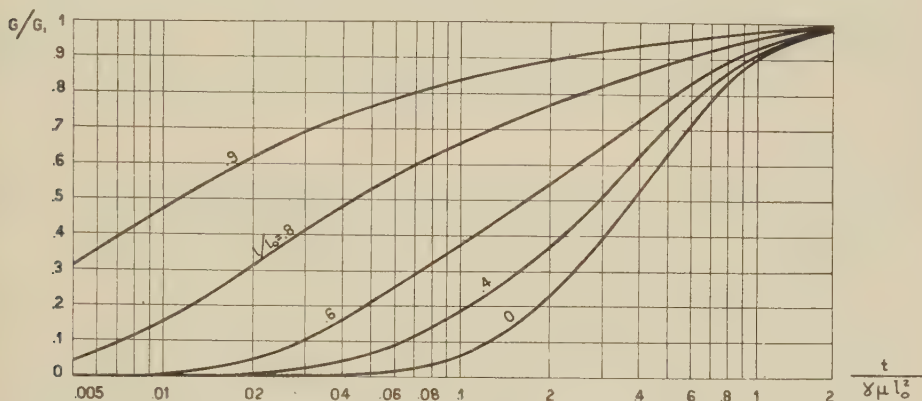


Fig. 2.

La corrente totale nel conduttore per unità di altezza della lamiera è:

$$I(t) = \int_{-l_0}^{+l_0} G(l, t) dl = 2 l_0 G_1 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{G_0}{G_1} \right) \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \exp \left[- \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4 \mu \gamma l_0^2} t \right] \right\}$$

ed il rapporto tra questa e la corrente di regime I_1

$$(2.8) \quad I(t)/I_1 = 1 - \left(1 - \frac{I_0}{I_1} \right) \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \exp \left[- \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4 \mu \gamma l_0^2} t \right]$$

si può considerare come l'inverso del rapporto tra resistenza apparente e resistenza di regime.

3. Passiamo ora allo studio di un conduttore cilindrico di sezione circolare di raggio a , isolato nello spazio e lontano dal conduttore di ritorno e siano ancora γ e μ rispettivamente la conducibilità elettrica e la permeabilità magnetica.

Se si indica con r la distanza dall'asse del conduttore la densità di corrente è ora retta dal sistema:

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 G(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G(r, t)}{\partial r} - \mu \gamma \frac{\partial G(r, t)}{\partial t} = 0 \quad 0 \leq r < a, \quad t > 0$$

$$(3.2) \quad G(r, t) = G_1 \quad r = a \quad t > 0$$

$$(3.3) \quad G(r, t) = G_0 \quad 0 \leq r < a \quad t = 0.$$

Le L-trasformate di (3.1) e (3.2) sono ora

$$(3.1^*) \quad \frac{\partial^2 G^*(r, s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G^*(r, s)}{\partial r} = \mu \gamma s G^*(r, s) - \mu \gamma G_0 \quad 0 \leq r < a \quad s > 0$$

$$(3.2^*) \quad G^*(r, s) = G_1/s \quad r = a \quad s > 0$$

e l'integrale generale della (3.1*)

$$G^*(r, s) = \frac{G_0}{s} + A I_0(\alpha r) + B K_0(\alpha r) \quad \alpha^2 = \mu \gamma s$$

dove, perchè $G^* \neq 0$ per $r = 0$ e per la (3.2*)

$$B = 0 \quad A = (G_1 - G_0)/s I_0(\alpha a)$$

e quindi

$$(3.4) \quad G^*(r, s) = \frac{G_0}{s} + (G_1 - G_0) \frac{I_0(\alpha r)}{s I_0(\alpha a)} \quad \alpha^2 = \mu \gamma s \quad s > 0.$$

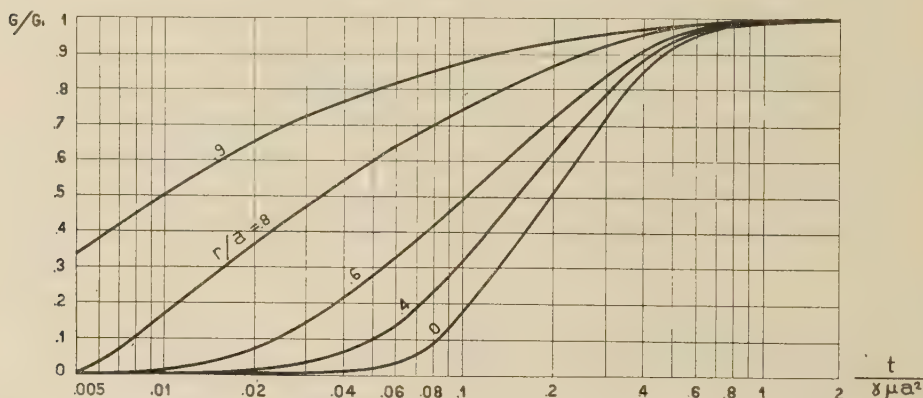


Fig. 3.

La antitrasformata del primo termine è nota, per la trasformazione del secondo termine si applica ancora il procedimento d'inversione

$$(3.5) \quad G(r, t) - G_0 = \frac{G_1 - G_0}{2\pi j} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{c-j\lambda}^{c+j\lambda} \frac{e^{zt} I_0(\beta r)}{z I_0(\beta a)} dz \quad \beta^2 = \mu \gamma z$$

e poichè $I_0(\beta r)$ è funzione univoca di z e inoltre si può vedere facilmente che l'integrale lungo Γ tende a zero per $R \rightarrow \infty$ si può ancora procedere come al paragrafo precedente.

L'integrando ha poli semplici per $z = 0$ e per $I_0(\alpha a) = 0$ cioè

$$(3.6) \quad z = -\frac{\delta_n^2}{\mu \gamma a^2} \quad \text{dove} \quad J_0(\delta_n) = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

Il residuo al polo $z = 0$ è $I_0(0) = 1$; il residuo ai poli (3.6), tenuto conto che

$$\left[z \frac{d}{dz} I_0(\beta a) \right]_{z = -\frac{\delta_n^2}{\mu \gamma a^2}} = \left[\frac{1}{2} \beta \frac{d}{d\beta} I_0(\beta a) \right]_{\beta = j \frac{\delta_n}{a}} = -\frac{1}{2} \delta_n J_1(\delta_n)$$

è

$$-\frac{2 \exp \left[-\frac{\delta_n^2}{\mu \gamma a^2} t \right] J_0 \left(\frac{\delta_n}{a} r \right)}{\delta_n J_1(\delta_n)}$$

e sostituendo

$$(3.7) \quad G(r, t) = G_1 \left\{ \left(1 - \frac{G_0}{G_1} \right) 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[-\frac{\delta_n^2}{\mu \gamma a^2} t \right] \frac{J_0 \left(\frac{\delta_n}{a} r \right)}{\delta_n J_1(\delta_n)} \right\}$$

La fig. 3 rappresenta graficamente la (3.7) e consente un immediato confronto col caso precedente. Anche qui si può notare che per valori piccoli di $t/\mu \gamma a^2$ la convergenza della serie diviene lenta e si presta meno bene ai calcoli.

La corrente totale nel conduttore è

$$\begin{aligned} I(t) &= 2 \pi \int_0^a G(r, t) r dr = \pi a^2 G_1 - 4 \pi (G_1 - G_0) \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[-\frac{\delta_n^2}{\mu \gamma a^2} t \right] \frac{\int_0^a J_0 \left(\frac{\delta_n}{a} r \right) r dr}{\delta_n J_1(\delta_n)} \\ &= \pi a^2 G_1 \left\{ 1 - 4 \left(1 - \frac{G_0}{G_1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_n^2} \exp \left[-\frac{\delta_n^2}{\mu \gamma a^2} t \right] \right\} \end{aligned}$$

e il rapporto con la corrente di regime I_1

$$(3.8) \quad I(t)/I_1 = 1 - 4 \left(1 - \frac{I_0}{I_1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_n^2} \exp \left[-\frac{\delta_n^2}{\mu \gamma a^2} t \right]$$

misura ancora l'inverso del rapporto tra resistenza apparente o efficace e resistenza di regime.

4. Come già accennato una delle più interessanti applicazioni delle formule ricavate nel paragrafo precedente si ha nella determinazione della resistenza apparente di rotaia.

Si supponga infatti un locomotore in moto uniforme: i due tratti di rotaia rispettivamente davanti e dietro di esso sono attraversati il primo da corrente nulla, il secondo dalla piena corrente di regime (nel caso di alimentazione da un estremo e senso del moto a partire da questo estremo) oppure sono attraversati entrambi da correnti di senso opposto e intensità tali che la somma aritmetica sia uguale alla intensità piena.

In ogni caso il problema può studiarsi introducendo nelle (3.7) (3.8) in luogo di G_0/G_1 rispettivamente I_0/I_1 un numero compreso tra 0 e 1 e in luogo di t , x/v dove si indichi con v la velocità del locomotore e con x la distanza di esso dalla generica sezione.

In realtà, poichè a parità di area il perimetro della sezione retta della rotaia è notevolmente maggiore della circonferenza, il fenomeno sarà meno pronunciato, tuttavia si ritiene che i valori (3.8) siano sufficienti ad orientare la mente.

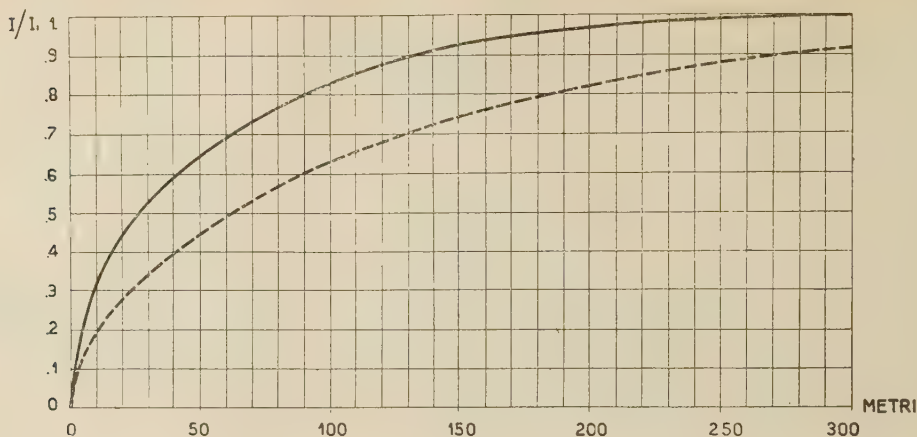


Fig. 4

Per una rotaia di sezione 64 cm^2 e caratteristiche $\gamma = 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_r = 1000$, e per una velocità di $18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ con $G_0 = 0$, la (3.8) fornisce l'andamento della corrente rappresentato in fig. 4.

Si vede che a 50 metri di distanza dal locomotore la corrente è ancora $2/3$ di quella di regime e a 100 metri poco più di $4/5$. Si vede anche che il fenomeno può ritenersi estinto a 300 metri dove la corrente differisce da quella di regime per poco più dell'1 per cento. La durata del fenomeno è di ben 17 secondi.

Nella figura si è anche riportata a tratti per confronto l'andamento che si desumerebbe dalla (2.8) e che è riportato, sotto altra forma, dal lavoro dello Steinmetz. Si nota che tale curva, seppure meno approssimata della precedente alla realtà del fenomeno, ne rappresenta efficacemente l'andamento qualitativo.

Geologia. — *Su alcune porfiriti comprese nella serie del Tonale e, in particolare, su un filone di notevole significato geologico*^(*). Nota di ROBERTO MALARODA, presentata^(**) dal Socio A. BIANCHI.

Durante le campagne geologiche del 1946 e 1947 in Val Vermiglio e nel gruppo del Tonale mi sono imbattuto in un filone che, nonostante la sua esiguità e la limitatezza stessa dell'affioramento, assume un particolare interesse perchè porta un dato veramente positivo per risolvere il problema dell'età delle porfiriti comprese nella serie del Tonale. È noto infatti ([7], p. 247 e Autori precedenti) che è ancora discusso se tali rocce siano di età prealpina, o invece di età alpina

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Mineralogia e di Geologia dell'Università di Padova e compreso nel programma del Centro Studi di Petrografia e Geologia del C. N. Ricerche diretto dai Professori A. Bianchi e G. B. Dal Piaz.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

o tardoalpina benchè sembri probabile, data la variabilità della loro composizione, che in esse sieno rappresentati vari gruppi di età diversa.

Il filone da me rilevato affiora per breve tratto sulla destra di un valloncetto che solca il fianco destro della Val Vermiglio, proprio di fronte a Fraviano (frazione di Vermiglio) e in un punto per il quale ricavo dalla tavoletta al 25.000 (Passo del Tonale) le coordinate approssimate: lat. $46^{\circ} 17' 25''$, long. W $1^{\circ} 45' 8''$, alt. 1550 m. Le due piccole apofisi nelle quali il filone è suddiviso hanno andamento molto irregolare come risulta dall'annesso schizzo. La roccia incassante è una milonite carboniosa laminatissima corrispondente ad una delle numerose fascie milonitiche⁽¹⁾ che, specialmente nella bassa Val Vermiglio e nell'alta Val di Sole, accompagnano come vicarianti la linea del Tonale o nelle quali la linea stessa si risolve ([12], p. 18).

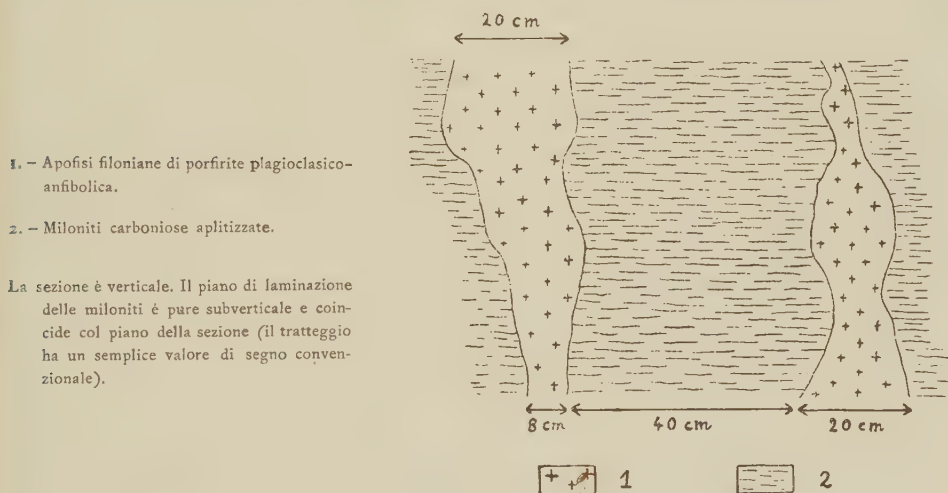


Fig. 1.

La discordanza rispetto alle miloniti, i cui piani di laminazione sono subverticali, è netta e indubitabile e, in confronto con l'estrema deformazione clastica di queste, sta la quasi assoluta compattezza del materiale filoniano, solcato appena da irregolari piani latenti di frattura debolmente ocracei e probabilmente dovuti alle sole tensioni di raffreddamento.

Due filoni di aspetto analogo sono stati da me osservati anche sopra Fucine, entro agli scisti della serie del Tonale rispetto ai quali, sul terreno, sembrano, benchè non sicuramente, discordanti. Entrambi si trovano a q. 1350 circa ma uno (n. 2) più a nord (lat. $46^{\circ} 18' 40''$, long. W $1^{\circ} 43' 55''$), l'altro (n. 3) più a sud e immediatamente vicino alla massa dell'ortogneiss di Fucine (lat. $46^{\circ} 18' 36''$, long. W $1^{\circ} 43' 54''$). Quest'ultimo, che ha una potenza di circa 30 cm., si trova esattamente all'incrocio della dorsale tra Val di Peio e Val Vermiglio con la mulattiera proveniente da Dazzarè e Pendeggie. Altre tre porfiriti dello stesso

(1) In questo punto le miloniti carboniose sembrano, almeno ad occhio nudo, notevolmente aplittizzate e rese compatte per una diffusa iniezione letto a letto.

tipo trovavò poi in Val Comegiolo, in Val Pudria e in Val Coni; queste ultime non sono state rinvenute in posto, ma nei detriti ai fianchi delle valli sotto a pareti formate da scisti della serie del Tonale, molto vicino alla fascia di miloniti della linea di Peio ⁽²⁾.

L'aspetto macroscopico è sempre quello di una roccia compatta, con massa di fondo grigia, talora grigio-chiara, e fenocristalli visibili perlopiù di anfibolo, piccoli e aciculari (solo raramente con qualche tozzo individuo che può superare le dimensioni del cm), e talora (nn. 1 e 2) di plagioclasio. L'analogia di questi materiali si rivela però anche allo studio microscopico che ci presenta delle rocce a struttura porfirica tipica con fenocristalli di orneblenda e plagioclasio (più raro e più piccolo) e massa di fondo costituita essenzialmente di plagioclasio allotriomorfo e di piccoli aciculi di anfibolo, oltre agli accessori e a quantità più o meno abbondanti di minerali di neoformazione. La grana è piccola nella massa di fondo e fino a media nei fenocristalli di anfibolo ed è molto variabile, sia nella massa di fondo, da mm. 0,05 (molto meno nella roccia di fronte a Fraviano) a mm. 0,1, sia nei fenocristalli, ove normalmente va da mm. 0,1 a mm. 4 e, in qualche anfibolo di grandezza eccezionale, raggiunge cm. 1,5 ca. Nessuno dei minerali presenta tracce di ricristallizzazione né di deformazioni clastiche (tranne un accenno ad estinzione ondulata che si osserva in certi granuli di quarzo). Tutte queste rocce hanno subito delle azioni idrotermali abbastanza intense, anche se in parte di tipo diverso, come denota la diversità dei nuovi minerali formatisi.

L'esame microscopico ha portato a determinare le seguenti composizioni (i minerali sono elencati seguendo la loro frequenza attuale, cioè non facendo distinzione tra minerali di genesi tardiva e quelli originari).

1. DI FRONTE A FRAVIANO - *plagioclasio*: individui idiomorfi e massa di fondo allotriomorfa. Composizione: oligoclasio 18 % an per i fenocristalli e la massa di fondo, labradorite al 65 % an per il nucleo dei maggiori fenocristalli. Composizione media: andesina labradoritica al 45 % an ⁽³⁾. Geminati carlsbad e albite; zonatura molto evidente - *anfibolo*: orneblenda verde con lieve tendenza a orneblenda bruna, talora zonata (γ = grigio verdastro con chiazze talora verso l'azzurro, talora verso il bruno; β = grigio-verde oliva; α = giallognolo chiaro; $\gamma > \beta \gg \alpha$; $c/\gamma = 19^\circ$ ⁽⁴⁾) - *zoisite-muscovite-sericite*. Minerali accessori: *clorite*: derivata dalle originarie lamelle biotitiche oppure di neomineralizzazione in spalmature e vene - *pirite-limonite-ematite*. Alterazione avanzata (cloritizzazione della biotite a trasformazione in aggregato clinozoisitico-sericitico dei maggiori individui feldispatici). La roccia originaria doveva avere una composizione plagioclasico-anfibolico-biotitica con plagioclasio di gran lunga prevalente.

(2) Un'altra porfirite, di cui però non è stata data sinora la descrizione petrografica, fu segnalata da C. ANDREATTA presso l'ex forte Strino ([1], p. 302; [2], p. 20; [3], p. 66).

(3) Indici nettamente superiori al balsamo negli individui idiomorfi e appena leggermente nella massa di fondo. L'estinzione in geminati albite in zona simmetrica varia, nei cristalli zonati da qualche grado negativo (periferia) a + 35° (centro); in individui a media composizione in zona perfettamente simmetrica: 25°.

(4) Valore medio di 6 misure eseguite al t. u.

2. SOPRA FUCINE — *plagioclasio*: in piccola parte idiomorfo, perlopiù allotriomorfo, sempre molto zonato. Composizione variabile da oligoclasio-albite 10% an ad andesina al 31% an; composizione media di oligoclasio al 20-25% an⁽⁵⁾—*anfibolo*: orneblenda verde, talora geminata secondo (100), spesso zonata; $c/\gamma = 160$ ⁽⁶⁾; Ch^m negativo; pleocroismo conservato solo al nucleo dei cristalli più grossi o in rari individui minori (γ = azzurro verdognolo o verde azzurrino; β = verde oliva; α = verde giallognolo molto chiaro; $\gamma \approx \beta \gg \alpha$)—*sericite-zoisite-clorite*: pennina quasi completamente estinta in plaghe associate ad epidoto e titanite-*epidoto* di tipo clinozoisitico—*quarzo-titanite*. Minerali accessori: *pirite-biotite* con principio di decolorazione—*tormalina*: in frammenti entro all'anfibolo. Pleocroismo: ω = bruno; ϵ = incolore. Alterazione della roccia molto avanzata, di tipo saussurítico. La prevalenza quantitativa del plagioclasio sull'anfibolo è solo minima.

3. SOPRA FUCINE — *anfibolo*: i fenocristalli hanno carattere di orneblenda bruna, probabilmente a tendenza barkevikitica (γ = bruno chiaro; β = bruno molto chiaro; α = giallo bruno quasi incolore; $\gamma > \beta > \alpha$; c/γ = ca 15°, variabile irregolarmente nello stesso cristallo⁽⁷⁾). I cristalli minori e la periferia di quelli maggiori hanno invece carattere di orneblenda verde (γ = verde grigiastro, talora un po' azzurrino; β = verde olivastro; α = giallastro molto chiaro; $\gamma > \beta \gg \alpha$; $c/\gamma = 200$ ⁽⁸⁾)—*calcite-plagioclasio*: raramente idiomorfo; rari i geminati albite o carlsbad; talora al nucleo dei fenocristalli di orneblenda sotto forma di cristalli allungati e talora con composizione di albite-oligoclasio al 10-13% an⁽⁹⁾. Altrimenti la composizione varia da albite-oligoclasio al 15-17% an⁽¹⁰⁾ ad oligoclasio a ca 20% an⁽¹¹⁾—*sericite-epidoto* di composizione media⁽¹²⁾—*clorite* con caratteri da clinocloro—*quarzo*. Minerali accessori: *titanite* debolmente pleocroica—*biotite*: talora associata all'anfibolo, perlopiù in associazioni minute di tipo sferulitico. Pleocroismo: $\gamma = \beta$ = bruno chiaro; α = bruno quasi incolore. Assorbimento: $\gamma \approx \beta \gg \alpha$. Talora decolorata, talora cloritizzata—*pirite*. Azione metamorfosante di tipo idrotermale molto energica con trasformazione dell'anfibolo in calcite, quarzo, clorite, epidoto, titanite e del plagioclasio in sericite, con decolorazione e cloritizzazione della biotite e piritizzazione. Piccola parte del quarzo potrebbe

(5) Indici inferiori, uguali o superiori a quello del balsanio, perlopiù però quasi uguali. La misura dell'angolo di estinzione in zona simmetrica si è potuta fare su un solo cristallo ottenendo 0° per la periferia e 14° per il centro.

(6) Al t. u. come media di 10 misure con valori estremi 14° e 17°.

(7) Valore ottenuto come media di 25 misure effettuate al t. u. I valori più frequenti furono quelli di 14°, 15° e 16°.

(8) Valore ottenuto come media di 15 misure effettuate al t. u.

(9) $Ch^m +$; $\omega > \gamma$.

(10) $Ch^m +$; indici superiori o uguali a quello del balsamo ed inferiori ad ϵ ed ω del quarzo;

(11) $Ch^m -$; indici superiori o molto superiori a quello del balsamo; $\gamma \geq \omega$; β ed $\alpha \ll \omega$. γ, β ed $\alpha \ll \epsilon$.

(12) Massima birifrangenza ca 0,030; pleocroismo assente o, qualche volta, appena accennato tra incolore e affumicato quasi incolore; $Ch^m -$ e $Ch^z -$ ma, altre volte, negli individui pleocroici, $Ch^m +$ e $Ch^z +$; 2V talora quasi uguale a 90°.

anche essere di origine primaria. Originariamente il plagioclasio doveva essere in quantità suppergiù uguale all'anfibolo.

4. VAL CONI - *plagioclasio*: composizione degli individui idiomorfi variabile per zonatura da oligoclasio-albite al 7% an a labradorite al 67% an. La massa di fondo sembra abbia composizione di termini oligoclasici dal 20 al 30% an⁽¹³⁾-*anfibolo*: orneblenda verde (γ = verde bruniccio e talora, alla periferia, verde grigio un po' azzurrino; β = verde olivastro; α = verdolino quasi incolore; $\gamma \approx \beta \gg \alpha$; $c/\gamma = 19^\circ-20^\circ$). Rari i geminati {100}, comune la zonatura-*biotite*: di solito in aggregati. Colorazione molto ridotta per alterazione. Pleocroismo: $\gamma = \beta$ = bruno chiaro; α = incolore-*calcite*: abbondante in plaghe con l'anfibolo ed i minerali secondari-*quarzo-titanite* leggermente pleocroica-*pirite*: in aggregati talora con veli limonitici-*epidoto*: clinozoisite (pleocroismo nullo, Ch^z —, Ch^m +). Minerali accessori: *muscovite-ilmenite-apatite*. Nessuna alterazione nei plagioclasii. Probabile azione idrotermale invece sull'anfibolo con segregazione di calcite, epidoto, titanite e quarzo (i due ultimi probabilmente in parte anche primari). Originariamente plagioclasio ed orneblenda dovevano partecipare in proporzioni uguali alla formazione della roccia.

5. VAL PUDRIA - *plagioclasio*: composizione abbastanza uniforme tanto nei rari fenocristalli che nella massa allotriomorfa di fondo e corrispondente essenzialmente a termini albitico-oligoclasici tra il 10 e il 20%⁽¹⁴⁾. Rari geminati carlsbad-*anfibolo*: orneblenda verde. Talora zonato o geminato secondo {100}. Pleocroismo: $\gamma = \beta$ = grigio verde; α = grigio verde chiaro, con assorbimento $\gamma = \beta \gg \alpha$; in certi punti incipiente decolorazione; $c/\gamma = 18^\circ-20^\circ$ -*epidoto* clinozoisitico. Minerali accessori: *clorite* con caratteri di clinocloro + *sericite-quarzo-pirite* talora un po' limonitizzata. Alterazione notevole del plagioclasio con formazione di epidoto e sericite, dell'anfibolo con decolorazione e formazione di epidoto e clorite.

6. VAL COMEGIOLO - *anfibolo*: di tipo variabile come è attestato anche dalla zonatura. Orneblenda verde facente transizione ad orneblenda bruna (γ = bruno-grigiastro verdiccio; β = bruno verde giallastro; α = giallognolo quasi incolore; $\gamma \approx \beta \gg \alpha$; $c/\gamma = 18^\circ$ (al t. u.); talora presenta geminati-*clorite* di tipo clinocloro come è riconoscibile dai colori d'interferenza e dal Ch^m positivo-*plagioclasio*: qualche volta idiomorfo, più spesso allotriomorfo. Composizione media di oligoclasio al 20-25% an⁽¹⁵⁾; nei cristalli zonati nucleo andesinico e forse anche più basico. Rari i geminati secondo la legge dell'albite-*calcite-sericite-quarzo-titanite*—

(13) Le poche misure possibili su geminati {010} hanno dato per le estinzioni in zona simmetrica — 14° per l'estremo orlo periferico e + 38° per il nucleo. Gli indici nella massa del plagioclasio allotriomorfo sono uguali o superiori al balsamo ed è pertanto da ritenere che la composizione più acida sia esclusiva solo di certi cristalli idiomorfi.

(14) La determinazione è basata sul Ch^m che nei fenocristalli risulta essere positivo e sugli indici, ora uguali, ora debolmente superiori al balsamo. Forse per qualche granulo si può ammettere una composizione un po' più basica, ma al massimo fino ad un oligoclasio al 30% an.

(15) γ, β ed $\alpha \gg$ balsamo; γ e $\beta > \omega$; α e $\beta \ll \varepsilon$.

epidoto: di tipo medio tra la clinozoisite e la pistacite ($\gamma = \text{verdolino}$ appena percettibile; $\beta = \alpha = \text{incolore}$; $\text{Ch}^2 -$; $c/\alpha \approx -2^\circ$ ⁽¹⁶⁾)—*pirite* con alterazione limonitica incipiente. In quantità accessorie la *biotite* perlopiù decolorata o semicloritizzata. Trasformazioni di tipo idrotermale hanno alterato il nucleo dei cristalli zonati di plagioclasio in sericite con quantità accessorie di saussurite ed hanno attaccato l'orneblenda con formazione di clorite, calcite, epidoto, titanite e quarzo (in parte anche primario, come pure la titanite). Nella composizione originaria fra gli elementi essenziali (plagioclasio, anfibolo, quarzo) al plagioclasio spettava una parte di gran lunga dominante.

Dal confronto tra la composizione dei vari tipi esaminati risulta che si tratta sempre di porfiriti costituite essenzialmente di plagioclasio ed orneblenda. Il plagioclasio è spesso fortemente zonato e raggiunge talora termini notevolmente acidi. Il quarzo è assente o, se presente, può essere, almeno in parte, interpretato come di origine idrotermale per trasformazione o apporto. Merita di essere osservato il fatto che in alcune di queste porfiriti si ha una caratteristica formazione tardiva di abbondante calcite, epidoto e titanite ⁽¹⁷⁾, in altre invece, una diffusa formazione di zoisite e sericite.

Le conclusioni generali sul tipo magmatico e sui rapporti genetici di queste porfiriti richiedono studi approfonditi su scala regionale tanto più che, date le azioni idrotermali subite, non ci si può basare su dati di analisi chimiche. Alcune di esse, con plagioclasio fortemente zonato ed essenzialmente andesinico-labradoritico, possono ragionevolmente essere considerate come facenti parte del seguito filoniano dell'Adamello nel quale numerose rocce di questo tipo sono già segnalate (cfr. per esempio [4], pp. 35-38); per le altre, e specialmente per quelle con plagioclasio nettamente acido, non si hanno invece elementi per una tale affermazione.

Fra tutte le porfiriti studiate più di ogni altra si accorda con analoghi filoni dell'Adamello quella del canale di Fraviano. Essa viene così a precisare, con un elemento nuovo, la datazione della importante linea tettonica che attraversa, linea lungo la quale i movimenti con deformazione postcristallina devono essersi perlomeno iniziati prima che cessassero le manifestazioni, sia pure le ultime, del magmatismo dell'Adamello ⁽¹⁸⁾. Allo stesso tempo questo nuovo dato ci permette di affermare che alcune, almeno, delle porfiriti plagioclasico-anfiboliche comprese nella serie del Tonale sono di età recente e posteriore a quella della linea del Tonale (Oligocene-Miocene inferiore) ([7], p. 288). Si viene così a confermare, una volta di più, che fra il fenomeno magmatico dell'Adamello e la formazione

(16) Valori approssimati della birifrazione: $\gamma - \alpha = 0,037$; $\gamma - \beta = 0,015$; $\beta - \alpha = 0,016$.

(17) Penso che parte dell'abbondante titanite presente in alcune di queste rocce possa derivare per trasformazione dell'orneblenda, nonostante si tratti perlopiù di orneblenda verde, perchè si trova spesso intimamente legata all'anfibolo e ai minerali che ne derivano.

(18) Questa è la conclusione più prudente che si può trarre dai fatti osservati. Dato l'estremo grado di milonizzazione della roccia incassante del tutto simile a quello delle miloniti della vera e propria linea del Tonale, distanti solo circa 1 km, e data l'assoluta mancanza di tracce di cataclasi nella roccia filoniana è però molto probabile che quest'ultima sia posteriore anche ai movimenti più tardivi verificatisi lungo la linea del Tonale.

delle grandi linee di disturbo periferiche esistono ripetuti addentellati⁽¹⁹⁾ poichè essi si sono manifestati con una successione di atti che si possono però definire, nel loro insieme, come approssimativamente contemporanei⁽²⁰⁾.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] ANDREATTA C., *Sulle rocce eruttive del gruppo Ortles-Cevedale*. «R. Acc. d'Italia, Rend. Cl. Sc. fis. mat. nat.», ser. 7^a, 3, 289-304 (1941).
- [2] ANDREATTA C., *Successione nelle manifestazioni magmatiche nel massiccio Ortles-Cevedale*. «Studi Trentini Sc. Nat.», 23, 27 pp. (1942).
- [3] ANDREATTA C., *La tettonica «a vortici» nei monti della Val di Sole*. «Atti Acc. Naz. Lincei», ser. 8^a, 5, 60-67 (1948), 1 carta geol.
- [4] BIANCHI A. e DAL PIAZ GB., *Il settore meridionale del massiccio dell'Adamello*. «Boll. Uff. Geol. It.», 62, 1-87 (1937), 7 ff., 5 tt.
- [5] BRUGNATELLI L., *Studio petrografico di due porfiriti dioritiche dei dintorni di Rabbi (Trentino)*. «Giorn. Min., Crist. e Petr.», 2, 215-219 (1891).
- [6] CORNELIUS H. P., *Zur Altersbestimmung der Adamello und Bergeller Intrusion*. «Sitz. Akad. Wiss. math.-nath. Kl.», Abt. I, 137, 541-562 (1928), 2 ff.
- [7] CORNELIUS H. P. u. FURLANI-CORNELIUS M., *Die Insubrischelinie vom Tessin bis zum Tonalepass*. «Denk. Akad. Wissensch., math.-nath. Kl.», 102, 207-301 (1930), 16 ff., 1 carta e 1 t.
- [8] DAL PIAZ GB., *Studi geologici sull'Alto Adige orientale e regioni limitrofe*. «Mem. Ist. Geol. Univ. Padova», 10, I-XII e 1-242 (1934), 13 tt., 37 ff., 1 carta geotettonica e 1 panorama.
- [9] DAL PIAZ GB., *Geologia della bassa valle d'Ultimo e del massiccio granitico di Monte Croce*. «Mem. Museo St. Nat. Venezia Tridentina», 5, 177-360 (1912), 6 tt., 9 ff., 1 carta geol. 1 : 50.000.
- [10] DAL PIAZ G., *Il confine alpino-dinarico dall'Adamello al massiccio di Monte Croce nell'Alto Adige*. «Atti Acc. Sc. Ven.-Trent.-Istr.», ser. 3^a, 17, 3-7 (1926).
- [11] MALARODA R., *Studi petrografici nell'Adamello nord-orientale*. «Mem. Ist. Geol. Univ. Padova», 16, 111 pp. (1948), 3 tt., 5 ff.
- [12] MALARODA R., *Studi geologici nella Val Vermiglio e zone limitrofe*. In BIANCHI A. e DAL PIAZ GB., *Centro di studio per la petrografia e la geologia. - Attività svolta durante l'anno 1947*. «La Ricerca Scientifica», 18, 542-543 (1948).
- [13] MINGUZZI C., *Ricerche petrografiche sopra alcuni lamprofiri, porfiriti e dioriti della Val d'Ultimo (Alto Adige)*. «Studi Trentini Sc. Nat.», 21, 46 pp. (1940), 1 schizzo geol. e 1 t.
- [14] SCHMIDEGG O., *Steilachsige Tektonik und Schlingebau auf der Südseite der Tiroler Zentralalpen*. «Jahrb. geol. Bundesan.», 86, 115-149 (1936), 3 tt., 10 ff.
- [15] SPITZ A., *Zur Altersbestimmung der Adamellointrusion*. «Mitt. Geol. Gesell.», 227-245 (1915), 2 ff.

(19) In un suo recente lavoro ([14], p. 134) SCHMIDEGG considera invece ancora l'intrusione della tonalite dell'Adamello antecedente interamente ai movimenti causanti deformazioni postcristalline. Tale affermazione troppo assoluta non tiene però nel dovuto conto alcuni fatti ormai universalmente accettati come i rapporti tra tonalite e dislocazione lungo la linea della Gallinera [6], il carattere epimetamorfico e da roccia sintettonica presentato spesso dalla tonalite ([8], p. 214 e p. 334; [9], p. 281; [11], p. 100), ed il fatto che le masse tonalitiche tradiscono di frequente, con la loro giacitura, una dipendenza da preesistenti linee di frattura o scorrimento ([8], p. 336; [9], p. 331; [10], pp. 6-7).

(20) Questa importante conclusione sui rapporti tra dislocazioni tardoalpine e intrusioni di magmi tonalitici è stata raggiunta, in base a diversi argomenti, per i vari massicci intrusivi dell'arco periadriatico, da G. DAL PIAZ ([10], p. 7), da H. P. CORNELIUS [6] e da GB. DAL PIAZ ([8], pp. 215-220 e [9], pp. 280-282).

Fisiologia. — *Condizioni catelettrotoniche realizzate nel ventricolo di «Emys orbicularis» mediante la distensione*^(*). Nota di XENIA MACHNE, presentata^(**) dal Corrisp. G. PUPILLI.

Rendo noti i risultati delle ricerche che ho eseguito per indagare il comportamento dell'eccitabilità del muscolo cardiaco sottoposto allo stiramento. Pochi e discordanti sono i dati sperimentali che concernono tale argomento. H. Fredericq⁽¹⁾, in ricerche eseguite sul cuore di tartaruga, ha riscontrato una diminuzione della cronassia in seguito ad aumento della pressione intracavitaria; le modificazioni della reobase non sono apparse costanti. Più recentemente Segers⁽²⁾ ha osservato che la distensione del miocardio, pure ottenuta coll'aumento della pressione intracavitaria, è accompagnata da una diminuzione della reobase.

Ho eseguito le ricerche sul ventricolo di *Emys orbicularis*, avendo cura di usare per le misure fasci di fibre muscolari aventi uno stesso orientamento. Il ventricolo di tartaruga presenta una camicia esterna di fibre parallele, la cui direzione è dal solco coronario verso la punta; le fibre più lunghe sono quelle dei margini. Il dispositivo usato per lo stiramento del tessuto permette di valutare un allungamento minimo di mm 0,05; le lunghezze imposte al miocardio venivano lette su scala. Tutto il dispositivo era tenuto in olio di vasellina, in cui si faceva gorgogliare ossigeno [cfr. Gavrilescu⁽³⁾]. La lunghezza iniziale del preparato corrispondeva a quella della fase diastolica; l'allungamento massimo ha raggiunto valori del 50 % della lunghezza iniziale. La cronassia veniva misurata mediante condensatori. Gli elettrodi erano in argento clorurato per elettrolisi; l'elettrodo a polo negativo era posto in contatto con la parte marginale del ventricolo, quello a polo positivo veniva applicato un po' più in alto e medialmente.

Si procedeva come segue. Il preparato veniva sottoposto ad allungamenti progressivi (in numero da 5 a 10) fino a quello massimo, procedendosi ogni volta alla misura. Le misure venivano praticate provocando la contrazione del miocardio durante la fase di riposo, dopo aver ottenuto un valore di reobase costante; la contrazione veniva osservata mediante una lente. Sono stati ottenuti i seguenti risultati.

L'allungamento passivo del miocardio fino al 30 % della sua lunghezza iniziale, ne eleva il valore di cronassia e ne abbassa il valore di reobase; per allungamenti dal 30 al 50 % la cronassia subisce un aumento appena apprezza-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) H. FREDERICQ, «Arch. int. Physiol.», 23, 174-179 (1924).

(2) M. SEGERS, «Acta biol. belg.», 1 26-30 (1940).

(3) Citato da F. BORRAZZI, «Ergebn. Physiol.», 24, 308-329 (1925).

bile, mentre la reobase si rieleva progressivamente, senza raggiungere tuttavia il valore iniziale.

Per preparati diversi, sottoposti alla distensione passiva, l'allungamento della cronassia e le modificazioni della reobase dipendono quantitativamente dai valori di cronassia e di reobase iniziali, di modo che si può stabilire una correlazione tra un muscolo ed un altro.

Per stiramenti fino a una lunghezza relativa pari a 1,25 la cronassia cresce proporzionalmente alla diminuzione della reobase, come dimostra il valore costante del prodotto $\text{reobase} \times \text{cronassia}$; per allungamenti superiori si osserva che il prodotto $\text{reobase} \times \text{cronassia}$ aumenta progressivamente. Questo dato, messo in relazione con quanto è più sopra esposto, permette di dedurre che per lunghezze relative assunte dal miocardio tra 1,25 e 1,30 la cronassia cresce più rapidamente di quanto diminuisce la reobase; per lunghezze relative superiori a 1,30 l'aumento di tale prodotto è dovuto, invece, al progressivo rielevarsi della reobase.

Il valore del prodotto $(\text{reobase})^2 \times \text{cronassia}$, a cui secondo H. e E. Lassalle⁽⁴⁾ è proporzionale l'energia necessaria alla stimolazione (energia che è costante e indipendente dalla durata degli stimoli, se questi sono brevi), diminuisce per stiramenti fino a una lunghezza relativa pari a 1,25; per allungamenti maggiori si rieleva progressivamente, fino a superare il suo valore iniziale. Qualora le condizioni fisiche (distanza degli elettrodi, umidità del preparato, temperatura) si mantengano costanti nel corso di un esperimento, le variazioni dell'energia così definita acquistano un significato: se l'energia aumenta si può dire che l'eccitabilità è diminuita e viceversa. L'eccitabilità del miocardio, quindi, è massima nel momento in cui comincia ad aumentare il prodotto $\text{reobase} \times \text{cronassia}$.

La variazione della cronassia è espressa da valori massimali per lunghezze relative assunte dal miocardio tra 1,19 e 1,30; l'aumento del valore di cronassia è praticamente nullo per allungamenti inferiori al 5 % e nella zona di lunghezze relative compresa tra 1,30 e 1,50.

Due fattori furono invocati alla spiegazione delle variazioni dei parametri dell'eccitabilità del muscolo scheletrico in funzione dell'allungamento passivo: la polarizzazione e la permeabilità [Pupilli⁽⁵⁾]. Vedremo ora se i medesimi fattori possono spiegarci pure le variazioni riscontrate nel muscolo cardiaco.

L'effetto della distensione delle pareti del cuore, a mezzo dell'aumento della pressione intracavitaria, sulla polarizzazione del miocardio è stata presa in esame da Segers⁽²⁾: l'effetto consiste in una diminuzione della polarizzazione; se la distensione è progressiva, si osserva che la polarizzazione diminuisce dapprima rapidamente e poi sempre più lentamente. La polarizzazione del miocardio presenta, dunque, un comportamento del tutto analogo a quello riscontrato nel muscolo scheletrico [Jacob⁽⁶⁾].

(4) H. LASSALLE et E. LASSALLE, « Ann. Physiol. Physicochim. biol. », 4, 323-341 (1928).

(5) G. PUPILLI, « Arch. Sci. biol. », 30, 282-301 (1944-45).

(6) J. JACOB, « Arch. int. Physiol. », 52, 417-438 (1942).

Secondo i dati di Segers⁽²⁾, alla diminuzione della polarizzazione del miocardio, dovuta alla distensione delle pareti del cuore, s'accompagna una diminuzione della reobase. Sono noti i rapporti che intercorrono tra la polarizzazione di un tessuto e i parametri dell'eccitabilità. Nelle fibre nervose l'azione dei centri eleva il potenziale di lesione e accorcia la cronassia [Monnier e Jasper⁽⁷⁾]. Analogamente è il comportamento del nervo staccato dall'animale: la cronassia si abbassa in funzione della temperatura, più rapidamente nella zona in cui è maggiore l'aumento del potenziale di lesione del nervo [Pupilli^(8,9)]. L'allungamento passivo del muscolo scheletrico ne riduce il potenziale di polarizzazione [Jacob⁽⁶⁾], mentre ne eleva la cronassia e ne abbassa la reobase [Pupilli⁽⁹⁾]. La cronassia del miocardio si accorcia nel rallentamento dell'attività cardiaca da stimolazione del N. vago [Fredericq⁽¹⁰⁾; Lapique e Veil⁽¹¹⁾; Field e Brücke⁽¹²⁾], mentre la polarizzazione del cuore cresce, come dà a vedere l'aumento della corrente di lesione [Gaskell⁽¹³⁾; Meek e Eyster⁽¹⁴⁾; Samojloff^(15, 16); Bayliss⁽¹⁷⁾; Monnier⁽¹⁸⁾]; la stimolazione dei nervi cardioaumentatori, invece, allunga la cronassia del miocardio [Fredericq⁽¹⁹⁾; Hauptfeld⁽²⁰⁾] e provoca un abbassamento della polarizzazione [Gaskell⁽¹³⁾; Monnier⁽¹⁸⁾]. Analogamente, le modificazioni del ritmo cardiaco dovute all'azione di sostanze simpaticomimetiche e parasimpaticomimetiche vanno unite a variazioni della polarizzazione e della cronassia in senso inverso [Fredericq⁽²¹⁾; Demoor e Rijlant⁽²²⁾; Monnier e Dubuisson⁽²³⁾].

D'altra parte, il catelettrotono, il quale è sostanzialmente una diminuzione artificiale della polarizzazione, s'accompagna per il miocardio ad una diminuzione della reobase [Segers⁽²⁴⁾]. Analogamente è stato da tempo osservato nel nervo: il catelettrotono ne abbassa la reobase e ne eleva la cronassia [Cardot e Laugier⁽²⁵⁾].

I numerosi dati ora esposti permettono di ritenere generale la relazione tra polarizzazione e cronassia, per cui la seconda varierebbe sempre in senso opposto alla prima. Poiché lo stiramento del miocardio determina una diminuzione

(7) A. M. MONNIER et H. H. JASPER, «C. r. Soc. Biol.», 110, 547-549 (1932).

(8) G. PUPILLI, «Boll. Soc. it. Biol. sper.», 10, 972-973 (1935).

(9) G. PUPILLI, «Arch. Fisiol.», 35, 499-512 (1935-36).

(10) H. FREDERICQ, «Arch. int. Physiol.», 27, 42-49 (1926).

(11) M. LAPICQUE et C. VEIL, «C. r. Soc. Biol.», 91, 1207-1209 (1924).

(12) H. FIELD u. E. TH. BRÜCKE, «Pflüger's Arch.», 213, 715-722 (1926).

(13) W. H. GASKELL, «J. Physiol.», 8, 404-415 (1887).

(14) W. J. MEEK u. J. A. E. EYSTER, «Amer. J. Physiol.», 30, 217-277 (1912).

(15) A. SAMOJLOFF, «Zbl. Physiol.», 27, 575-580 (1913).

(16) A. SAMOJLOFF, «Pflüger's Arch.», 199, 579-594 (1923).

(17) W. M. BAYLISS, *Principles of general Physiology*. New York, Longmans (1927).

(18) A. M. MONNIER, «Arch. int. Physiol.», 37, 337-409 (1933).

(19) H. FREDERICQ, «Arch. int. Physiol.», 24, 113-118 (1925).

(20) R. HAUPTFELD, «C. r. Soc. Biol.», 103, 769-770 (1930).

(21) H. FREDERICQ, «C. r. Soc. Biol.», 92, 739-742 (1925).

(22) J. DEMOOR et P. RIJLANT, «Arch. int. Physiol.», 32, 80-113 (1930).

(23) A. M. MONNIER et M. DUBUISSON, «Arch. int. Physiol.», 38, 180-206 (1934).

(24) M. SEGERS, «Acta biol. belg.», 2, 329-335 (1942).

(25) H. CARDOT et H. LAUGIER, «C. r. Soc. Biol.», 76, 249-252 (1914).

della sua polarizzazione e comporta, come risulta dai miei esperimenti, un aumento della cronassia, è lecito affermare che uno dei fattori che modificano i parametri dell'eccitabilità durante l'allungamento passivo del miocardio è la primitiva modificazione della polarizzazione.

Ma questa non basta di per se stessa a spiegarci il più complesso andamento del fenomeno. Deduzioni teoriche ci dimostrano che il cambiamento di polarizzazione non altera di per sé la forma della legge d'intensità liminare in funzione della durata, bensì le fa subire una semplice traslazione parallela all'asse delle ordinate [Monnier ⁽²⁶⁾]. Nel miocardio sottoposto allo stiramento si constata che, mentre per allungamenti fino al 25 % il prodotto reobase \times cronassia si mantiene costante, per allungamenti del 25-50 % esso subisce un progressivo aumento. Pure nel muscolo scheletrico sottoposto allo stiramento e nel nervo sottoposto al catelettrotono, il prodotto reobase \times cronassia non si mantiene costante col variare del livello di polarizzazione: nel muscolo scheletrico, per allungamenti dal 10 al 35 %, il prodotto diminuisce progressivamente [Pupilli ⁽²⁷⁾], nel catelettrotono del nervo tale prodotto dapprima diminuisce e quindi si rievola [Cardot e Laugier ⁽²⁵⁾]. L'andamento della curva del prodotto reobase \times cronassia, costruita coi dati sperimentali ottenuti sul nervo e sul muscolo scheletrico, è stato spiegato coll'intervento di un fattore ad azione antagonistica a quella della polarizzazione.

Molti dati sperimentali stanno a dimostrarci che questo fattore è rappresentato dalla permeabilità cellulare. Prendiamo innanzi tutto in considerazione la relazione che sussiste tra polarizzazione e permeabilità.

La permeabilità è in ragione inversa della polarizzazione, come si rileva dal fatto che costante e immediato è l'effetto di ogni variazione di quella su questa [Monnier ⁽²⁶⁾]. Anche nel corso della contrazione muscolare è stata osservata una doppia oscillazione dell'impedenza [Dubuisson ^(27, 28)], e ambedue le oscillazioni, che consistono in un aumento della permeabilità delle membrane, sono sincrone con cadute del potenziale di lesione. Nei fenomeni d'elettrotono, l'impedenza del muscolo scheletrico aumenta in prossimità dell'anodo e diminuisce al catodo [Dubuisson e Vandervael ⁽²⁹⁾]. Per quello che riguarda il cuore, durante la sistole Rapport e Ray ⁽³⁰⁾ hanno riscontrato una costante diminuzione dell'impedenza del miocardio, mentre Calabresi e Geiger ⁽³¹⁾ hanno constatato che diminuisce il suo potenziale di lesione. Poichè nel miocardio allungato la polarizzazione è diminuita di fronte alla norma e sperimentalmente si è dimostrato che la permeabilità è sempre in ragione inversa della polarizzazione, possiamo affermare che nel miocardio allungato la permeabilità è aumentata.

Per quanto concerne i rapporti che intercorrono tra permeabilità e parametri dell'eccitabilità, si è visto che i sali di K che aumentano la permeabilità e i sali

(26) A. M. MONNIER, *L'excitation électrique des tissus: Essai d'interprétation physique*. Paris, Hermann et Cie (1934).

(27) M. DUBUISSON, « Arch. int. Physiol. », 37, 35-57 (1933).

(28) M. DUBUISSON, « Arch. int. Physiol. », 38 85-108 (1934).

(29) M. DUBUISSON et F. VANDERVAEL, « Arch. int. Physiol. », 40, 173-180 (1934-35).

(30) D. RAPPORT a. G. B. RAY, « Amer. J. Physiol. », 80, 126-139 (1926).

(31) M. CALABRESI a. A. J. GEIGER, « Amer. J. Physiol. », 137, 440-446 (1942).

di Ca che la diminuiscono, modificano la cronassia in ragione inversa delle variazioni di permeabilità determinate [Lapicque e Nattan-Larrier⁽³²⁾; Pupilli⁽³³⁾; Kirsch e Fredericq⁽³⁴⁾]. D'altra parte, le modificazioni del miocardio vengono influenzate dal rapporto K^+/Ca^{++} dell'ambiente: l'aumento di concentrazione del K^+ limita gli effetti elettrotonici e può anche annullarli; l'aumento di concentrazione del Ca^{++} li aumenta [Segers⁽²⁴⁾]. I dati ora esposti ci dimostrano che l'aumento di permeabilità, che accompagna la diminuzione della polarizzazione del miocardio, esercita sui parametri dell'eccitabilità un'azione antagonistica a quella esercitata dalle modificazioni della polarizzazione.

Le variazioni dei parametri dell'eccitabilità del miocardio sottoposto allo stiramento sono, quindi, il risultato di due azioni opposte. La prevalenza dell'uno o dell'altro fattore, si rende manifesta nell'andamento della curva dei valori della cronassia in funzione dell'allungamento del miocardio. Il progressivo aumento della cronassia, dimostra che durante gli allungamenti fino al 30 % gli effetti della polarizzazione prevalgono nettamente su quelli della permeabilità; le modificazioni appena apprezzabili della cronassia per allungamenti dal 30 al 50 % ci indicano che in questa zona di allungamenti acquista importanza l'influsso della permeabilità.

Prenderò in esame, infine, l'analogia tra il comportamento del miocardio allungato e quello del nervo per effetto del catelettrotono; è noto che la permeabilità del nervo cresce nel catelettrotono mentre la sua polarizzazione si abbassa rapidamente. Per altro, tale effetto non è sempre lo stesso: per un catelettrotono di media intensità la cronassia del nervo è allungata e la reobase è diminuita, prevalendo l'azione riportabile alle modificazioni della polarizzazione; per un catelettrotono molto intenso l'influenza diretta dell'aumento della permeabilità sui parametri dell'eccitabilità è talvolta così rimarchevole da prevalere, e si riscontra allora un accorciamento della cronassia [Cardot e Laugier⁽²⁵⁾]. Nel miocardio, stiramenti fino al 30 % determinano un aumento della cronassia e una diminuzione della reobase; nella zona di allungamenti compresi tra 30 e 50 % la variazione della cronassia è praticamente nulla, mentre la reobase si rievolve progressivamente. L'analogia appare ancor più stretta in base all'andamento della curva del prodotto reobase \times cronassia: nel nervo, coll'aumento dell'intensità della corrente tale prodotto diminuisce fino a che aumenta la cronassia e successivamente, allorchè la cronassia si accorcia, si eleva; nel miocardio il prodotto si mantiene costante fino a che la cronassia cresce e aumenta progressivamente nella zona degli allungamenti in cui la variazione cronassica è praticamente nulla. Possiamo quindi ritenere che nel miocardio si realizzi, collo stiramento, quella condizione che nel nervo si verifica al catodo nel corso dell'elettrotono.

(32) M. LAPICQUE et M. NATTAN-LARRIER, « C. r. Soc. biol. », 94, 808-809 (1926).

(33) G. PUPILLI, « Arch. Farmacol. sper. Sci. aff. », 55, 35-43 (1933).

(34) R. KIRSCH et H. FREDERICQ, « C. r. Soc. Biol. », 103, 34-36 (1930).

Patologia vegetale. — *Rigenerazione di sferidi in stipiti decapitati di «Claviceps paspali», Stev. et Hall.* Nota di VINCENZO GRASSO, presentata (*) dal Socio G. NEGRI.

Durante lo studio delle *Claviceps* italiane ⁽¹⁾, notavo che recidendo lo sferidio maturo di uno sclerozio germogliato di *C. paspali*, raccolto su *Paspalum distichum*, dopo qualche giorno la porzione del peduncolo lesa si rivestiva di un micelio dapprima chiaro e molto lasso e in seguito ocraceo, più fitto e sviluppato a guisa di cercine (fig. 1-A-b).

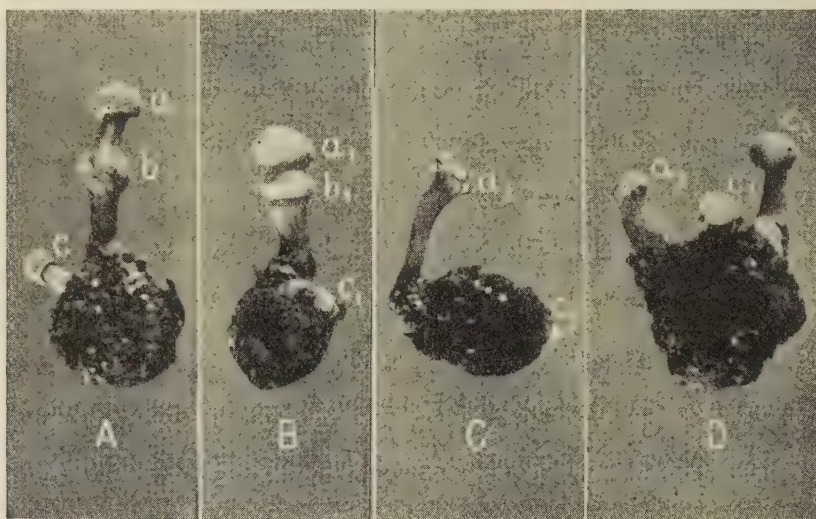


Fig. 1: A-B-C-D. — Sclerozi di *Claviceps paspali* germoglianti; c, c_1, c_2, c_3 sferidi normali; b, b_1 punti di rigenerazione; a, a_1, a_2, a_3 sferidi rigenerati ($\times 3$).

Poichè il fatto mi sembrava interessante, asportavo successivamente un secondo sferidio maturo di un altro sclerozio e notavo che il gambo reciso si comportava come il primo (fig. 1-B- b_1). Su di questo intanto la massa del micelio andava assumendo una forma sferica quasi con l'aspetto di uno sferidio: sebbene non chiaramente, vi si distinguevano numerosi puntini neri che corrispondevano agli abbozzi dei periteci.

Da questo stadio seguivo accuratamente lo sviluppo dei nuovi sferidi poichè a maturazione completa li avrei voluti confrontare con quelli recisi e vedere se ci fossero state delle differenze.

Dopo qualche settimana di attente osservazioni, quando i periteci mi sembravano maturi perchè molto sporgenti sulla massa ifenchimatoso, notavo che nello spazio di uno o pochissimi giorni, i nuovi sferidi si staccavano dalla parte

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

(1) V. GRASSO, *Studio sulle «Claviceps» italiane*. «Ric. Scient.», 19, 1064-1168 (1949).

cicatrizzata e si innalzavano con un breve peduncolo su di essa (fig. 1-A-a, B-a₁). In seguito non si notava alcunchè di particolare.

Contemporaneamente a queste osservazioni, allo scopo di vedere se il fenomeno si ripetesse anche in altri soggetti, tagliavo due altri sferidi di sclerozi diversi (fig. 1-C-D-). Il comportamento di questi soggetti era molto diverso; poichè essendo meno energica la reazione degli stipiti, il micelio si riformava molto lentamente e solo in parte. Ciononostante si differenziavano gli sferidi e nella loro massa si formavano numerosi periteci. A maturazione completa non si notava in essi come nei casi precedenti, il distacco degli sferidi dai punti recisi (fig. 1-C-a₂, D-a₃). Un'ulteriore recisione su un quinto sclerozio non dava alcuna rimarginazione per la marcescenza del peduncolo a causa di microrganismi animali.



Fig. 2. — Sezione longitudinale di sferidio normale (x 29).



Fig. 3. — Sezione longitudinale di sferidio rigenerato; a metà il punto reciso (x 29).



Fig. 4. — Sezione longitudinale di sferidio rigenerato; in basso il punto reciso (x 29).

Se si fa un confronto tra gli sferidi normali (fig. 1-A-c, D-c₃) e quelli rigenerati, si nota che essi non solo sono abbastanza simili tra loro per la forma e le dimensioni, ma anche per la grandezza e la disposizione dei periteci (figg. 2-3-4).

Nella rimarginazione parziale invece gli sferidi sono alquanto più piccoli di quelli normali; non sferici, ma schiacciati e spesso leggermente avvallati nella parte centrale. Anche i periteci sono in numero minore ma tutti hanno la forma e l'aspetto di quelli normali (fig. 5).

I punti di rigenerazione totale del peduncolo sono caratterizzati da un ingrossamento anulare formato da ife disordinatamente intrecciate e ammassate che si insinuano tra quelle delle porzioni normali a decorso pressochè parallelo (fig. 6). Si ha in definitiva un netto distacco tra le due porzioni del peduncolo.

Nella rigenerazione parziale invece non si ha alcuna interruzione delle ife, ma il peduncolo continua ad accrescersi nella generazione dello sferidio solo con una leggera deviazione laterale (fig. 5).

Per la interpretazione di questi fenomeni, ritengo che essi siano dei casi complessi di rigenerazione diversi dai casi teratologici noti per il genere *Claviceps*⁽²⁾ e molto più perfetti di quelli che si osservano in altri gruppi di funghi per la profonda analogia tra gli sferidi normali e quelli rigenerati, sia per l'alta percentuale dei peduncoli cicatrizzati (4 su 8).

Ma piuttosto essi sono da annoverare tra le rigenerazioni, normali nelle piante superiori e frequenti anche in alcuni funghi come è stato messo in evidenza da diversi autori. Tra essi Hennings⁽³⁾ cita rigenerazioni nel *Trametes odorata*, nella



Fig. 5. — Sezione longitudinale di peduncolo parzialmente rigenerato con sferidio ($\times 29$).



Fig. 6. — Particolare di peduncolo rigenerato in sezione longitudinale ($\times 29$).

Daedalea unicolor, nella *Coniophora cerebella*, nella *Xylaria arbuscola*, e in altri funghi, mentre Köhler⁽⁴⁾ le ricorda nel *Mucor stolonifer*, nel *Penicillium glaucum* nel *Coprinus ephemerus*, nell'*Agaricus campestris*, nella *Xylaria arbuscola* e nella *X. hypoxylon*; Weir⁽⁵⁾ cita dei casi per il gen. *Coprinus* e Freemann⁽⁶⁾ per la *Xylaria hypoxylon*. Ma di essi l'unico che ricorda rigenerazioni nel gen. *Claviceps* è Hennings (loc. cit.) che nota come tagliando il peduncolo di uno sclerozio germogliante di *Claviceps purpurea*, lateralmente si riformasse uno sferidio emisferico. Ma l'autore cita questo caso come un fatto anormale, forse perchè l'unico notato,

(2) G. DELACROIX, *Sur une forme monstrueuse de « Claviceps purpurea »*. « Bulletin Soc. Mycol. France », XIX, 128-145 (1903).

(3) P. HENNINGS, *Ueber Pilzabnormitäten*. « Hedwigia », Band XV, Heft 2, 136-140 (1901).

(4) P. KÖHLER, *Beiträge zur Kenntnis der Reproduktions- und Regenerationsvorgänge bei Pilzen und der Bedingungen des Absterbens myzelialer Zellen von « Aspergillus niger »*. Flora, 97 Bd., 216-262 (1907).

(5) J. R. WEIR, *Untersuchungen über die Gattung « Coprinus »*. Flora, 103 Bd., 263-320 (1911).

(6) D. L. FREEMAN, *Untersuchungen über die Stromabildung der « Xylaria hypoxylon » in künstlichen Kulturen*. « Ann. Myc. », 8, 192-211 (1919).

e senza altri particolari. Anche Köhler accenna ad una rigenerazione negli sclerozi (*sclerotium*) di *Claviceps purpurea*, ma si tratta di una semplice rimarginazione della parte ferita senza produzione di peduncoli o sferidi. Il mio caso quindi ritengo sia diverso da essi e che soprattutto studiato su materiale più abbondante, può portare a delle importanti conclusioni.

In un prossimo lavoro descriverò con maggiori particolari queste rigenerazioni ed altre, poichè durante la preparazione della presente Nota, esse sono state notate anche su peduncoli di sclerozi di *Festuca rubra* in numero abbastanza elevato, sebbene con aspetto diverso.

Biologia. — *Particolarità strutturali del nucleo nelle cellule nervose dei gangli cerebrali di «Helix vermiculata» Müller* (*). Nota di DILETTO QUATTRINI, presentata (**) dal Socio N. BECCARI.

Nel corso di alcune ricerche eseguite sui gangli cerebrali di *Helix vermiculata* Müller, allo scopo principale di mettere in evidenza l'aspetto morfologico della sostanza tigroide e la sua distribuzione nelle cellule nervose, ho rilevato a proposito dei nuclei qualche particolare che ritengo opportuno prendere brevemente in esame, anche in considerazione del notevole interesse assunto dalla conoscenza delle varie strutture nucleari.

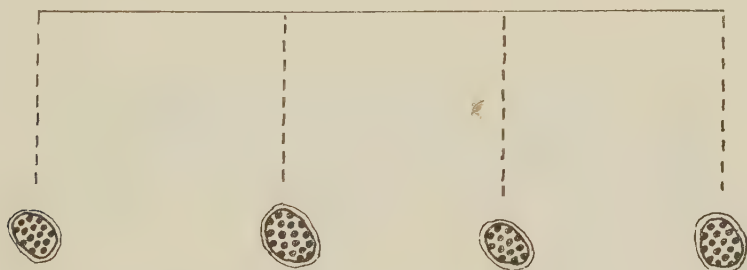


Fig. 1. — Rappresentazione semischematicca di quattro cellule nervose del protocerebro di *Helix vermiculata* Müller. Ingrandimento delle cellule circa 800 \times ; ingrandimento dei granuli circa 1300 \times .

Nelle cellule nervose del protocerebro, su materiale fissato in Sanfelice e colorato con la reazione di Feulgen, i nuclei (fig. 1) si mostrano letteralmente stipati di piccoli granuli, totalmente e uniformemente Feulgen-positivi. Detti granuli appaiono tutti presso a poco identici, sia in ogni singolo nucleo che in nuclei diversi. Essi hanno l'aspetto di sferule sensibilmente regolari con diametro di 5-6 decimi di micron. Non mostrano mai un netto allungamento secondo una qualsiasi direzione e non appaiono in alcun caso in forma filamentosa. Non vi si notano di regola reciproche anastomosi, né tracce di allineamenti dritti o

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

sinuosi. Internamente al nucleo sono fitti e distribuiti in maniera costantemente uniforme.

Da questa ultima constatazione è forse lecito dedurre che, almeno approssimativamente, costante è il numero di questi granuli in ogni singolo nucleo, stante il fatto che i nuclei delle cellule in oggetto hanno tutti presso a poco la stessa mole e forma identica.

Non si osservano in alcun caso formazioni con aspetto nucleolare. L'assenza completa di tali formazioni è evidente anche su materiale fissato in Carnoy, Stieve e Bouin e colorato con bleu di toluidina o con la miscela di Mallory.



Fig. 2. -- Rappresentazione semischematicca di quattro cellule nervose del mesocerebro e metacerebro di *Helix vermiculata* Müller. Ingrandimento delle cellule circa 630 \times ; ingrandimento dei granuli circa 1000 \times . Nella cellula più grande, internamente alla zona chiara corrispondente al nucleolo, si osservano due nucleoli di Schrön.

Neppure si osservano larghi e distinti cromocentri, a meno che non si voglia attribuire il significato di un piccolo cromocentro ad ogni singolo granulo presente nel nucleo. L'ipotesi di dare a ciascun granulo un tale significato non so quanto possa essere verosimile; non sarà comunque inopportuno osservare che essa non può trovare una giustificazione, sia pure parziale, nella già rilevata mancanza di formazioni nucleolari, perchè una struttura del tutto corrispondente a quella descritta, è presente, come dirò subito, anche in cellule fornite di un apparato nucleolare bene evidente. Si tratta delle cellule nervose del mesocerebro e metacerebro, ove il quadro nucleare messo in evidenza dalla reazione di Feulgen mostra essenzialmente gli stessi caratteri osservati nelle cellule del protocerebro. Qui però i nuclei hanno mole e forma anche molto notevolmente diversa (fig. 2) e, poichè i granuli endonucleari, sempre totalmente e omogeneamente Feulgen-positivi, conservano ovunque grandezza e forma sensibilmente costante, ne consegue che il loro numero è, con ogni verosimiglianza, in proporzione diretta con il volume del nucleo.

Inoltre è di regola presente un apparato nucleolare. Noto a proposito che, uniformandomi al punto di vista della Kunze ⁽¹⁾ e di altri Autori che si sono occupati di tale questione, indico come nucleoli quelle formazioni endonucleari, generalmente sferiche, ma talvolta anche variamente lobate, ovoidali o reniformi, che, pur presentando una struttura del tutto particolare, per alcuni aspetti sono indubbiamente simili ai nucleoli tipici di altri Invertebrati e dei Vertebrati.

Nei nuclei di minima mole il nucleolo è spesso unico. Il numero dei nucleoli aumenta però con l'aumentare delle dimensioni cellulari e, nelle cellule cosiddette giganti, esso probabilmente raggiunge ed oltrepassa talvolta il centinaio (nella sezione di una di queste cellule ne ho contati fino a 70).

I nucleoli sono sempre Feulgen-negativi. Molti di essi, specialmente i più piccoli, non sono praticamente rilevabili su materiale colorato con la reazione di Feulgen. Alcuni tra quelli di più grandi dimensioni appaiono talora circondati esternamente da una corona di granuli ricchi in nucleotidi ribodesosici e del tutto simili a quelli presenti ovunque nel territorio nucleare.

Non si osservano masse cromocentriche caratteristiche in stretta associazione con l'apparato nucleolare, né ubicate in qualsiasi altra regione del nucleo.

Internamente ai nucleoli di maggior mole si notano di frequente dei corpicciattoli in numero e dimensioni notevolmente variabili. Variabile è anche la loro forma, ma essi appaiono per lo più come dischi sottili forati nel centro (fig. 2). Con i metodi di colorazione da me adottati (reazione di Feulgen, bleu di toluidina e miscela di Mallory) assumono costantemente una tinta molto scura.

Si tratta di strutture simili a quelle osservate, tra gli altri, da Legendre (1908-09) e dalla Kunze (1921) in cellule nervose di diversi Gasteropodi e particolarmente di *Helix pomatia* L. Comunemente vengono indicate come nucleoli di Schrön. Non mi risulta ulteriormente confermato il punto di vista di Legendre ⁽²⁾, che considerò tali formazioni come probabili vacuoli situati internamente al nucleolo e riempiti di sostanze meno rifrangenti del balsamo del Canada. D'altra parte l'ipotesi della Kunze ⁽¹⁾ che si trattasse di inclusi nucleolari cristallini è noto che non ebbe conferma dalle osservazioni in luce polarizzata. A giudicare da alcuni aspetti di queste strutture e, in particolare, dal loro comportamento in relazione ai coloranti, sembrerebbe lecito supporre che esse abbiano natura di pigmenti.

A parte quanto si riferisce specificamente ai nucleoli di Schrön, il quadro rivelato dalla reazione di Feulgen nei nuclei delle cellule nervose dei gangli cerebrali di *Helix vermiculata* è, sotto alcuni aspetti, simile a quello descritto da vari Autori in nuclei classificati, da Barigozzi ⁽³⁾ (1949), di III tipo o a cromosomi contratti (picnotici) e presenti in determinate categorie di cellule (non nervose) di numerosi insetti e dell'*Artemia salina*. La somiglianza è però soltanto parziale ed è riferibile, in particolar modo, al punto di vista della carica di

(1) H. KUNZE, «Zeit. wiss. Zool.», 118 (1921).

(2) LEGENDRE, «Arch. Anat. Microsc.», 10 (1908-1909).

(3) C. BARIGOZZI, «Pubb. Staz. Zool. Napoli», 21 Suppl. (1949).

acido timonucleinico. Le differenze più sensibili mi sembra che interessino la forma dei singoli granuli Feulgen-positivi e il loro addensamento nel territorio nucleare.

L'ipotesi poi che detti granuli corrispondano ad altrettanti cromosomi, non è forse da escludere *a priori*, sia pure considerando che il loro numero varia notevolmente con il variare della mole nucleare. Si potrebbe trattare di cromosomi che si sono moltiplicati con un numero più o meno notevole di endomitosi ed hanno poi subita una contrazione uniforme, forse la massima possibile. L'argomento evidentemente richiede, in tal senso, un esame molto più approfondito.

Si potrebbe anche attribuire ai singoli granuli sparsi nel nucleo il significato di cromomeri. In tal caso però rimarrebbe da giustificare il fatto, già precedentemente rilevato, che detti ipotetici cromomeri non manifestano alcuna traccia di un qualsiasi allineamento. È notevole poi che si tratti qui di cellule nervose, elementi tipicamente perenni, al cui nucleo la descrizione classica attribuisce, come è ben noto, un aspetto acromatico. In questo ordine di idee deve esser tenuto presente che una particolare abbondanza di cromatina è stata osservata da diversi Autori anche in cellule nervose di altri Molluschi Gasteropodi. Così, ad esempio, dalla Kunze (1921)⁽¹⁾ in *Helix pomatia* L. Per questo peculiare carattere è noto che Hanström⁽⁴⁾ ha chiamato « cromatiniche » le piccole cellule presenti nel protocerebro di tali Invertebrati.

Osservazioni in tal senso sono state recentemente fatte anche nei Vertebrati. È noto infatti che Ott-Candela e Manca di Villahermosa (1946)⁽⁵⁾, nei nuclei delle cellule gangliari di Axolotl, hanno messo in evidenza la presenza di filamenti e zolle cariche di acido timonucleinico, queste ultime addossate al nucleolo. Un quadro nucleare simile è stato anche veduto da Barigozzi (1947) nelle cellule nervose di *Triturus (Triton) cristatus* Laur.

In ambedue questi casi è evidente però che la struttura del nucleo differisce molto notevolmente da quella qui brevemente descritta.

Noterò infine che una struttura nucleare molto simile a quella propria delle cellule nervose è bene evidente, in *Helix vermiculata*, anche nei nuclei di numerosissime piccole cellule sparse un po' dovunque nei gangli cerebrali e spesso strettamente addossate alla superficie citoplasmatica esterna delle più grandi cellule nervose. Si tratta verosimilmente di cellule in parte di glia e in parte di connettivo. Esse illustrano un altro dei numerosi casi, già osservati, in cui tessuti di natura diversa mostrano talvolta la stessa struttura nucleare.

(4) HANSTRÖM, *Die vergleichende Anatomie des Nervensystems der Wirbellosen*. J. Springer-Berlin, 1928.

(5) OTT-CANDELA e MANCA DI VILLAHERMOSA, « Boll. Soc. ital. Biol. Sper. », 21, 1946.

Biologia. — *Osservazioni preliminari sugli acidi nucleici e sulla natura della « massa di Giardina » nell'oocite di « Dytiscus marginalis »*^(*).
Nota di ENRICO URBANI, presentata^(**) dal Socio G. COTRONEI.

Giardina in un lavoro ormai classico (1901)⁽¹⁾ ha descritto negli oogoni di *Dytiscus* che si preparano a diventare oociti una serie di quattro cinesi differenziali a seguito delle quali da un solo oogonio si originano un oocite e quindici cellule nutrici. La caratteristica di queste mitosi differenziali è data dalla identificazione di una massa cromatica, indipendente dai cromosomi della piastra equatoriale, che passa solamente nella cellula che diverrà oocite. Questo accumulo di cromatina o — *massa di Giardina* — rimane perciò solamente nella cellula germinale, dove allo stadio di giovanissimo oocite è ancora identificabile per breve tempo, perchè con l'accrescimento della cellula perde la sua fisionomia morfologica.

Debaisieux (1909)⁽²⁾ conferma le osservazioni di Giardina e ritiene che la formazione in questione si disgreghi nella vescicola germinativa partecipando alla costituzione del reticolo nucleare.

Recentemente Cotronei (1949)⁽³⁾ in un profilo di Filippo Silvestri ha tratteggiato la grande opera di questo Studioso e si è particolarmente soffermato sulla questione dei determinanti germinali o del *sex primordium* mettendo, tra l'altro, in rapporto queste formazioni citoplasmatiche con altre formazioni, i nuclei vitellini, lo studio dei quali è stato da me⁽⁴⁾ ultimamente ripreso in questo Istituto nei riguardi della localizzazione dell'acido ribonucleico in relazione alla morfologia e alla funzione di queste formazioni. Cotronei oltre agli *oosomi* studiati da Silvestri e agli altri determinanti germinali prende in particolare considerazione anche la *massa di Giardina* che, benchè nucleare, potrebbe essere considerata fino ad un certo punto nello stesso senso dei determinanti germinali perchè rimane segregata in una sola cellula privilegiata: l'oocite.

Già Vardè (1930)⁽⁵⁾ ha dimostrato la positività della reazione di Feulgen in questa formazione, ricerche confermate da osservazioni rimaste inedite di Del Pianto eseguite nel nostro Istituto. Tenuto conto dell'importanza dell'acido ribonucleico nella fisiologia cellulare Cotronei si è chiesto (loc. cit.) se nella *massa di Giardina* sia reperibile l'acido ribonucleico e quali siano i rapporti tra questo e l'acido timonucleico da una parte e la massa di Giardina e il metabolismo dell'oocite dall'altra.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » della Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

(1) A. GIARDINA, « Intern. Monatsch. f. Anat. und. Physiol. », 18 (1901).

(2) P. DEBAISIEUX, « La Cellula », 25, 207 (1909).

(3) G. COTRONEI, « Riv. di Biologia », 51, 387 (1949).

(4) E. URBANI, « Riv. di Biologia », 51, 331 (1949).

(5) V. P. VARDÈ, « Arvernia Biologica », 3, 1 (1930). « Année Biolog. », 1931, p. 640.

Allo scopo di portare un contributo al problema ho iniziato osservazioni sugli oogoni ed oociti di *Dytiscus* studiando la topografia dell'acido timonucleico e ribonucleico in questo materiale con le tecniche usate nei miei precedenti lavori.

Con queste osservazioni a carattere preliminare, che si collegano con le ricerche già da me compiute sulla localizzazione e ruolo degli acidi nucleici negli oociti in crescita di talune specie animali, mi propongo di iniziare, su basi comparative, una nuova serie di ricerche per analizzare la reale natura morfo-

logica e citochimica dei vari determinanti germinali noti in letteratura, compresi quelli citoplasmatici studiati da Silvestri.

Nell'ovaio di *Dytiscus* si susseguono, secondo Giardina, tre zone, una di moltiplicazione dove gli oogoni presentano qualche cariocinesi, una seconda zona di differenziazione nella quale gli oogoni di ultima generazione a seguito delle quattro mitosi già ricordate danno ciascuno un oocite e quindici cellule nutritrici, ed infine una terza zona, topograficamente la più estesa, che è quella di accrescimento. La reazione di Feulgen eseguita su sezioni longitudinali di ovaio mostra in modo chiarissimo l'atteggiamento dei nuclei delle varie cellule nelle tre zone. La massa di Giardina è positiva nei preoociti della zona di differenziazione dove sono reperibili molte cellule con il nucleo in *sinapsi differenziale* nel senso inteso da Giardina (1902)⁽⁶⁾. La massa di Giardina ha forma diversa ed in qualche caso ho sorpreso delle mitosi differenziali nelle quali è bene evidente la separazione tra questa formazione ed i cromosomi all'inizio della anafase.

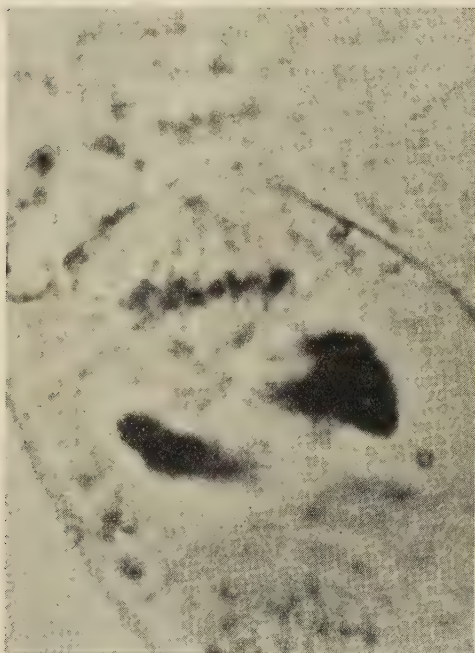


Fig. 1. — Preoocite di *Dytiscus marginalis* in cariocinesi differenziale. Reazione di Feulgen. Si notino i cromosomi all'inizio della anafase (metafase — anafase) e la massa di Giardina (nella sezione appare in due pezzi) che a un polo della cellula non partecipa alla cariocinesi. Obb. 1/15 imm. Ocul. 4.

La colorazione con verde di metile-pironina accoppiata all'impiego della ribonucleasi cristallizzata secondo J. Brachet mostra la massa di Giardina di colore violaceo unitamente al reticolo o ai granuli nucleari mentre il citoplasma si colora in rosso vivo senza evidenti granulazioni. Dopo l'azione della ribonucleasi massa di Giardina e strutture nucleari si colorano in verde mentre scompare ogni colorazione rossa del citoplasma. Negli oociti dove sono terminate le divisioni differenziali questa formazione si accolla alla membrana nucleare ed assume un aspetto sempre più vacuolizzato o filamentoso e reticolare e si disgrega: a questo stadio la reazione di Feulgen diviene negativa nel nucleo del-

(6) A. GIARDINA, «Anat. Anz.», 21, 293 (1902).

l'oocita che invece si colora con la pironina mentre rimane positiva nei nuclei delle cellule nutrici.

Ho sorpreso a volte degli oociti nei quali la *massa di Giardina* sta scomparendo (almeno come entità morfologica) una basofilia citoplasmatica più intensa in corrispondenza del settore nucleare dove si trova questa formazione.

Debaisieux ritiene che la *massa di Giardina* vada a costituire il reticolo nucleare: dalle mie osservazioni risulta come questa formazione perda completamente la sua fisionomia morfologica ed il suo acido timonucleico. Che questo si trasformi nell'acido ribonucleico della vescicola germinativa è attendibile poichè sono conosciute le relazioni riscontrate in qualche caso tra un acido e l'altro (Caspersson e Schultz)⁽⁷⁾. Tali considerazioni necessitano però di basi obbiettivamente dimostrate.

CONCLUDENDO: da queste mie prime osservazioni risulta che nella *massa di Giardina* si trovano sia acido timonucleico che ribonucleico. Quando la massa nel giovane oocita comincia a scomparire si accentua la carica di acido ribonucleico citoplasmatico e ciò mi lascia pensare che avvenga una trasformazione di un acido nell'altro e la diffusione attraverso la membrana nucleare. Con l'accrescimento dello oocita scompare dal nucleo ogni traccia di acido timonucleico rivelabile con la reazione di Feulgen e rimane solamente un reticolo basofilo la cui basofilia scompare a seguito di trattamento con ribonucleasi.

Ulteriori osservazioni permetteranno di portare un contributo positivo agli interessanti quesiti prospettati sia nei riguardi del problema dei determinanti germinali sia nei riguardi della trasformazione degli acidi nucleici della *massa di Giardina* nell'acido ribonucleico citoplasmatico e della vescicola germinativa; argomento questo della trasformazione di un acido nell'altro molto contrastato.

(7) T. CASPERSSON e J. SCHULTZ, «Nature», 143, 602, 609 (1939).

NOTA AGGIUNTA IL 13 FEBBRAIO 1950. — Nella raccolta del materiale bibliografico per il lavoro in esteso sono venute a conoscenza di una Nota di J. PASTEELS («Exsperientia», 4, 150, 1948). Questo A. ha condotto uno studio sugli acidi nucleici nella gametogenesi e nello sviluppo embrionale dell'*Ascaris*. Egli pensa l'eterocromatina della vescicola germinativa possa trasformarsi in nucleoli ribonucleoprotidici. Nell'embrione le cellule della linea germinale si distinguono da quelle della linea somatica per una maggiore carica di acidi nucleici. Si vede come questi fatti siano in accordo con la impostazione del presente lavoro. A conclusione della Nota Pasteels prospetta l'utilità di uno studio degli «ectosomi» del *Cyclops*, materiale, questo, che appunto rientra nel quadro delle mie ricerche comparative. Un maggiore, necessario, commento alle ricerche di Pasteels sarà fatto nel mio prossimo lavoro.

Biologia. — *Processi di clasmatosi in cellule coltivate «in vitro»*^(*).
Nota I di ABRAM FAJER, presentata^(**) dal Socio G. LEVI.

Ranvier ha designato come clasmatosi il distacco di frammenti di citoplasma in quelle cellule del connettivo lasso, alle quali egli diede il nome di clasmatociti; cellule che oggi si fanno rientrare nella grande categoria degli elementi di tipo istiocitario. A tale distacco di particelle citoplasmatiche Renaut attribuì il valore di un processo secretorio (cellule ragiocrine). Osservazioni successive eseguite con una tecnica più adeguata di quelle di Ranvier, non hanno confermato che nei clasmatociti si produca realmente un distacco di particelle; le osservazioni sui clasmatociti viventi coltivati *in vitro* riescono negative; ciononostante il nome è rimasto nella letteratura. Eliminazione di particelle citoplasmatiche fu osservata in altre cellule ed in particolar modo nelle ghiandole sudoripare apocrine e nella ghiandola mammaria; in tal caso il fenomeno è legato al processo secretorio; è noto infatti che nella ghiandola mammaria, ad esempio, viene eliminata una porzione relativamente cospicua di citoplasma, ripiena di goccioline lipidiche.

Durante ricerche compiute in collaborazione con G. Levi⁽¹⁾ sulla localizzazione della fosfatasi alcalina in cellule coltivate *in vitro* di miocardio e di fegato di embrione di pollo dal 5° al 7° giorno d'incubazione ed anche di muscoli scheletrici di embrioni dal 10° al 12° giorno, rimasi colpito dalla circostanza che in zone ben circoscritte delle cellule ed in particolar modo nelle parti distali, il metodo di Gomori per la fosfatasi alcalina permetteva di riconoscere un aspetto particolare della distribuzione della fosfatasi. Quest'aspetto si riscontra in un gran numero di cellule, dimodochè in un campo microscopico a medio ingrandimento, si possono sorprendere varie cellule nelle quali il processo si svolge (fig. 1).

Come sarà esposto in altra Nota, nelle cellule che furono studiate dal punto di vista della reazione della fosfatasi alcalina, le regioni del citoplasma nelle quali il fermento è localizzato, sono contrassegnate da una colorazione diffusa bruna più o meno intensa senza che sia visibile neppure coi più forti ingrandimenti un precipitato granulare, come avviene invece per la fosfatasi acida⁽²⁾. Invece nelle regioni della cellula che hanno attirata la mia attenzione, appaiono in gran numero granuli isolati oppure costituiti da piccoli ammassi risultanti da granuli congludinati. La struttura di queste particolari zone differisce sostanzialmente da quella del rimanente del citoplasma; anzi tutto si nota in essi la scomparsa completa dei condrioconti, i quali sono facilmente riconoscibili anche col metodo Gomori in tutto il rimanente del citoplasma; ed il ialoplasma (detto comunemente sostanza fondamentale) anzichè avere struttura omogenea appare costituito da un trabecolato a filamenti irregolari e poco distinti. In preparati di controllo fissati in formalina

(*) Ricerche eseguite nella Fondazione «Andrea e Virginia Matarazzo» in San Paolo (Brasile).

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

(1) G. LEVI ed A. FEJER. Questi «Rendiconti», p. 98.

(2) A. FEJER. «Rendic. Acc. Lincei», vol. VII, fasc. 6, pp. 354-58 (1949).

oppure nella miscela osmiobicromica di Bensley e colorati coll'ematossilina ferrica, sebbene i granuli di fosfatasi non fossero apprezzabili, sono riusciti, sulla guida delle osservazioni sopra riferite sui preparati col metodo Gomori, a rintracciare queste zone citoplasmatiche di particolare struttura; infatti in queste zone i condrioconti tanto evidenti e tanto intensamente colorati nel citoplasma integro (specialmente nei preparati fissati in liquidi contenenti acido osmico) erano completamente scomparsi ed il citoplasma aveva una struttura analoga a quella riscontrata nei preparati col metodo Gomori.

Però il fenomeno più appariscente in questi lembi citoplasmatici, che, come diremo tra breve, sono votati alla regressione, è la presenza di granuli di fosfatasi e questo ci spiega che questo processo sia sfuggito prima d'oggi a tutti i ricercatori che hanno studiato le colture coi comuni metodi di colorazione.



Fig. 1. - Da una coltura di miocardio di embrione di pollo al 6° giorno, trattava col metodo per la fosfatasi alcalina. Numerosi lembi citoplasmatici in regressione nei quali si distinguono depositati granuli di fosfatasi (Ingr. 400×).

Un esame accurato dei preparati col metodo Gomori mi ha convinto che l'accumulo della fosfatasi alcalina in ammassi granulari è preceduto da una distribuzione diffusa della fosfatasi, non molto diversa da quella che si osserva nelle porzioni integre di citoplasma, colla differenza però che già a questa fase precoce dell'alterazione i condrioconti scompaiono.

A seconda della forma della cellula e del grado di espansione in superficie, i caratteri dei lembi di citoplasma votati alla distruzione, sono diversi. In genere il fenomeno è più vistoso nelle cellule maggiormente espanse in superficie, le quali risiedono alla periferia della coltura: i lembi citoplasmatici votati alla distruzione si trovano ad una certa distanza dal pericario, il più sovente all'estremo distale; però non sono rare le propaggini che si dipartono dai margini della cellula, le quali appaiono collegate alla cellula da uno stretto peduncolo (figg. 1, 2).

Qual'è il destino di questi lembi citoplasmatici nei quali si producono i mutamenti descritti? Il ialoplasma si dilegua senza lasciare traccia, mentre persistono i granuli di fosfatasi; dimodochè nella fase terminale del processo, è facile

di riconoscere negli interstizi tra le cellule, la sede che era in precedenza occupata da quei lembi citoplasmatici, dalla presenza di granuli che danno la reazione della fosfatasi.

DISCUSSIONE. Viene per la prima volta dimostrata la regressione, seguita dalla completa distruzione di lembi citoplasmatici, talora abbastanza estesi, in cellule coltivate *in vitro* e più particolarmente in quelle maggiormente espanse in superficie. Il fenomeno è segnato dalla scomparsa dei condrioconti, dai mutamenti che intervengono nel ialoplasma e soprattutto dal conglomerarsi in granuli dell'enzima fosfatase, il quale è diffuso nelle parti integre. Tra l'enzima ed i lipoprotidi del ialoplasma deve esistere un legame del quale ignoriamo la natura. È probabile che quando l'equilibrio tra le macromolecole citoplasmatiche è rotto, l'enzima si

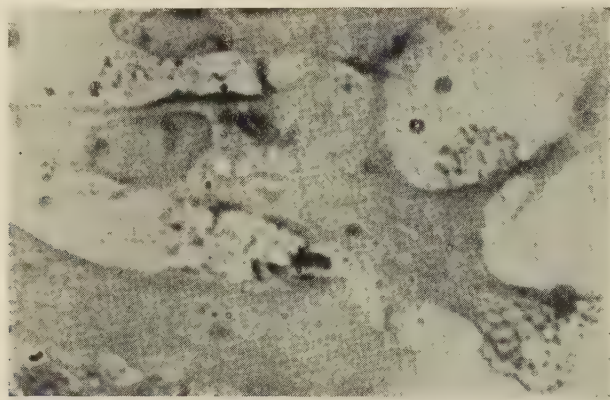


Fig. 2. - Cellule di una coltura analoga alla precedente. Lembi citoplasmatici in regressione inoltrata con evidenti granuli a reazione fosfatase. Le cellule sono molto espanse in superficie (Ingr. 900×).

liberi ed all'esame microscopico appaia in forma di granuli microscopicamente visibili.

In quanto poi alle condizioni che determinano la distruzione parziale del citoplasma di questi elementi, essi sono difficilmente rintracciabili. Si tratta di un processo insolito nell'economia, prescindendo dai processi di clasmatosi inerenti alla secrezione, i quali sono evidentemente di tutt'altra natura.

Data la sproporzione tra aumento della massa citoplasmatica e nucleare, che sembra verificarsi nelle cellule coltivate *in vitro*, si potrebbe avanzare l'ipotesi, invero alquanto semplicista, che si tratti di un processo di autoregolazione; ipotesi che è almeno in parte suffragata dalla circostanza che questo fenomeno fu osservato nelle cellule molto voluminose ed in particolar modo in quelle maggiormente espanse in superficie. Che il metabolismo del nucleo abbia importanza essenziale su quello del citoplasma è sempre stato ammesso; Caspersson e collaboratori dimostrarono in molti tipi di cellule scambi di acido ribonucleinico tra questi due componenti della cellula. È evidente che quando la massa citoplasmatica cresce in misura maggiore della nucleare, gli scambi nucleo-plasmatici sono

ostacolati (tensione nucleo-plasmatica secondo R. Hertwig). Che nelle cellule coltivate *in vitro* si abbia una sproporzione tra accrescimento plasmatico e nucleare fu supposto, ma mai dimostrato con esattezza. Il prof. Levi mi ha privatamente comunicato i risultati principali da lui ottenuti da misurazioni eseguite col planimetro sopra un gran numero di cellule di colture *in vitro* (3). Sembra che per lo meno in tutti gli elementi eccessivamente espansi in superficie si abbia sempre un certo aumento di massa e non soltanto di superficie, ma limitato. Ma in molte colture specialmente in quelle di miocardio allo stadio da me studiato, sembra si abbia un aumento considerevole di massa, segnato dall'aumento complessivo della massa dei mitocondri. Ed in questi casi sembra esistere una sensibile sproporzione tra aumento della massa protoplasmatica e nucleare. Ciò ci renderebbe ragione come nelle porzioni di citoplasma situate a maggior distanza dal nucleo il metabolismo sia ostacolato e dei lembi citoplasmatici regrediscano, come noi abbiamo effettivamente osservato.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente presenta alla Classe il fascicolo dei Rendiconti del mese di dicembre e annuncia che, con ogni probabilità, per il prossimo marzo, sarà ultimata la stampa dei fascicoli dei mesi di gennaio e febbraio.

Il Presidente informa quindi la Classe che è necessario nominare le Commissioni giudicatrici dei Premi Ministeriali per l'anno 1950 e prega i Colleghi di voler decidere circa l'opportunità di procedere a dette nomine in apposita seduta segreta o di dare mandato alla Presidenza di provvedere direttamente.

La Classe, ad unanimità, dà mandato in tal senso alla Presidenza.

Il Presidente, ricorda che alle ore 18,30 saranno proiettati, nella stessa sala delle sedute della Classe, i due seguenti films, presentati rispettivamente dai Soci Abetti e Krall: « Di alcune applicazioni della cinematografia all'astrologia » e « Il nuovo ponte sul Nilo Azzurro ».

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta due plichi suggellati, l'uno dei quali inviato dall'ing. Beniamino Midulla e l'altro dal col. Cesare Colangeli. La Classe, constatata l'integrità dei suggelli, delibera che i plichi stessi siano conservati nell'archivio accademico a disposizione degli interessati.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Beccari, Abetti, Carnera, Negri, Boaga, Carobbi, Cotronei, Picone, Semerano, Giorgi, Bompiani e Benedicenti.

(3) Ricerche inedite di G. LEVI.

L'Accademico Segretario legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

BOAGA G., Livellazione astronomica lungo il parallelo 45° fra Torino e Pola.

BOMPIANI E., Topologia differenziale. - IV: Teoremi topologici e proiettivi sulle calotte superficiali.

GIORGI G., Un enunciato generale sulla dinamica dei sistemi.

ACCORDI B., Appunti geologici sul versante sinistrò della media Val Camonica, dalla Val Palobbia alla Valle di Fa (pres. dal Corrisp. G. B. DAL PIAZ).

BURNIAT P., Surfaces canoniques quadruples (pres. dal Corrisp. B. SEGRE).

COLACEVICH A. e VIVIANI L., Misure fotometriche di luce zodiacale (pres. dal Socio G. ABETTI).

COSSU A., Su una notevole classe di varietà a connessione affine (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

GARAVALDI O., A proposito di alcune recenti obiezioni contro la relatività einsteiniana (pres. dal Socio G. GIORGI).

GARELLO A., Piante e tossine (pres. dal Socio A. BENEDICENTI).

GOLDSCHMIED P. e LUCENA F., La riduzione del nitroso derivato del sale R al catodo a gocce di mercurio (pres. dal Corrisp. G. SEMERANO).

KRYZANSKI M., Sur la solution élémentaire de l'équation de la chaleur (pres. dal Socio M. PICONE).

LUCENA F. e GAGLIARDO E., Misura polarografica dell'attività interfaseale degli esacloro-cicloesani isomeri (pres. dal Corrisp. G. SEMERANO).

NICOLINI T., Indizi di corrispondenze tra fenomeni geofisici e moto polare (pres. dal Socio L. CARNERA).

TOSCANO L., Relazione integrale di trasformazione dei polinomi ultrasferici in quelli di Laguerre (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Semerano dà lettura, anche a nome del Collega Bonino, della relazione con la quale si propone la pubblicazione della Memoria di L. Riccoboni, P. Lanza e P. Favero, dal titolo: «Comportamento polarografico dell'ossido di azoto». Messa ai voti, la relazione è approvata con le solite riserve di carattere finanziario.

L'Accademico Segretario, a nome dei Soci Rovereto e Gortani, legge la relazione con la quale si propone la pubblicazione della Memoria di S. Conti dal titolo: «Un nuovo grande massiccio gneissico granitico nelle Alpi liguri», Messa ai voti, anche questa relazione, come la precedente, è approvata con le solite riserve di carattere finanziario.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio e il Presidente mette in particolare rilievo il volume dal titolo: « Calcolo numerico », del Socio Boaga. Porge anche un ringraziamento al Socio Miolati che ha donato alla Biblioteca accademica due Memorie di Kr. Birkeland, dategli personalmente dall'Autore nel 1906 a Christiania, rispettivamente dal titolo: « *Recherches sur les taches du soleil et leur origine* » e « *Expédition Norvégienne de 1899-1900 pour l'étude des aurores boréales - Résultats des recherches magnétiques* ».

PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE
PRESSO L'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ELENCHI DEI CONCORRENTI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO NAZIONALE GENERALE

(Scadenza 31 dicembre 1949 - Premio lire 1.000.000)

1. GIOVANNI CUTUGNO. — « Fenomeni della vibrazione » (5 cop. ms.).
2. GIOVANNI PELLETTIERI. — « Il sistema luminoso » (6 cop. st.).
3. MARCELLO CRETI. — 1. « Amplitele » (5 cop. st.). — 2. « Combinatore di numero per apparecchio telefonico » (5 cop. st.). — 3. « Analizzatore prova valvole - prova circuiti » (5 cop. st.). — 4. « Luxmetro » (5 cop. st.). — 5. « Pedalauto » (5 cop. st.). — 6. « Telefono automatico mobile » (5 cop.). — 7. « Ondogeno » (5 cop. st.). — 8. « Irrazionalità dell'azzurramento » (5 cop. st.). — 9. « Radio-amplitele » (5 cop. st.). — 10. « Trasmettitore da combattimento » (5 cop. st.). — 11. « Riflettore a magnesio » (5 cop. st.). — 12. « Segnalatore acustico » (5 cop. st.). — 13. « Sistema di radio-telegrafia-segreta » (5 cop. st.). — 14. « Motore senza statore » (5 cop. st.). — 15. « Geo-comando per campi minati » (5 cop. st.). — 16. « Telecomando multiplo selettivo » (5 cop. st.). — 17. « Ripetitrice a motore » (5 cop. st.). — 18. « Generatore di alta frequenza » (5 cop. st.). — 19. « Multifono » (5 cop. st.).
4. GIUSEPPE PICORELLI. — « Nuovi strumenti e costruzioni per la risoluzione dei problemi ritenuti generalmente insolubili ».
5. Dott. PRIMO CANDIOLI. — 1. « Le coltivazioni da seme nel Veronese: Il Frumento » (4 cop. st.). — 2. « La moria del ciliegio » (3 cop. st.). — 3. « Contributo alla conoscenza delle cause della mortalità del ciliegio » (1 cop. st.). — 4. « Risultati ottenuti in tre anni di lotta contro la "Cydia molesta" Busck nel veronese » (1 cop. st.). — 5. « I salariati agricoli - Condizioni economiche, occupazione ed aspetti sociali » (1 cop. st.). — 6. « Contributo alla conoscenza delle cause della mortalità del ciliegio - II nota » (1 cop. st.). — 7. « Ricerche sperimentali di lotta contro il "Coryneum Beyerinckii" sul pesco » (1 cop. st.). — 8. « Per incrementare la produzione industriale delle prugne secche in Italia » (1 cop. st.). — 9. « Aspetti sociali ed economici dell'industria in comune di Arcole » (3 cop. st.). — 10. « Per l'incremento della pericoltura collinare nel Veronese » (1 cop. st.). — 11. « Ulteriori ricerche sulla "Cydia molesta" e orientamenti della lotta dedotti dai risultati della sperimentazione » (1 cop. st.). — 12. « Aspetti e problemi della olivicoltura veronese » (1 cop. st.). — 13. « Il problema delle pere invernali » (1 cop. st.).

6. AVV. ROMOLO GAMBINI. — Descrizioni di fenomeni radio-elettro-bio-magnetici-metapsichici-terapeutici relativi alle facoltà dell'autore e conferenze e articoli vari.

7. LEONARDO FREDA. — 1. « Ideologia sulla fecondazione del sesso ». — 2. « Ideologia chimica sul bacillo della tubercolosi ».

8. VITANTONIO DE BELLO. — Breve descrizione di invenzione.

9. MARIA TERESA BLENGINI. — Annunzio di scoperte.

10. LUIGI GHIO NICOLA. — « Vertenze di meccanica » (5 cop. ms.).

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO NAZIONALE DI CATEGORIA (CHIMICA)

(Scadenza 31 dicembre 1949 - Premio lire 1.000.000)

1. Prof. FABIO FERRARI. — 1. « In tema di supercementi » (5 cop. st.). — 2. « Über gipshaltige puzzolanamente » (1 cop.). — 3. « Brownmillerit-Zement » (5 cop.). — 4. « Cementi pozzolanici » (5 cop.). — 5. « Supercementi d'uso generale » (5 cop.). — 6. « Universal-Portlandzemente » (5 cop.). — 7. « Dei cementi Ferrari » (3 cop.). — 8. « Cementi Ferrari » (4 cop.). — 9. « Ciments ferreux et ferreux pouzzolananiques vis-à-vis des eaux agressives » (5 cop.). — 10. « Il cemento Ferrari e l'attuale orientamento delle industrie dei leganti idraulici » (5 cop.). — 11. « Il cemento Ferrari di ridotta basicità e l'autarchia » (5 cop.). — 12. « Über Ferrari-Zement » (2 cop.). — 13. « Le Ciment Ferrari » (2 cop.). — 14. « Zur Kenntnis des Ferrari-Zements » (4 cop.). — 15. « Sulle ragioni dell'alta resistenza chimica dei cementi Ferrari » (5 cop.). — 16. « Sulla determinazione rapida della silice del cemento idraulico o dei silicati decomponibili dagli acidi » (5 cop.). — 17. « Sul tufo del Monferrato » (4 cop.). — 18. « Per il progresso delle industrie del cemento » (1 cop.). — 19. « Nel divenire del cemento idraulico » (5 cop.). — 20. « Sulla costituzione dei leganti idraulici in rapporto al ritiro e al calore d'idratazione » (3 cop.). — 21. « Dei leganti idraulici per la ricostruzione » (5 cop.). — 22. « Agglomerati per la ricostruzione » (1 cop.). — 23. « Note au sujet des essais préalable cuisson dans l'industrie du ciment » (1 cop.). — 24. « Leganti pozzolanici » (5 cop.). — 25. « Agglomerati pozzolanici e cementizi » (4 cop.). — 26. « Per l'impiego razionale dei cementi idraulici » (5 cop.). — 27. « Sul problema della casa in Italia » (5 cop.). — 28. « Sui cementi misuratamente espansivi » (5 cop.). — 29. « Analisi rapida dei leganti idraulici unitari » (5 cop.). — 30. « Cementi ipocalcici » (5 cop.). — 31. « Leganti idraulici di razionale impiego per la costruzione di opere idrovie e marittime » (5 cop.).

2. Prof. GIOVANNI SEMERANO. — 1. « Costante di azione, capacità ed energia di attivazione nella saponificazione degli eteri degli acidi o-ftalico, 3-nitro e 4-nitro-o-ftalico ». — 2. « La riduzione della desossibenzoina e della benzoina al catodo a goccia di mercurio ed i problemi ad essa relativi ». — 3. « Intensità della corrente di diffusione in relazione alla grandezza e al periodo di rinnovamento della superficie catodica ». — 4. « La stabilità di alcune soluzioni di sensibilizzatori per l'infrarosso ». — 5. « Contributo alle conoscenze sull'ipersensibilizzazione infrarossa ». — 6. « Il meccanismo della sensibilizzazione e dell'ipersensibilizzazione fotografica per il rosso e l'infrarosso ». — 7. « L'equilibrio tra l'alcool etilico, l'acqua e l'etere etilico in fase gassosa ». — 8. « L'equilibrio tra l'alcool propilico n., l'acqua e l'etere propilico n. in fase gassosa ». — 9. « L'equilibrio tra l'alcool butilico n. p., l'acqua e l'etere butilico n. p. allo stato di vapore ». — 10. « Il trattamento termodinamico degli equilibri chimici in sistemi composti da gas reali e la sua applicazione all'equilibrio dell'ammoniaca ». — 11. « Ricerche polarografiche nell'industria degli zuccheri ». — 12. « L'analisi polarografica nello studio del fenomeno di tautomeria ceto-enolica ». — 13. « L'energia di riduzione elettrolitica di alcune sostanze con i gruppi atomici $C=O$ e $C=C$ ». — 14. « Considerazioni termodinamiche relative all'equilibrio di eterificazione di alcuni alcoli ». — 15. « Il potenziale elettrochimico di riduzione degli acidi maleico e fumarico ». — 16. « The Formation of Ethers by the Interaction of Primary Alcohols and Olefines at High Pressure ». — 17. « Contributi alla conoscenza dei composti organici ». — 18. « La microanalisi quan-

titativa delle miscele degli acidi fumarico e maleico ». — 19. « Il meccanismo della riduzione dell'aldeide acetica al catodo a goccia di mercurio ». — 20. « A diacetyl kimutatása és mennyiségi meghatározása polarográffal ». — 21. « La ricerca e il dosamento dell'acido fumarico in presenza degli acidi maleico, itaconico, citraconico, cis- e trans-acitonico ». — 22. « L'analisi polarografica delle miscele degli acidi cis- e trans-acitonico ». — 23. « L'analisi polarografica delle leghe ultraleggere a base di magnesio ». — 24. « Studi sull'acido cis-acitonico ». — 25. « L'acetile libero. » — 26. « Labile organische Moleküle und Grenzflächenvorgänge ». — 27. « Il capannone per le alte pressioni dell'Istituto di Chimica Fisica ». — 28. « Die Reduktion der Aconitsäure an der Quecksilbertropfkathode ». — 29. « Argento-alchili e loro impiego come sorgenti di radicali alchilici liberi a basse temperature ». — 30. « Legame d'idrogeno e potenziale di ossido-riduzione ». — 31. « L'etilazione catalitica ad alta pressione del vapore di fenolo ». — 32. « Il meccanismo della trasformazione termica dell'acido trans-acitonico in acido itaconico e anidride carbonica ». — 33. « La depolimerizzazione termica dell'acido trans-acitonico ». — 34. « La decomposizione fotochimica delle soluzioni acquose di acido malonico ». — 35. « L'analisi polarografica delle leghe ultraleggere a base di magnesio ». — 36. « Die polarographische Bestimmung von Kupfer; Cadmium, Nickel, Zink, Eisen und Bleispuren im reinsten Aluminium ». 37. « Beitrag zur Kenntnis der metallorganischen Verbindungen. I. Mitteil: Silber-methyl, Silber-äthyl und Silber-n-propyl ». — 38. « Darstellung und Reaktionen des freien Methyls bei tiefen Temperaturen ». — 39. « Das chemische Verhalten des freien Äthyl-Radikals bei tiefen Temperaturen ». — 40. Beitrag zur Kenntnis des freien n-Propyl-Radikals ». — 41. « Proprietà ossido-riduttive delle aldeidi e condensazione benzoica ». — 42. « La riduzione del diacetile al catodo a goccia di mercurio ». — 43. « L'Istituto di Chimica Fisica ». Triennio 1938-1941. — 44. « Metodo rapido di analisi polarografica dell'alluminio ». — 45. « Die polarographische Analyse reiner Metalle ». — 46. « Polarografia e polarometria differenziali ». — 47. « Determinazione polarografica rapida di rame, piombo e zinco nei minerali di ferro ». — 48. « L'Analisi Polarografica dello Zinco Metallico ». — 49. « Centro di Studio per la Polarografia. Attività svolta dal gennaio 1947 al giugno 1948 ». — 50. « Bibliografia Polarografica (1922-43) ». — 51. « Studi polarografici applicati alla metallurgia dell'alluminio. Nota III. Determinazione del sodio nei fanghi rossi ». — 52. « Studi di cinetica chimica sui processi di autossidazione in fase liquida diluita. Nota I. Considerazioni introduttive e descrizione del metodo ». — 53. « Bibliografia Polarografica (1922-49) ». — 54. « Risoluzione della coppia polarografica cadmio-indio ». — 55. « Quantitative Determination of iron, lead and zinc in zinc ores. A rapid polarographic method ». — 56. « Trattato di polarografia ». (Tutti i lavori sono stati inviati in 5 copie a stampa).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE SCIENZE FISICHE

(Scadenza 31 dicembre 1949 - Premio lire 10.000).

1. Prof.ssa MARGHERITA HACK. — 1. « Ricerche su FF Aquilae ». — 2. « Ricerche su T Vulpeculae ». — 3. « Ricerche spettrofotometriche su SZ Tauri ». — 4. « Risultati ottenuti con un nuovo tipo di Spettrografo per usi astronomici ». — 5. « Studio del potere risolutivo con Centriche di colore diverso » (Inedito).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE SCIENZE NATURALI

(Scadenza 31 dicembre 1949 - Premio lire 10.000).

1. Prof. VINCENZO GRASSO. — 1. « Una nuova specie di carbone del grano in simbiosi con le carie "Tilletia sp." sul frumento ». — 2. « Il rinvenimento di una nuova specie di Ustilago dell'orzo in Italia ("Ustilago nigra Tapke") ». — 3. « Le specie di Tilletia del frumento esistenti in Italia e loro distribuzione geografica ». — 4. « Una nuova specie di "Claviceps" in Italia ».

2. Prof. TEODORO PERRI. — 1. « Azione dei raggi Röntgen sugli embrioni di anfibii. Trapianto dell'abbozzo oculare tra embrioni irradiati e normali ». — 2. « Azione dei raggi Röntgen su embrioni e larve di anfibii. Nota II ». — 3. « Azione della corrente elettrica continua su embrioni di anfibii in esperienze di parabiosi ». — 4. « Sull'ibridazione tra "Bufo viridis" e "Bufo vulgaris". Esperienze di trapianto tra ibridi e normali. Nota I ». — 5. « Malformazioni cefaliche in embrioni di Anfibii, con particolare riguardo ad esperienze di röntgen-irradiazione ». — 6. « La determinazione di arti soprannumerari in "Bufo Vulgaris" in rapporto allo stimolo ». — 7. « Ricerche sperimentali sulla determinazione di arti soprannumerari in "Bufo vulgaris" ». — 8. « Azione dei raggi Röntgen su embrioni e larve di anfibii. — III. Trapianto di complessi di abbozzi da embrioni irradiati su normali ». — 9. « La determinazione di arti soprannumerari in "Bufo vulgaris". Nota II ». — 10. « La determinazione di arti soprannumerari in "Bufo vulgaris". Nota III ». — 11. « Sull'ibridazione tra "Bufo viridis" e "Bufo vulgaris". Nota II ». — 12. « La determinazione di arti soprannumerari in "Bufo vulgaris" (importanza del "campo" e natura dello stimolo). Nota IV » (ms.). — 13. « L'azione biologica dei raggi X su embrioni di Anfibii - Esperienze di trapianto » (ms.). — 14. « La determinazione di arti soprannumerari in "Bufo vulgaris". Nota V - Campi morfogenetici e leggi del Bateson » (ms.).

(Fuori concorso): 1. « Trapianto dell'occhio tra embrioni e larve irradiati con raggi X e larve normali ». — 2. « Trapianto dell'occhio tra larve normali e larve röntgen-irradiate. Esperienze su "Bufo vulgaris" e "Bufo viridis" ». — 3. « Due nuovi casi di pigomelia spontanea negli uccelli » (Inedito).

3. Prof. GUIDO TAVANI. — 1. « Osservazioni geologiche sull'alto Appennino modenese ». — 2. « Lamellibranchi cretacei della Somalia ». — 3. « Fossili eoenici della Cirenaica ». — 4. « Osservazioni sul genere Kuphus Guettard ». — 5. « Fauna malacologica cretacea della Somalia e dell'Ogaden. Parte I. Lamellibranchiata ». — 6. « Fauna malacologica cretacea della Somalia e dell'Ogaden. Parte II. Gastropoda - Cephalopoda - Conclusioni ». — 7. « Ruoste ed altri molluschi cretacei della Migiurtinia (Africa Orientale) ».

4. Prof. ENRICO VANNINI. — 1. « Sull'origine interrenale dei "Cordoni della rete" e dei "corpi grassi" durante lo sviluppo delle gonadi e sulla partecipazione dell'interrenale ai processi di intersessualità giovanile nella "Rana agilis". — 2. Differenziamento sessuale, comportamento degli elementi germinativi e comparsa di cellule a sessualità intermedia in una razza indifferenziata di "Rana agilis" ». — 3. « Le varie fasi dello sviluppo delle gonadi negli Anfibii, in rapporto con il loro determinismo fisiologico e sperimentale ». — 4. « Partecipazione dell'abbozzo interrenale all'edificazione della gonade nell'embrione di pollo ». — 5. « Sull'origine interrenale del tessuto midollare della gonade nell'embrione di pollo ». — 6. « Sviluppo di gonadi prive di tessuto midollare in girini di rana trattati con ormone cortico-surrenale sintetico ». — 7. « Ripartizione dei gonociti primari e origine dell'asimmetria delle gonadi nell'embrione di pollo ». — 8. « Esperimenti sullo sviluppo normale della gonade in assenza del blastema mesonefrico nei girini di "Rana agilis" ». — 9. « Intersessualità transitoria e ovogenesi abbreviata nei vertebrati inferiori ». — 10. « Origine interrenale e azione induttrice del tessuto midollare nella gonade dei vertebrati ». — 11. « Azioni del desossicortosterone e del progesterone sul differenziamento delle gonadi nei girini di rana ». — 12. « Origine interrenale del tessuto midollare della gonade e sviluppo dell'organo di Bidder nel Bufo bufo (L.) e nel Bufo viridis Laur. ». — 13. « Sviluppo e differenziamento delle gonadi nei girini di Bombina pachypus ». — 14. « Ricerche sul differenziamento sessuale nei vertebrati ». — 15. « Effetti dell'acetato di desossicortosterone sullo sviluppo delle gonadi nell'embrione di pollo ». — 16. « Neoblasti e rigenerazione dei segmenti genitali nel serpulide ermafrodita Salmacina incrustans Clap. ». — 17. « Sull'azione medullo inibitrice del desossicortosterone nelle gonadi dei girini di rana ». — 18. « Confronto fra le azioni mascolinizzanti del progesterone e del testosterone sulle gonadi di girini di "Rana agilis" ». — 19. « L'importanza del pH nella colorazione con verde di metile-pironina, usata da Brachet per la localizzazione istochimica dell'acido ribonucleinico ». — 20. « La determinazione e il differenziamento del sesso nei Vertebrati ». — 21. « Azioni femminizzanti e mascolinizzanti del desossicortosterone sulle gonadi di girini di "Rana dalmatina" ». — 22. « Ormoni ste-

roidi e differenziamento sessuale». — 23. «A proposito dell'origine interrenale del tessuto midollare della gonade negli Anfibi e negli Uccelli». — 24. «Ormoni steroidi e determinazione sessuale». — 25. «Sui rapporti fra il blastema della corteccia surrenale e il tessuto midollare della gonade nell'embrione di cavia».

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO PER LA GENETICA

«GIOVANNA JUCCI»

PER LA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(Scadenza 31 dicembre 1949 - Premio lire 50.000).

1. Dott. GUIDO FRIZZI. — I. «Salivary Gland Chromosomes of Anopheles» (3 cop.). — 2. «Genetica di popolazioni in "Anopheles maculipennis" e prime ricerche sperimentali» (3 cop.). — 3. «Determinazione del sesso nel genere Anopheles». — 4. «Cromosomi salivari in Anopheles maculipennis» (3 cop.). — 5. «L'eteropicnosi come indice di riconoscimento dei sessi in Bombyx mori L.» (3 cop.). — 6. «Genetica di popolazioni in Anopheles maculipennis - Studi preliminari sui riordinamenti cromosomici del gruppo» (3 cop.). — 7. «I cromosomi delle ghiandole salivari di drosophila subobscura Collin». — 8. «Studio sulla sterilità negli ibridi del genere anopheles». — 9. «Annali della "Revue Suisse de Zoologie"» (3 cop.). — 10. «Eteropicnose et diagnose du Sexe clex le ver a soie».

2. Prof.ssa CARMELA MANUNTA. — I. «Sul metabolismo dell'azoto nelle varie razze di bachi da seta. - 1° L'acido allantoinico nella razza bivoltina giapponese Aooijku». — 2. «Sul metabolismo dell'azoto nelle varie razze di bachi da seta. - II. Acido allantoinico ed acido urico durante la maturazione nel sangue di varie razze ed incroci». — 3. «Comportamento differenziale nel metabolismo dei pigmenti di varie razze ed incroci Bianchi recessivi, Bianchi dominanti e gialli di Bombyx mori». — 4. «Nuovo contributo allo studio del Bianco dominante nei bachi da seta». — 5. «Contenuto in lipidi negli organi viscerali di tre specie di Oloturie delle Coste di Rovigno d'Istria: H. forskali, H. tubulosa, H. polii». — 6. «Ricerche sui pigmenti del pomodoro in varie razze ed incroci». — 7. «Pigmenti carotenoidi delle cariossidi in varie razze di Orzo, Segale e Avena». — 8. «Sul metabolismo dell'azoto in Bombyx mori. IV. Ricerca degli enzimi allantoicasi ed allantoinasi nei bachi da seta durante lo sviluppo larvale». — 9. «Astaxanthin in Insects and other terrestrial Arthropods». — 10. «I pigmenti carotenoidi nella Dorifora delle patate (Leptinotarsa decemlineata Say)». — 11. «Ueber ein Vorkommen von Purinen und eines Pterins in einer Ascidienart (Microcosmus polim.)» (1 cop. st.). — 12. «Nuove ricerche di Fisiogenetica». (tutto in 3 copie dts.).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del'II febbraio 1950

- AITA Antonio. — *Materie plastiche artificiali*. Chimica, tipi, proprietà, applicazioni. 3^a ed. Milano, Bertieri, 1949. Pp. 172, in-8°.
- BOAGA Giovanni. — *Calcolo numerico*. Milano, Fasani, 1949. Pp. 472, in-8°.
- DI RAIMONDO Giovanni. — *La ricostruzione delle Ferrovie statali alla fine del 1949*. Estr. da «Ingegneria Ferroviaria», 1949, n. 1.
- ELLISON M. A. — *Characteristic properties of chromospheric flares*. Estr. da «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society», vol. CIX, 1949, n. 1.
- Le Ferrovie italiane dello Stato*. A cura dell'Ufficio Stampa del Ministero dei Trasporti. Pp. 52, in-8° obl., con figg.
- GRANDI Guido. — *Orazione in memoria di Filippo Silvestri*. Suppl. agli «Annali della Sperimentazione Agraria», n. s., vol. III, 1949, n. 5.
- Jubilee Publication in the Commemoration of Professor H. Yabe, M. I. A. Sixtieth Birthday*. 1941. Pp. 58, in-8°.
- LEHNHOFER Karl. — *Ueber Missbildung bei Sapphirina - Arten*. Estr. da «Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw.-Klasse», vol. CXXXIX, 1930, nn. 8-10.
- Memorial Lectures given in the Honour of the Commemoration of prof. H. Yabe, M. I. A. Sixtieth Birthday*. 1939-41. Voll. 2, in-8°.
- OMER, Guy C. — *A Nonhomogeneous Cosmological Model*. Estr. da «The Astrophysical Journal», vol. CIX, 1949, n. 1.
- PAVLÓV I. P. — *Polnoe Sobranie Trudov*. t. IV. Moskva-Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1947. Pp. 351, con tavv.
- STEUER Adolf. — *Die «Arten» der Cladocercengattung Penilia Dana*. Estr. da «Mitteilungen aus dem Zoolog. Museum in Berlin», vol. XIX.
- *Copepoden der Valdivia-Expedition*. Estr. da «Zoologische Anzeiger», vol. XXXI, 1907, n. 26.
- STEUER Adolf. — *Die Entwicklung der zoologischen Stationen*. Estr. da «Die Naturwissenschaften», a. XIV, 1926, n. 4.
- *The Fishery Grounds near Alexandria*. Estr. da «Notes and Memoirs of the Fisheries Research Directorate» e da «Notes and Memoirs of the Fouad I Institute of Hydrobiology and Fisheries», Cairo, 1935, 1936, 1938-1939, nn. 8, 20, 26, 30.
- *Größen und Formvariation der Planktoncopepoden*. Estr. da «Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse», Vol. CXL, 1931, nn. 1-2.
- *Heinrich Micoletzky. Nachruf*. Estr. da «Verhandlungen der Internationalen Vereinigung für theoretische und angewandte Limnologie», vol. V, pp. 706-707.
- *Horizontale und vertikale Verteilung der Copepoden nach den Ergebnissen der deutschen Tiefsee-Expedition*. Estr. da «Internationale Revue der gesamten Hydrographie», 1915.
- *Krebse als Fischnahrung*. Estr. da «Natur und Haus».
- *Phaoplanktonische Copepoden aus der südlichen Adria*. Estr. da «Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien», a. 1912.
- *Plankton-Copepoden aus dem Hafen von Brindisi*. Estr. da «Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse», vol. CXIX, 1910.
- *Revision der Gattung Acartia Dana*. Estr. da «Zoologische Anzeiger», vol. XLV, 1915, n. 9.
- *Ricerche idrobiologiche alle foci del Nilo*. Estr. da: «Memorie dell'Istituto Italiano di Idrobiologia dott. Marco De Marchi», vol. I.
- *Ueber die Artberechtigung von Harpacticus nicaensis Claus*. Estr. da «Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse», vol. CXLVI, 1937, nn. 5-6.

- STEUER Adolf. — *Ueber das sog. Leuchtorgan des Tiefsee-Copepoden Cephalophanes G. O. Sars*. Estr. da «Arbeiten aus d. Zoolog. Institut d. Universität Innsbruck», vol. III, n. 1.
- *Ueber eine neue Ectinosoma-Art (Copepoda Harpacticoida) aus dem Mittelmeer*. Estr. da «Zoologische Anzeiger», vol. CXXXII, 1940, nn. 5-6.
- *Ueber eine neue Paracineta aus dem Südatlantik*. Estr. da «Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse», Vol. V, 1928, nn. 5-6.
- *Variabilität und Verbreitung von Moina dubia Guerne u. Richard*. Estr. da «Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse», vol. CXLVIII, 1939, nn. 7-10.
- STEUER Adolf. — *Veränderungen der Küstenfauna und Flora bei Wasserschmutzung der Seehäfen*. Estr. da «Die Naturwissenschaften», 1913.
- *Ziele und Wege biologischer Mittelmeeerforschung*. Estr. da «Die Naturwissenschaften», 1913.
- *Zur planmässigen Erforschung der geographischen Verbreitung des Haliplanktons, besonders der Copepoden*. Estr. da «Zoogeographica», 1933.
- STOCKHOLMS HÖGSKOLAS VITAMININSTITUT (prof. Hans v. Euler). — *Kemiska Arbeten*. Band XII, 1949. Stockholm, 1949.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 marzo 1950

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Geometria. — *Topologia differenziale.* — IV. *Teoremi topologici e proiettivi sulle calotte superficiali.* Nota (*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

1. SCOPO DELLA NOTA. — Nella Nota precedente ho avuto occasione di esaminare alcuni fatti topologici relativi a due calotte superficiali del 2° ordine, σ_2^2 , fra loro tangenti.

In questa Nota considero calotte superficiali d'ordine s , σ_2^s , aventi in comune la calotta d'ordine $s-1$. Dopo aver stabilito un teorema generale di carattere topologico mi occupo della configurazione di due calotte del 2° ordine, in uno spazio proiettivo, aventi due direzioni d'incidenza: l'unico caso noto di questa configurazione era quello banale di due calotte tangenti in S_3 .

2. GIACITURA PRINCIPALE INDIVIDUATA DA DUE CALOTTE. — Si consideri in X_n un punto O , cui attribuiamo le coordinate $x^i = 0$, come centro di una calotta la cui giacitura possiamo sempre individuare con $x^1 = \dots = x^n = 0$. Conviene pertanto dividere le coordinate in due gruppi $x^1 = u$, $x^2 = v$ e x^i con $i = 1, \dots, n-2$.

Una calotta assegnata σ_2^s potrà sempre definirsi ponendo

$$(2.1) \quad x^i = 0$$

con la convenzione che al secondo membro potrà sostituirsi una qualsiasi espressione d'ordine $\leq s+1$ in u, v ; espressione che indicheremo con $[s+1]_{u,v}$.

Per una seconda calotta $\bar{\sigma}_2^s$ che abbia in comune con la prima la calotta σ_2^{s-1} possono assumersi le equazioni

$$(2.2) \quad x^i = \varphi_s^i(u, v) + [s+1]_{u,v}$$

ove le $\varphi_s^i(u, v)$ sono forme d'ordine s in u, v .

(*) Presentata nella seduta dell'11 febbraio 1950.

Cerchiamo ora se un elemento E_s di curva, che possiamo rappresentare con

$$(2.3) \quad v = \lambda u + \lambda_2 u^2 + \dots + \lambda_s u^s + \dots, \quad z^i = 0 \quad (1),$$

appartenente alla calotta σ_2^s possa appartenere anche a $\bar{\sigma}_2^s$. Dovrà aversi

$$(2.4) \quad \varphi_s^i(1, \lambda) = 0.$$

Affinchè queste $n - 2$ condizioni determinino le stesse s tangenti (distinte o coincidenti in tutto o in parte) dovrà potersi porre

$$(2.5) \quad \varphi_s^i(u, v) = \rho^i \varphi_s(u, v)$$

le ρ^i essendo numeri non tutti nulli indipendenti da u, v , e φ_s forma di ordine s in u, v non identicamente nulla.

Ne segue che sostituendo alle z^i loro combinazioni lineari omogenee (il che non altera le (2.1)) si possono sostituire alle (2.2) le nuove equazioni (nelle nuove coordinate ζ, z^i)

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \zeta &= \varphi_s(u, v) + [s + 1]_{u, v} \\ z^i &= [s + 1]_{u, v} \quad i = 1, \dots, n - 3, \end{aligned}$$

(le equazioni della prima calotta si scrivono ora $\zeta = z^i = 0$).

Poichè $\lambda_2, \dots, \lambda_s$ non sono affatto vincolate dalle (2.4) per ognuna delle s direzioni $\varphi_s(1, \lambda) = 0$ non v'è un solo E_s comune a σ_2^s e a $\bar{\sigma}_2^s$, ma un sistema ∞^{s-1} o *pennello* di dimensione $s - 1$ di E_s comuni alle due calotte.

D'altra parte le $z^i = 0$ ($i = 1, \dots, n - 3$) definiscono una V_3 , e per essa una *giacitura principale* a cui debbono essere tangenti tutte le V_3 contenenti le due calotte.

Una qualsiasi V_3 contenente le due calotte ha necessariamente equazioni del tipo

$$(2.7) \quad \begin{aligned} z^i &= \zeta \{ \varphi_1^i + \dots + \varphi_{s-1}^i \} + \\ &+ \zeta^2 \{ \psi_0^i + \psi_1^i + \dots + \psi_{s-2}^i \} + \dots + \zeta^{s-1} c^i + [s + 1]_{\zeta, u, v} \end{aligned}$$

ove le $\varphi_1^i, \dots, \psi_0^i, \dots, c^i$ sono *forme* arbitrarie in u, v il cui grado è indicato dall'indice in basso (in particolare ψ_0^i, c^i sono costanti) e $[s + 1]_{\zeta, u, v}$ indica termini arbitrari d'ordine $\geq s + 1$ in ζ, u, v .

Per ogni $1 \leq s' \leq s$ esistono perciò calotte $\sigma_3^{s'}$ dipendenti (come facilmente si calcola dal computo dei coefficienti) da

$$(2.8) \quad \left\{ \frac{s'(s' + 1)(s' + 2)}{6} - 1 \right\} (n - 3)$$

parametri che vi figurano linearmente, e perciò esiste un sistema lineare di calotte $\sigma_3^{s'}$ della dimensione ora scritta (in particolare si ha una sola *giacitura principale*).

Ciascuna di queste calotte $\sigma_3^{s'}$ potrà dirsi *principale* rispetto alle due calotte date. Si noterà anzi che nelle (2.7) non figura affatto la $\varphi_s(u, v)$ che determina

(1) Gli apici posti ad u (o v) indicano potenze.

la seconda calotta: sicchè la nozione di *calotte principali* σ_3^s ora introdotta è relativa soltanto ad una calotta σ_2^s e ad una giacitura 3-dimensionale per la sua giacitura tangente. Tutte le σ_2^s , dipendenti da $s(s+1)/2 - 1$ parametri, che hanno con la data σ_2^s la stessa calotta σ_2^{s-1} e la stessa giacitura principale determinano lo stesso sistema di calotte tridimensionali principali d'ordine $\leq s$.

In conclusione:

Due calotte superficiali d'ordine s , σ_2^s e $\bar{\sigma}_2^s$ in X_n aventi in comune una calotta σ_2^{s-1} possono avere al più s elementi curvilinei d'ordine s , E_s , in comune (linearmente indipendenti). Se questo avviene esse hanno in comune s pennelli di E_s di dimensione $s-1$. L'esistenza di questi elementi comuni è condizione necessaria e sufficiente affinché le due calotte appartengano a V_3 per cui il centro O delle calotte sia un punto regolare. Tutte queste V_3 hanno la stessa giacitura da dirsi principale per le due calotte. Viceversa una calotta σ_2^s ed una 3-giacitura ad essa tangente determinano un sistema lineare di dimensione $s(s+1)/2 - 1$ di calotte $\bar{\sigma}_2^s$ contenute con la σ_2^s in V_3 aventi quella 3-giacitura.

Una calotta σ_2^s e una 3-giacitura ad essa tangente determinano un sistema di calotte tridimensionali σ_3^s di dimensione

$$\left\{ \frac{s(s+1)(s+2)}{6} - 1 \right\} (n-3)$$

da dirsi calotte 3-dimensionali principali relative a due qualsiasi delle calotte superficiali indicate.

3. CALOTTE SUPERFICIALI DEL 2° ORDINE TANGENTI IN UNO SPAZIO PROIETTIVO. —

Il teorema precedente ha carattere topologico. Vogliamo dedurre ulteriori conseguenze nel caso che le due calotte siano del 2° ordine ($s=2$) e stiano in uno spazio proiettivo S_n . Le x^i , $i=1, \dots, n$ sono ora coordinate proiettive non omogenee, nulle in O . Possiamo porre come prima $x^1 = u$, $x^2 = v$ e indicare le rimanenti coordinate, nulle sul piano tangente comune in O , con z^i .

Rappresenteremo le due calotte con

$$(3.1) \quad z^i = \varphi_2^i(u, v) + [3]_{u,v}, \quad \bar{z}^i = \bar{\varphi}_2^i(u, v) + [3]_{u,v}, \quad i=1, \dots, n-2.$$

Se le due calotte hanno in comune due sistemi ∞^1 di E_2 in O , con un ragionamento simile a quello seguito nel caso topologico (cioè cambiando le variabili z^i in loro combinazioni lineari omogenee di cui una s'indicherà con ζ e le altre ancora con z^i , $i=1, \dots, n-3$) ci si può ridurre alle equazioni

$$\sigma_2^2 \left\{ \begin{array}{l} \zeta = \varphi_2(u, v) \\ z^i = \varphi_2^i(u, v) \end{array} \right. \quad \bar{\sigma}_2^2 \left\{ \begin{array}{l} \zeta = \bar{\varphi}_2(u, v) \\ z^i = \bar{\varphi}_2^i(u, v) \end{array} \right. \quad i=1, \dots, n-3.$$

Le direzioni degli E_2 comuni alle due calotte sono date da

$$\varphi_2(u, v) - \bar{\varphi}_2(u, v) = 0.$$

La giacitura $z^i = 0$ è la *giacitura principale* delle due calotte.

Se supponiamo che gli $S(2)$ osculatori alle due calotte siano S_5 , vi sono tre delle forme φ_2, φ_2^i e tre delle $\bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_2^i$ linearmente indipendenti.

Ciò porta che, limitandosi alle φ_2^i , tre o due di esse sono linearmente indipendenti.

In ogni caso, sostituendo di nuovo alle z^i loro combinazioni lineari omogenee (ciò che non altera la posizione privilegiata di ζ) gli sviluppi di $n-6$ o rispettivamente $n-5$ coordinate z^i si possono far cominciare con termini d'ordine ≥ 3 in u, v ; per quanto riguarda le calotte del 2° ordine queste z^i si possono senz'altro porre $= 0$ (o trascurare queste coordinate).

Si ha dunque:

Se due calotte σ_2^2 tangenti nel centro comune e aventi in comune due E_2 (quindi due pennelli ∞^1) hanno per $S(2)$ osculatori S_5 questi e perciò le due calotte stanno in S_6 o S_5 .

4. CALOTTE σ_2^2 IN S_6 . - Consideriamo il caso in cui le due calotte stiano in S_6 . Le tre forme φ_2^i indipendenti possono, di nuovo con opportune combinazioni lineari omogenee che non alterano le determinazioni già fatte, ridursi a u^2, uv, v^2 ; si possono assumere le tangenti agli E_2 comuni, se distinte, come $u=0$ e $v=0$; e infine si può assumere come equazione dello $S(2)$ osculatore alla prima calotta $\zeta=0$ (che non ha ancora avuto significato geometrico). Dopo ciò le equazioni delle due calotte si scrivono

$$\text{per } \sigma_2^2: \zeta = [3] \quad , \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2: \bar{\zeta} = uv + [3]$$

e poi

$$z^1 = u^2 + [3] \quad , \quad z^2 = uv + [3] \quad , \quad z^3 = v^2 + [3]$$

per tutt'e due calotte.

Il significato geometrico delle precedenti forme ridotte è il seguente:

Date due calotte σ_2^2 e $\bar{\sigma}_2^2$ con due E_2 comuni (in direzioni distinte), con $S(2) \equiv S_5$ e appartenenti ad S_6 :

1) i punti dell'ambiente dai quali le due calotte vengono proiettate in calotte coincidenti (diciamo: di un S_5 generico, visto che l'ambiente può sempre supporre un S_6) sono tutti e soli quelli dello S_3 principale ($z^i = 0$);

2) l' S_4 intersezione dei due S_5 osculatori (in $S_6: \zeta = z^2 = 0$) è il luogo delle rette dalle quali le due calotte sono proiettate (sopra un generico S_4) in due calotte aventi per tangenti asintotiche le proiezioni delle tangenti d'incidenza (cioè degli E_2 comuni alle calotte);

3) i piani (di S_6) dai quali le due calotte sono proiettate sopra un generico S_5 in una stessa calotta parabolica la cui tangente asintotica (doppia) sia proiezione di una di quelle d'incidenza si distribuiscono in due S_5 ($z^1 = 0$ o $z^3 = 0$);

4) il cono di Del Pezzo relativo ad una calotta si ottiene dal cono relativo all'altra proiettandone gli spazî generatori dall' S_3 principale e segnando il cono V_5^2 così ottenuto con l' $S(2) \equiv S_5$ della prima calotta considerata;

5) oltre al cono V_5^2 , avente per vertice l' S_3 principale (e per il quale quindi O non è regolare) le calotte appartengono alle quadriche

$$z^i (1 - \alpha^i u - \beta^i v - \gamma^i \zeta - \delta^i z^1 - \epsilon^i z^2 - \eta^i z^3) = \varphi_2^i(u, v)$$

ove φ_2^i vale u^2, uv, v^2 per $i = 1, 2, 3$; tre quadriche, prese ciascuna in un sistema individuano una V_3 contenente le due calotte; su queste V_3 ciascuna calotta è segata dal proprio $S(2)$ osculatore;

6) due calotte nelle condizioni precedenti non hanno invarianti proiettivi.

La caratterizzazione dell' S_3 principale data in 1) è analoga a quella di Halphen per il piano principale di due curve tangenti; la coincidenza delle calotte proiezioni si ha pure proiettando da una retta o da un piano (rispett. sopra un S_4 o un S_5) incidenti lo S_3 principale.

Se manteniamo tutte le ipotesi relative alle due calotte, con la sola variante che le due direzioni d'incidenza coincidono, per esempio in $u = 0$, potrà farsi $\varphi_2 = 0$, $\bar{\varphi}_2 = u^2$, $\varphi_2^1 = u^2$, $\varphi_2^2 = uv$, $\varphi_2^3 = v^2$; però non essendo la direzione $v = 0$ geometricamente determinata (e perciò sostituibile con $v = pu$, p arbitraria finita) si potrà in ∞^1 modi ridursi alla seguente forma canonica per le due calotte:

$$\text{per } \sigma_2^2: \zeta = [3] \quad , \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2: \zeta = u^2 + [3]$$

e poi

$$z^1 = u^2 + [3] \quad , \quad z^2 = uv + [3] \quad , \quad z^3 = v^2 + [3];$$

di questa arbitrarietà bisogna tener conto nell'interpretazione geometrica.

Date due calotte nelle condizioni precedenti, con direzioni d'incidenza coincidenti:

1) vale la caratterizzazione dell' S_3 principale data in 1) del teorema precedente;
2) fissata ad arbitrio una tangente (diversa da quella d'incidenza) vi è un S_5 luogo di piani tali che proiettando le calotte da uno di essi sopra un S_3 generico si ottiene una calotta (sola) le cui tangenti asintotiche sono le proiezioni della direzione d'incidenza e della tangente fissata ad arbitrio;

3) al variare di questa tangente quello S_5 descrive un fascio proiettivo al fascio delle tangenti;

4) fissata una tangente vi è un S_5 luogo di piani tali che proiettando da uno di esse le due calotte sopra un S_3 generico si ottiene una (sola) calotta parabolica che ha per tangente asintotica doppia la proiezione di quella fissata;

5) al variare di questa l' S_5 ora detto involuppa un cono quadrico, riferito proiettivamente al fascio di tangenti; l' S_4 generatore corrispondente alla direzione d'incidenza è l' S_4 base del fascio di S_5 dato in 3);

6) valgono le stesse proprietà date nel teorema precedente per i coni di Del Pezzo e sull'identità proiettiva di tutte le coppie di calotte in questa condizione.

5. CALOTTE σ_2^2 IN S_5 . - Esaminiamo ora il caso di due σ_2^2 con due direzioni d'incidenza i cui $S(2) \equiv S_5$ coincidano. Le due calotte possono rappresentarsi con le equazioni:

$$\text{per } \sigma_2^2: \zeta = \varphi_2(u, v) + [3] \quad ; \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2: \zeta = \varphi_2(u, v) + [3]$$

e poi

$$z^1 = \varphi_2^1(u, v) + [3] \quad , \quad z^2 = \varphi_2^2(u, v) + [3].$$

L' S_3 principale è rappresentato da $z^i = 0$.

Se le direzioni d'incidenza sono distinte, prese come $u = 0$ e $v = 0$, con cambiamenti di coordinate del tipo già adoperato si possono ridurre in un solo modo le equazioni precedenti alla forma

$$\begin{aligned} \text{per } \sigma_2^2: \zeta &= auv + [3] & ; & \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2: \zeta = \bar{a}uv + [3] \\ z^1 &= u(bu + cv) + [3] & , & \quad z^2 = v(du + ev) + [3]. \end{aligned}$$

Date due calotte nelle condizioni precedenti sono determinati:

a) uno S_3 principale, luogo dei punti dai quali le due calotte vengono proiettate in calotte coincidenti (di S_4);

b) un S_2 ($\zeta = u = v = 0$) dalle cui rette le due calotte sono proiettate sopra un S_3 , che può supporre senz'altro passante per il piano tangente, in due calotte aventi per tangenti asintotiche comuni le direzioni d'incidenza;

c) due S_2 ($z^1 = u = v = 0$, $z^2 = u = v = 0$) tali che dalle rette di ciascuno di essi (necessariamente incidenti l' S_3 principale) le due calotte sono proiettate, sopra un S_3 per il piano tangente, in una sola calotta di cui una delle direzioni d'incidenza è tangente asintotica;

d) per la proprietà b) è invariante proiettivo \bar{a}/a e per la c) è invariante proiettivo be/cd .

Se invece le direzioni d'incidenza coincidono per esempio in $u = 0$, senza alterare l' S_3 principale $z^1 = z^2 = 0$ può prendersi $z^1 = u(bu + cv)$. Ciò pone in evidenza un S_2 ($z^1 = u = v = 0$) dalle cui rette le calotte sono proiettate in una stessa calotta di cui $u = 0$ è tangente asintotica; assunta l'altra come $v = 0$ ($b = 0$) e con cambiamento del punto unità si ha la forma canonica

$$\begin{aligned} \text{per } \sigma_2^2: \zeta &= u^2 + [3] & ; & \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2: \zeta = au^2 + [3] \\ z^1 &= uv & , & \quad z^2 = u^2 \pm v^2. \end{aligned}$$

Il coefficiente a è un invariante proiettivo.

6. CALOTTE CON SPAZI OSCULATORI S_4 E S_5 . - Esaminiamo rapidamente, sul modello dei casi già trattati, i casi più particolari in cui uno almeno degli $S(2)$ osculatori non raggiunga la dimensione massima (5).

1) $S(2) \equiv S_4$ per σ_2^2 e $S(2) \equiv S_5$ per $\bar{\sigma}_2^2$.

In quest'ipotesi si hanno due delle φ_2^i nelle (3. 1) linearmente indipendenti. L' S_4 di σ_2^2 sta nell' S_5 di $\bar{\sigma}_2^2$; l' S_3 principale può definirsi con $z^1 = z^2 = 0$ e l' S_5 con $\zeta = 0$. Esiste un piano ($\zeta = u = v = 0$) dalle cui rette la σ_2 è proiettata in una calotta inflessionale; questo piano e l' S_3 principale individuano S_5 . L' S_4 non può contenere l' S_3 principale (altrimenti anche l' $S(2)$ di $\bar{\sigma}_2^2$ sarebbe un S_4). Può adottarsi la forma canonica

$$\text{per } \sigma_2^2: \zeta = [3]; \quad ; \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2: \zeta = uv \quad \text{ovvero} \quad u^2$$

secondo che le direzioni d'incidenza sono distinte o coincidenti; in ciascuna delle φ_2^i può prendersi un coefficiente $= 0$ (e uno $= 1$).

2) $S(2) \equiv S_4$ sia per σ_2^2 che per $\bar{\sigma}_2^2$.

Possono presentarsi due casi.

2₁) Le φ_2^i sono indipendenti. In tal caso φ_2 e $\bar{\varphi}_2$ devono essere due loro diverse combinazioni lineari. I due $S(2)$ osculatori appartengono ad S_5 ; si possono dare ad essi le equazioni $\zeta = z^1$, $\bar{\zeta} = z^2$ e si ha la forma canonica

$$\text{per } \sigma_2^2: \zeta = \varphi_2(u, v) + [3] \quad ; \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2: \bar{\zeta} = \bar{\varphi}_2(u, v) + [3] \\ z^1 = \varphi_2(u, v) + [3] \quad , \quad z^2 = \bar{\varphi}_2(u, v) + [3];$$

se le direzioni d'incidenza sono distinte può farsi $\varphi_2 - \bar{\varphi}_2 \equiv uv$, se coincidono $\varphi_2 - \bar{\varphi}_2 \equiv u^2$.

2₂) Se le φ_2^i non sono indipendenti, i due $S(2) \equiv S_4$ coincidono e si ha la rappresentazione canonica

$$\text{per } \sigma_2^2: \zeta = \varphi_2(u, v) + [3] \quad ; \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2: \bar{\zeta} = \bar{\varphi}_2(u, v) + [3] \\ z^1 = \varphi_2^1(u, v) + [3] \quad , \quad z^2 = 0.$$

3) Sia $S(2) \equiv S_3$ per σ_2^2 . L' $S(2)$ di $\bar{\sigma}_2^2$ (data l'esistenza delle direzioni d'incidenza) non può essere un S_5 . Se è uno S_4 si ha la forma canonica:

$$\text{per } \sigma_2^2: \zeta = [3] \quad ; \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2: \bar{\zeta} = uv \quad \text{ovvero } u^2 \\ z = \varphi_2(u, v) + [3].$$

Se invece è un S_3 e i due S_3 osculatori stanno in S_4 ci si può indurre alla forma

$$\text{per } \sigma_2^2: \zeta = [3] \quad ; \quad \text{per } \bar{\sigma}_2^2: \bar{\zeta} = \varphi_2(u, v) + [3] \\ z = \varphi_2(u, v) + [3]$$

ove $\varphi_2(u, v) \equiv uv$ ovvero u^2 .

Infine se i due $S_3 \equiv S(2)$ coincidono si ha il caso noto di due calotte di S_3 (banale, perchè le due calotte hanno sempre l'incidenza voluta).

Meccanica. — *Un enunciato generale sulla dinamica dei sistemi.*

Nota (*) del Socio GIOVANNI GIORGI.

1. Porto a conoscenza un'enunciazione che era contenuta, almeno parzialmente, nelle mie lezioni, ma non è stata riprodotta nell'edizione a stampa della mia *Meccanica Razionale* (Roma, 1946).

Si tratta in un'applicazione del calcolo motoriale alla dinamica dei sistemi. Gli elementi del calcolo motoriale, nella forma da me adottata, si trovano esposti nel detto trattato. Mi basterà qui riportare questi appunti di nomenclatura:

motore è l'ente matematico a 6 componenti, che corrisponde all'atto di moto elicoidale di un corpo rigido o allo sforzo rototraslatorio della statica;

cursore o rotore, caso particolare del precedente, è l'ente a 5 componenti che corrisponde a un atto di moto rigido rotatorio o a una forza data sulla sua linea d'azione;

(*) Presentata nella seduta dell'11 febbraio 1950.

vettore, altro caso particolare è il noto ente a 3 componenti, che corrisponde a un atto di moto traslatorio o ad una coppia. La dicitura impropria di *vettore applicato* (*vecteur glissant*) non sarà da me usata.

In questa Nota i motori e quindi anche i cursori, e i vettori stessi quando intervengono negli algoritmi motoriali, saranno indicati con lettere o con espressioni chiuse tra graffe $\{ \}$.

2. Ciò premesso, sia una particella di massa m , dotata di velocità \mathbf{v} . Formiamo il prodotto $m\mathbf{v}$, e anzichè riguardarlo come semplice vettore, assumiamolo come cursore (particolare motore), attribuendogli, non solo la grandezza $m\mathbf{v}$ e l'orientazione del vettore \mathbf{v} , ma anche una linea d'azione passante per la particella. Abbiamo così una *quantità di moto motoriale* $\{m\mathbf{v}\}$, ente soggetto alle stesse leggi di composizione come le forze in statica.

Per un sistema qualunque di corpi e di punti materiali, facciamo la composizione di tutte le $\{m\mathbf{v}\}$ delle singole particelle. Avremo come risultante un motore $\Sigma \{m\mathbf{v}\}$, che denomineremo *quantità di moto motoriale*, o più semplicemente anche *motoriale* del sistema. Questo motoriale è un ente elicoidale a 6 componenti, che ha un *asse centrale*, una grandezza scalare paragonabile a una velocità di rotazione attorno all'asse, e una seconda grandezza paragonabile a una velocità di traslazione parallela all'asse. I primi due di questi enti formano un rotore, che contiene in sè tutti i noti elementi componenti della quantità di moto rotatorio del sistema; ciò vuol dire che tale rotore, messo in relazione con un triedro cartesiano qualunque, dà i tre momenti cinetici, componenti di essa quantità di moto rotatorio rispetto ai tre assi. La seconda grandezza, associata con l'orientazione dell'asse, dà la ordinaria quantità di moto traslatoria risultante del sistema.

Quindi il motoriale di un sistema contiene in sè tutti gli elementi della sua quantità di moto, rotatoria e traslatoria, e in più contiene un asse, in posizione determinata.

3. Passiamo ora a scrivere l'equazione del moto, secondo la dinamica newtoniana. Sia \mathbf{f} la risultante di tutte le forze (d'origine interna o esterna al sistema) che agiscono sulla particella m . Questa risultante, concepita motorialmente, ha una linea d'azione che passa necessariamente per la particella.

Secondo la legge newtoniana, si ha vettorialmente

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{f} dt.$$

Verifichiamo che questa equazione vale anche motorialmente. Siano due istanti immediatamente successivi e distinguiamoli con gli indici 1 e 2. Nel passaggio dall'uno all'altro, compiuto in un tempuscolo δt , il valore medio della forza agente sia \mathbf{f} ; l'impulso ricevuto sarà $\mathbf{f}\delta t$, e la variazione della quantità di moto motoriale sarà

$$m \{ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \}.$$

Ora le linee di $\{ \mathbf{v}_2 \}$ e di $\{ \mathbf{v}_1 \}$ sono due tangenti infinitamente vicine alla traiettoria della particella, e la distanza del loro punto d'incontro dalla traiettoria

è infinitesima di secondo ordine; quindi al limite esso punto va a coincidere con la particella. Ciò vuol dire che la linea d'azione del motore differenziale $m \{d\mathbf{v}\}$ passa per la particella; e poichè ciò avviene anche per la linea di $\{\mathbf{f}\}$, si deduce che l'eguaglianza fra impulso elementare e variazione della quantità di moto vale anche in senso motoriale; cioè per ogni particella possiamo scrivere

$$(1) \quad d\{m\mathbf{v}\} = \{\mathbf{f}\} dt.$$

4. Passiamo ora, come si fa nelle dimostrazioni consuete di dinamica, al caso di un sistema qualunque. Immaginiamo scritta, per ogni particella componente, un'equazione come la (1), e facciamo la somma membro a membro, ma in senso motoriale, non semplicemente in senso vettoriale. Abbiamo

$$(2) \quad d \Sigma \{m\mathbf{v}\} = \Sigma \{\mathbf{f}\} dt;$$

e quindi, passando da uno a un altro stato, comunque distinti nel divenire del sistema

$$(3) \quad \Sigma \{m\mathbf{v}\}_B - \Sigma \{m\mathbf{v}\}_A = \int_A^B \Sigma \{\mathbf{f}\} dt,$$

equazione che riassume in sé 6 equazioni cartesiane. Qui si applica sempre il noto ragionamento: si distinguono le $\{\mathbf{f}\}$ interne al sistema, da quelle di provenienza esterna; si presuppone che le prime soddisfino al principio d'azione e reazione, cioè siano due a due uguali e contrarie, agenti lungo la stessa linea, e simultanee, in mancanza di che vanno computate come esterne. Allora i termini provenienti dalle forze interne si elidono, e rimangono solo quelli dovuti alle forze esterne $\{\mathbf{f}_e\}$. Ne segue che

$$(4) \quad \Sigma \{m\mathbf{v}\}_B - \Sigma \{m\mathbf{v}\}_A = \int_A^B \Sigma \{\mathbf{f}_e\} dt.$$

Questa equazione, che anch'essa vale come 6 cartesiane, riunisce i teoremi sulle quantità di moto e sui momenti delle quantità di moto in un enunciato unico conciso, da formularsi così:

Attraverso un intervallo di tempo qualunque, la variazione della quantità di moto motoriale di un sistema è uguale alla somma motoriale degli impulsi ricevuti dall'esterno.

5. Mostriamo che il nostro enunciato motoriale contiene qualche cosa di più dei classici enunciati sul moto dei sistemi.

Prendiamo il caso che le forze esterne siano tutte nulle. Allora si ha:

$$(5) \quad \Sigma \{m\mathbf{v}\} = \text{costante}.$$

Cioè in assenza di forze esterne, il motoriale del sistema si mantiene costante. Essere costante vuol dire che è invariabile la grandezza vettoriale delle quantità di moto (conservazione della quantità di moto, riportata al baricentro), ed è

invariabile (vettorialmente) il momento risultante delle quantità di moto, preso rispetto a qualunque punto fisso; così, i due enunciati classici.

Ma dire che è costante la quantità di moto motoriale del sistema significa che vi è un *asse centrale invariabile*, l'asse di quell'ente elicoidale che rappresenta il risultante delle quantità di moto. Di regola si enuncia semplicemente l'invariabilità del *piano di Laplace*, e cioè della giacitura normale all'asse di cui sopra; ma di invariabile vi è qualche cosa di più che una giacitura, vi è un asse, cioè una retta in posizione fissa, intorno a cui la quantità di moto risultante, per così dire si avvita; e insieme con l'asse vi è un passo di vite, che nasce dal rapporto fra la quantità di moto rotatorio riferito all'asse, e quella traslatoria. L'esistenza dell'asse quale invariante geometrico non risulta in evidenza dalle enunciazioni classiche sulla dinamica dei sistemi.

6. A titolo d'esempio: nel nostro sistema planetario, prescindiamo del moto d'insieme attraverso il mondo stellare; cioè riferiamo tutto a un sistema galileiano (da non confondere coi sistemi inerziali) avente l'origine nel baricentro generale, e gli assi orientati con le stelle fisse. Allora, per costruzione, la componente traslatoria del motoriale risultante si annulla; resta quella rotatoria, con un asse perpendicolare al piano di Laplace, e passante a poca distanza dal Sole. Prendendo invece altro sistema di riferimento, rispetto a cui il moto di traslazione di tutto l'insieme esiste, si aggiunge al computo una quantità di moto traslatorio, che può essere importante; questa fa spostare l'asse centrale parallelamente a se stesso, ma di una distanza relativamente non grande.

Altre deduzioni si possono fare applicando gli enunciati motoriali al caso di un corpo rigido unico che si muove di moto spontaneo; in quel caso i risultati si lasciano porre a raffronto coi teoremi ricavati dal prof. A. Signorini nella sua Nota in questi « Rendiconti », fasc. I dell'anno 1946.

7. Desidero fare un raffronto: i teoremi riassunti negli enunciati sul motoriale e sulla conservazione del motoriale di un sistema, siccome riguardano quantità di moto, meritano la precedenza, se mi si consente l'espressione, in confronto a quelli sulle forze vive. Avendo ridotto gli enunciati sulle quantità di moto a forma motoriale, abbiamo un parallelo fra l'enunciato unico sulla conservazione del motoriale e quello sulla conservazione delle forze vive; ma nell'applicazione ai casi singoli, vi è questa differenza, che l'energia cinetica può essere dissipata trasformandosi in vibrazioni interne o in calore, mentre le quantità di moto non subiscono dissipazione o trasformazione alcuna. Vi sono dei casi in cui si resta in dubbio nell'applicare i teoremi della dinamica: così, per esempio, è nel problema della catena che si svolge con urti interni e dissipazioni che non sono palesi: in questi casi il teorema del motoriale può dare risultati diversi da qualche altro nella cui deduzione entri il principio delle forze vive; e allora conviene attenersi al primo di essi e non al secondo.

Geodesia. — *Livellazione astronomica lungo il parallelo 45' fra Torino e Pola.* Nota (*) del Corrisp. GIOVANNI BOAGA.

Fino dal secolo XVIII vennero istituiti dei confronti fra i valori delle coordinate geografiche: latitudini, longitudini o latitudini ed azimut, determinate astronomicamente e le analoghe ottenute col procedimento geodetico, trasportando fino ai punti considerati le coordinate geografico-astronomiche, osservate in un determinato punto (origine), lungo i lati di opportuni triangoli disposti in catene o in reti.

Sono noti in particolare i lavori dei Padri gesuiti G. B. Beccaria (1716-81) lungo il meridiano di Torino, di R. Boscovich (1711-87) fra Roma e Rimini, quelli degli astronomi dell'Osservatorio di Brera: Frisi (1728-84), Reggio (1743-1804), Oriani (1752-1832) nella Valle Padana, quelli del barone de Zach (1754-1832) nel Piemonte, nel Veneto, nella Toscana, ecc. quelli dello scolopio G. Inghirami (1779-1851) pure in Toscana, da Firenze a Pistoia, Livorno, ecc., che misero in luce le cosiddette *anomalie* o *deviazioni locali*, definite dalle differenze fra i valori astronomici e quelli geodetici delle coordinate geografiche.

Questi lavori vennero continuati si può dire fino ad oggi, sì che attualmente possediamo in tutta l'Italia un discreto numero di osservazioni astronomiche. Particolare interessamento venne posto durante i decenni passati per la determinazione di tali osservazioni lungo il parallelo 45°, i cui lavori vennero anche inclusi in un piano internazionale di attività astronomico-geodetica patrocinato dalla antica « Associazione internazionale per la misura del grado ».

Poichè recentemente l'I. G. M. su proposta della Commissione geodetica italiana adottò, per ellissoide di riferimento delle misure trigonometriche, l'ellissoide internazionale di semi asse equatoriale di 6.378.388 metri e di schiacciamento 1/297 e calcolò su detto ellissoide le coordinate geografiche di tutti i vertici della rete fondamentale e tutti gli azimut di tutti i lati dei triangoli, si pensò di determinare il profilo geoidico, ossia lo scostamento del geoide dall'ellissoide, lungo all'incirca il parallelo 45° per il tratto Torino-Pola per una lunghezza di 584 chilometri, comprendendovi le località: Bric Torniola, Monte Crea, Montecastello, Tortona, Parma, Bologna, Comacchio per le quali si hanno ottime e recenti determinazioni astronomiche di latitudine e di azimut.

Questa ricerca ci è apparsa interessante in questo momento, in quanto la attenzione dei geodeti, dei geologi, dei geofisici è oggi attirata dai fenomeni riscontrati nella Valle Padana, in seguito alle trivellazioni eseguite per la ricerca di idrocarburi. Questo studio oltre alla utilità pratica ne ha anche una scientifica, in quanto è utile il poter constatare con nuovi elementi l'abbassamento geoidico e indagare se sulla sponda orientale dell'Adriatico si ha sopraelevazione del geoide e quindi una non continuità della depressione gravimetrica padana attraverso il mare.

(*) Presentata nella seduta dell'11 febbraio 1950.

Uno studio di questo tipo è stato fatto dal Barbieri lungo il meridiano di Mondovì da Capo Noli a Monte Colma di Mombarone e pubblicato in questi « Rendiconti » nell'anno 1938 (vol. XXVII, ser. VI, fasc. 12) e prima ancora dal Reina nel 1905 (vedi questi « Rendiconti », vol. XIV, ser. IV, anno 1907) lungo il meridiano di Roma, dall'Isola di Ponza al Monte Circeo e da noi completato fino a Cortina d'Ampezzo nel 1944 (« Rivista di Geofisica Pura ed Applicata », vol. VI, fasc. 1-2).

Allo scopo di rendere fra loro omogenei tutti i valori osservati delle latitudini e degli azimut si ritenne opportuno ricalcolare per tutti le riduzioni al polo medio, secondo le formule ordinariamente adottate e con i valori definitivi gentilmente comunicatici dal chiar.mo collega prof. Luigi Carnera, già Direttore del Servizio internazionale delle latitudini.

A tutti i valori astronomici sono state inoltre apportate le correzioni per l'altezza.

Nella Tabella numerica annessa, nelle colonne seconda e terza sono riportate le componenti meridiane ξ e quelle ortodromiche η definite dalle:

$$\xi = \varphi_a - \varphi_g \qquad \eta = (\alpha_a - \alpha_g) \cot \varphi$$

con gli indici a e g le indicazioni astronomico e geodetico, φ, α latitudini ed azimut.

Le latitudini geodetiche e gli azimut pure geodetici ci sono stati forniti molto cortesemente dalla Divisione geodetica dello I. G. M. che ha effettuato i calcoli ex-novo per tutta la rete fondamentale sull'ellissoide internazionale. I valori astronomici invece sono stati ricavati dalle corrispondenti relazioni generalmente pubblicate negli Atti delle Accademie ed elencate ordinatamente nella Bibliografia edita dalla Commissione geodetica.

Con i valori delle componenti ξ e η vennero ricavati i valori delle deviazioni totali θ della verticale e dei loro azimut γ , definiti come è noto dalle:

$$\theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \qquad \gamma = \arctang \frac{\eta}{\xi}$$

Se P_i, P_{i+1} sono gli estremi di un arco di geodetica ellissoidica di azimut α_i e se in P_i sono note le ξ_i, η_i la componente Γ_i della deviazione totale lungo il tratto $P_i P_{i+1}$ è fornita dalla:

$$\Gamma_i = \theta_i \cos (\gamma_i - \alpha_i) = \xi_i \cos \alpha_i + \eta_i \sin \alpha_i$$

ed essa rappresenta l'ampiezza dell'angolo di depressione della tangente alla superficie di livello rispetto alla superficie dell'ellissoide nella direzione dell'azimut α_i .

Se più vertici P_1, P_2, P_3, \dots si succedono in poligonale di lati s_1, s_2, \dots , calcolate in ognuno dei vertici le Γ e portati sull'asse delle ascisse di un sistema ortogonale di riferimento i vertici P_1, P_2, P_3, \dots con le ascisse $0, s_1, s_2, \dots$ e prese sulle ordinate le $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ rispettivamente, si viene con gli estremi di dette ordinate ad individuare una curva che può facilmente essere tracciata a mano. Tale curva rappresenta la legge di variazione di Γ (Cfr. F. R. Helmert: *Höheren Geodäsie*, vol. I, cap. 12).

VERTICE	ξ	η	θ	γ	α	Γ	s (m)	Σs (Km)	S_{mmq} $S_{i,i+1}$	Scostamenti parziali, progressivi		Errori medi $m \Sigma \Delta N$ (m)
										$-\Delta N$ (m)	$-\Sigma \Delta N$ (m)	
Torino	— 6",38	+ 26",59	27",35	103°30'	140°13'	+ 21",92	35609	35,7	— 5150	+ 2,50	— 0,00	± 0,00
Bric Torniola	+ 3,00	+ 7,51	8,09	68 14	37 40	+ 6,97	38273	74,0	— 4460	+ 2,16	+ 2,50	,03
Monte Crea	— 3,25	+ 16,59	16,91	101 05	115 54	+ 16,35	36549	110,5	— 4450	+ 2,16	+ 4,66	,05
Montecastello	+ 2,10	+ 3,00	3,66	55 00	112 25	+ 1,97	16139	126,6	+	— 0,87	+ 6,82	,06
Tortona	+ 9,32	— 9,78	13,51	313 37	94 58	— 10,55	107160	233,8	+	— 3,98	+ 6,45	,06
Parma	+ 4,31	— 2,96	5,23	325 31	112 05	— 4,36	88190	322,0	+	— 1,65	+ 2,47	,16
Bologna	+ 6,22	— 6,42	8,94	314 06	71 14	— 4,08	69357	391,4	+	— 2,42	+ 0,82	,19
Comacchio	— 9,45	— 5,98	11,38	237 41	81 18	— 10,43	133000	524,4	+	— 5,28	— 1,60	,21
Pola	— 5,64	— 5,10	7,60	22 07	81 18	— 5,89			+		— 6,88	,29

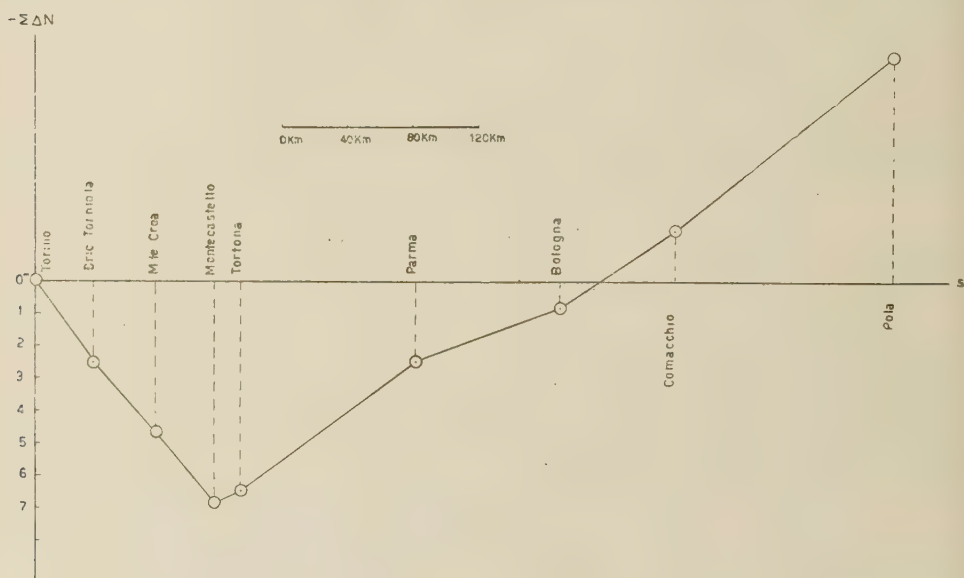
Lo *scostamento normale* — ΔN della superficie di livello (sferoide) rispetto all'ellissoide, nel passaggio da un generico vertice P_i al successivo P_{i+1} , quando si tiene conto della:

$$\Gamma'' = \frac{\Delta N}{s \cdot \text{arc } 1''}$$

viene espresso dalla

$$-\Delta N = \text{arc } 1'' \int \Gamma'' ds$$

dove la integrazione deve essere effettuata lungo la poligonale geodetica. Seguendo ora il metodo indicato dal Barbieri nella Nota dianzi citata, indicando cioè nel



grafico, per le ascisse con 1 mm, 1 km e per le ordinate con 1 mm un decimo di secondo, la formula precedente diviene:

$$-\Delta N = 0,1 \times 1000 \times \text{arc } 1'' \int \Gamma^{mm} ds^{mm} = \frac{1}{2062,65} S_{i,i+1}^{mmq}$$

dove con $S_{i,i+1}^{mmq}$ si è indicata l'area del trapezio mistilineo, espressa in mmq fra le ordinate Γ_i, Γ_{i+1} , la curva e l'asse delle ascisse.

Questa area si può ricavare direttamente dal grafico contando il numero dei mmq (come abbiamo fatto noi), oppure ricorrendo al planimetro.

Il valore di $-\Delta N$ si può ottenere anche con la seguente formula, senza essere obbligati a ricorrere a mezzi grafici o meccanici:

$$-\Delta N = \frac{1}{2} s_i \{ (\xi_i + \xi_{i+1}) \cos \alpha_i + (\eta_i + \eta_{i+1}) \sin \alpha_i \} \text{arc } 1''$$

(con $s_i = P_i P_{i+1}$ espressa in metri), stabilita però con l'ipotesi della variazione lineare della funzione Γ fra le due ordinate successive.

Nella *Tavola numerica* sono riportate per tutte le stazioni tutte queste quantità e vi sono poi aggiunti gli *scostamenti progressivi* ($-\Sigma \Delta N$) con i rispettivi

errori medi determinati con la formula generalmente usata per la propagazione degli errori per funzioni di quantità osservate:

$$m_{\Sigma \Delta N} = \pm \sqrt{\Sigma (s \cdot m''_{\theta} \cdot \text{arc } 1'')^2}$$

dove m''_{θ} rappresenta in secondi di arco l'errore medio della determinazione della deviazione totale θ , espresso dalla:

$$m''_{\theta} = \pm \sqrt{\cos^2 \gamma m''_{\xi} + \sin^2 \gamma m''_{\eta}}$$

ed assumendo in generale, come è lecito, per m''_{ξ} e m''_{η} rispettivamente gli importi $\pm 0'',15$ e $\pm 0'',30$ comprendenti le incertezze astronomiche e quelle geodetiche.

I risultati della colonna — $\Sigma \Delta N$ mettono in luce una netta *onda geoidica* riportata nel grafico.

Da Torino ha inizio una depressione che raggiunge il valore massimo a Montecastello, ad occidente di Tortona, alla distanza di 110 km dall'origine, indi la depressione diminuisce fino a raggiungere il valore zero fra Bologna e Comacchio; il geoide continua poi ad alzarsi fino a Pola, dove raggiunge l'innalzamento di 6,88 m, di importo circa eguale a quello del massimo abbassamento.

Riferendo questi valori non a Torino, ma a Roma, origine della triangolazione, l'onda geoidica rimane inalterata, solo a tutte le ordinate si deve aggiungere la costante — 5,48 m che rappresenta l'abbassamento del geoide a Torino, ed ottenuto per mezzo di una poligonale da Roma a Torino col procedimento esposto.

Osserviamo poi che proprio a Montecastello si riscontra la piccola deviazione totale ($3'',7$) e che i valori delle componenti ξ, η per le stazioni precedente e seguente di Montecastello, sono di segni contrari, il che è in equilibrio con le deduzioni tratte dal profilo geoidico, e che — in ogni caso — indica che nelle vicinanze della località segnalata vi ha luogo una diminuzione di densità sotterranea; non è improbabile, anche per la costituzione geologica della regione, che essa metta in luce un vasto giacimento di idrocarburi. Questo fatto della minore densità sotterranea messo in evidenza con le misure astronomico-geodetiche è in perfetto accordo con quello ottenuto con i procedimenti gravimetrici.

Chimica fisica. — *Osservazioni sul calcolo degli indici di legame per il gruppo carbonilico in molecole di aldeidi e chetoni* (*). Nota di GIOV. BATTISTA BONINO e EOLO SCROCCO, presentata (**) dal Socio G. B. BONINO.

In un lavoro precedente⁽¹⁾ abbiamo calcolato la dipendenza della « frequenza di oscillazione » di un gruppo biatomico, coniugato in una molecola poliatomico, in funzione dell'indice di legame p_z (indicato anche con π). Il calcolo valeva per casi speciali nei quali, in conseguenza del tipo di oscillazione e della simmetria della molecola, la frequenza dell'oscillazione stessa poteva ritenersi praticamente

(*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi di Chimica Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche (presso l'Istituto Chimico « Giacomo Ciamician » dell'Università di Bologna).

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) BONINO e SCROCCO, « Rend. Acc. Linc. », VIII, 6, 421 (1949).

indipendente dalle masse di altri atomi della molecola all'infuori dei due atomi costituenti il « legame » considerato ⁽²⁾.

Abbiamo mostrato come ad un tale modello possa essere assimilato il gruppo carbonilico di alcuni tipi di aldeidi e di chetoni. Si giungeva così a prevedere per alcune aldeidi, ed in modo già incoraggiante, la frequenza Raman di oscillazione del gruppo carbonilico partendo dal valore della stessa frequenza riscontrata nello spettro u. r. dell'aldeide formica.

Il calcolo per alcune aldeidi e per alcuni chetoni era condotto con la cosiddetta approssimazione [A] ^{(3), (4)}.

In questo tipo di approssimazione si considerava l'integrale di risonanza β_{CO} relativo al legame $C=O$ come uguale a quello che compete all'ordinario doppio legame $C=C$ tra carbonio e carbonio. D'altra parte si considerava pure l'integrale di Coulomb dell'ossigeno carbonilico come uguale a quello che compete agli atomi di carbonio della stessa molecola.

In questo lavoro desideriamo invece, spingere oltre la nostra approssimazione attribuendo al legame $C=O$ valori più ragionevoli, sia per quanto riguarda l'integrale di risonanza β_{CO} sia per ciò che si riferisce alla differenza tra gli integrali di Coulomb degli atomi di carbonio e di ossigeno del gruppo carbonilico. Questa differenza è trascurata nel tipo di approssimazione [A] perchè in tale approssimazione non si tiene conto della differenza di elettronegatività tra i due atomi del gruppo studiato.

Il problema di attribuire al legame $C=O$ un più appropriato valore di β è stato già affrontato da Coulson ⁽⁵⁾ e da Bonino-Rolla ⁽³⁾ nello studio delle molecole chinoniche.

Dato che Lennard-Jones ⁽⁶⁾ riconduce il valore di β_{CC} per il doppio legame etilenico alla differenza delle energie di legame $C=C$ e $C-C$, si potrà porre per il rapporto dei due integrali di risonanza:

$$(I) \quad \eta = \frac{\beta_{C=O}}{\beta_{C=C}} = \frac{E_{C-O} - E_{C=O}}{E_{C-C} - E_{C=C}}$$

(2) ERRATA CORRIGE. - Nel precedente lavoro citato in (1) a p. 424 per un incidente tipografico il cliché della fig. 1 è stato stampato a rovescio; pertanto se la schematizzazione della oscillazione ν_2 (centrale) resta ancora valida, lo schema della oscillazione che ci interessa nella discussione (e cioè la ν_4) non corrisponde più alla figura. Per frequenza del gruppo $C=O$ deve intendersi quella che porta nella figura l'indicazione ν_1 e per la ν_1 quella che porta l'indicazione ν_4 .

(3) BONINO e ROLLA, « Rend. Acc. Linc. », VIII, 5, 220 (1948).

(4) Per una svista nella impaginazione della Tabella I nella Nota citata in (1) per l'aldeide benzoica è stato riportato il valore dell'indice di legame $C=O$ calcolato con l'approssimazione [C] ($\beta_{CO}/\beta_{CC} = 2$; $h = -1,2$) anzichè, come è detto nella Nota, con l'approssimazione [A] ($\beta_{CO}/\beta_{CC} = 1$; $h = 0$). I valori che si calcolano con l'approssimazione [A] per l'aldeide benzoica sono invece i seguenti:

Aldeide benzoica: a) I_{CO} (indice di legame π del gruppo $C=O$) = 0,91114.

b) $2h \cdot 10^{-5}$ dine/cm = 12,7

c) ν_4 calcolato 1694 cm^{-1}

ν_4 sperimentale 1696 cm^{-1} .

(5) « Trans. Far. Soc. », 42, 108 (1946).

(6) « Proc. Roy. Soc. London », A 158, 280 (1937).

dove E_{C-O} , $E_{C=O}$, E_{C-C} , $E_{C=C}$, rappresentano le energie dei rispettivi legami indicati, quali esse risultano dai valori pubblicati da Pauling⁽⁷⁾ e che qui riportiamo:

$$E_{C-O} = 70 \quad ; \quad E_{C=O} = 150 \quad ; \quad E_{C-C} = 59 \quad ; \quad E_{C=C} = 100 \text{ K cal/mol.}$$

perciò:

$$\eta \cong 2.$$

Questo valore di η è accettato anche da Coulson⁽⁵⁾ per il $C=O$ nel calcolo della equazione secolare delle strutture chinoniche (approssimazioni [B] e [C]).

Meno semplice si presenta invece il calcolo per una valutazione più approssimata della differenza tra gli integrali coulombiani per l'atomo di carbonio e per quello di ossigeno legati nel gruppo carbonilico.

Ricordiamo che, nel noto metodo di approssimazione, i cosiddetti orbitali molecolari si scrivono:

$$(II) \quad \Psi_j = \sum_r c_{rj} \psi_r$$

dove Ψ_j rappresenta l'orbitale molecolare corrispondente al livello j e gli indici r si riferiscono agli atomi della molecola o del gruppo atomico considerato, mentre le grandezze c_{rj} sono opportuni coefficienti variazionali che vengono determinati rendendo minimo il valore dell'energia E rispetto agli stessi c_r e cioè:

$$(III) \quad \frac{\partial E}{\partial c_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

dove

$$E = \frac{\int \Psi^* H \Psi d\tau}{\int \Psi^* \Psi d\tau}$$

ed in cui H rappresenta l'effettivo operatore Hamiltoniano per ciascun elettrone π . In una molecola organica contenente atomi di carbonio (s) ed altri atomi (r) si verificherà dunque la relazione:

$$(IV) \quad (\alpha_r - \varepsilon_j) c_{rj} + \sum_s \beta_{rs} c_{sj} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

dove:

$$(V) \quad \alpha_r = H_{rr} - H_{CC} \quad ; \quad \varepsilon_j = E_j - H_{CC} \quad ; \quad \beta_{rs} = H_{rs}$$

e cioè β_{rs} è dunque il solito integrale di risonanza del legame rs e H_{rr} è l'integrale Coulombiano relativo agli atomi r , mentre H_{CC} è quello relativo agli atomi di carbonio.

L'integrale H_{rr} corrisponde dunque all'energia di un elettrone in un orbitale per il quale tutti i coefficienti c sono nulli ad eccezione di c_r . Si tratta dunque di un elettrone « confinato » attorno al nucleo r . Ad un primo esame si può rite-

(7) PAULING, *The nature of the Chemical Bond*, p. 131, Cornell Univ. 1945.

nere che H_{rr} corrisponda al potenziale di ionizzazione dell'atomo r , ma da uno studio più approfondito si vede che tale valutazione non è soddisfacente in quanto H_{rr} coinvolge il campo self-consistente al quale partecipano in una molecola, per lo meno, anche i nuclei degli atomi vicini ad r e gli elettroni ad essi pertinenti. E poi si deve notare che, quando un elettrone è allontanato dall'atomo r della molecola, si provoca una non trascurabile « riorganizzazione » degli elettroni restanti, elettroni che non sono da considerarsi come semplici « elettroni atomici » di un atomo isolato, ma come « elettroni molecolari » e perciò riferibili a situazioni ben più complesse.

Nel citato lavoro sui benzochinoni ⁽⁵⁾ Coulson, in mancanza di dati più approssimati, valuta la differenza tra H_{CO} e H_{CC} come una differenza dei potenziali di ionizzazione dei rispettivi atomi. Coulson si vale qui dei potenziali di ionizzazione calcolati per i corrispondenti stati di valenza riferibili al gruppo $C=O$ seguendo un precedente lavoro di Mulliken ⁽⁸⁾.

Con un tale criterio Coulson ottiene:

$$(VI) \quad h = \frac{\alpha}{\beta_{CC}} = -2.$$

Il citato Autore ammette però che un tale valore sia approssimato con tutta probabilità a ± 1 e potrebbe pertanto aversi $h = -1$ come $h = -3$.

Ciò non toglie che Coulson proceda alla risoluzione delle equazioni secolari delle strutture benzochinoniche conservando nei calcoli $h = -2$. I valori di tutti i coefficienti c_{rs} e gli indici di legame così calcolati sono pertanto dipendenti dal valore scelto per h .

A noi sembra che ponendo $h = -2$ si giunga a delle conseguenze inaccettabili.

Per esempio il momento elettrico dipolare del gruppo carbonilico CO potrà, in via di prima approssimazione, essere calcolato con l'espressione:

$$(VII) \quad \mu = er_0 \sum_j (c_{0j}^2 - c_{ej}^2)$$

dove e è la carica dell'elettrone in valore assoluto, r_0 la distanza di legame $C=O$ allo stato di riposo e c_{0j} , c_{ej} rispettivamente i coefficienti della espressione (II) che, come abbiamo visto, ci rappresenta l'orbitale molecolare. I quadrati di questi coefficienti ci esprimono dunque le densità della nuvola elettronica p_z su ciascuno dei livelli j e per ciascuno dei due atomi del legame $C=O$.

Anche se in via di prima valutazione calcoliamo i c_{rj} per un gruppo $C=O$ isolato si ha, ponendo $h = -2$, per l'unico livello « legante »:

$$c_0^2 = 0,8536 \quad ; \quad c_e^2 = 0,1464.$$

Da ciò, ponendo per la distanza interatomica il valore dedotto per il gruppo $C=O$ nella molecola dell'aldeide formica $r_0 = 1,21 \cdot 10^{-8}$ ⁽⁹⁾ si ottiene per il momento elettrico:

$$\mu = 4,774 \cdot 10^{-10} \cdot 1,21 \cdot 10^{-8} \cdot 0,7072 = 4,08 \cdot 10^{-18} \text{ u. e. s.}$$

(8) MULLIKEN, « J. Chem. Phys. », 2, 782 (1934).

(9) STEVENSON e LUVALLE e SCHOMACHER, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 61, 2508 (1939).

Questo valore del momento dipolare del $C=O$ è troppo elevato: sperimentalmente al gruppo carbonilico compete un momento dipolare che oscilla tra 2,7 e 2,9 U. D. circa.

Questa incongruenza ci consiglia di rivedere la valutazione di h prima di procedere ad un nuovo calcolo più approssimato della frequenza di oscillazione del gruppo $C=O$ nei chetoni e nelle aldeidi.

Si può frattanto ricordare che, nella polarizzazione della nuvola di carica p_* in un legame $C=O$, l'energia di uno stato polare limite non è determinata dal semplice potenziale di ionizzazione, ma da questo (che rappresenta il lavoro necessario per portare l'elettrone di uno dei due atomi all'infinito) più il lavoro (positivo o negativo) per portare l'elettrone stesso dall'infinito sull'altro dei due atomi costituenti il legame.

Dunque si potrà porre la differenza $H_{rr} - H_{cc}$ in questa nuova approssimazione, non più come determinata dalla semplice differenza dei rispettivi potenziali di ionizzazione, ma dalla differenza della elettronegatività dei due atomi legati, intendendosi per elettronegatività la somma del potenziale di ionizzazione e della affinità elettronica per ciascuno dei due atomi.

Ma, sia il potenziale di ionizzazione che l'affinità elettronica dovrebbero corrispondere a quel particolare stato degli atomi C e O legati tra loro con un doppio legame carbonilico quando l'atomo di carbonio tetravalente del gruppo stesso è a sua volta ancora legato in molecola per mezzo delle due restanti valenze.

È difficile valutare in modo praticamente accettabile questi dati in una molecola poliatomica seguendo una via puramente teorica.

Anche l'uso della scala teorica delle elettronegatività proposta da Mulliken dopo una elaborata discussione quantomeccanica⁽⁸⁾ non dà per un calcolo numerico, quale il nostro, un sicuro affidamento.

Abbiamo tentato allora di utilizzare le elettronegatività empiriche x_r date da Pauling⁽¹⁰⁾ e dedotte da esperienze termochimiche sui calori di formazione dei composti nei quali effettivamente gli atomi in questione si trovano nei loro stati di valenza e sono legati tra loro.

Pauling (loc. cit.) definisce le cosiddette « energie extraioniche » Δ di un legame $A-B$ con la nota relazione:

$$\Delta_{(A-B)} = (x_A - x_B)^2 \quad \text{v. e.}$$

dove x_A e x_B sono le « elettronegatività di Pauling ». Poniamo allora le differenze tra H_{AA} e H_{BB} senz'altro uguali a $\Delta_{(A-B)}$.

Prendendo i valori di Pauling:

$$x_c = 2,5 \quad ; \quad x_o = 3,5$$

ne verrà:

$$\Delta H = H_{oo} - H_{cc} \cong (3,5 - 2,5)^2 \quad \text{v. e.} \quad \cong 1 \quad \text{v. e.}$$

(10) Ved. PAULING, loc. cit. (5) p. 64.

Per valutare $h = \frac{\Delta H}{\beta_{CC}}$ assumeremo come valore convenzionale di β_{CC} quello che si può calcolare dalle energie di legame $C-C$ e $C=C$ pure dedotte per via termochimica dallo stesso Pauling⁽¹¹⁾ e cioè:

$$-2\beta = E_{C=C} - E_{C-C} \cong 40 \text{ K cal/mol.}$$

Pertanto:

$$h = -\frac{23,06}{20} = -1,154.$$

Risolvendo l'equazione secolare utilizzando il valore arrotondato $h = -1,2$ nel caso virtuale più semplice per un gruppo biatomico $C=O$, si ottiene per il momento dipolare:

$$\mu = e r_o (c_o^2 - c_c^2) = 4,774 \cdot 10^{-10} \cdot 1,21 \cdot 10^{-8} \cdot 0,5145 = 2,97 \cdot 10^{-18} \text{ u. e. s. }^{(12)}.$$

Questo valore è paragonabile a quello dei momenti dipolari sperimentalmente trovati per molecole semplici di aldeidi e di chetoni⁽¹³⁾.

Ricorderemo per esempio che il momento dipolare della molecola dell'acetone studiato allo stato di vapore⁽¹³⁾ ammonta a 2,97 Debye e che la misura di momenti dipolari molecolari di aldeidi e chetoni semplici in soluzioni di solventi apolari dà valori compresi tra 2,7 e 2,9 Debye, tanto che ordinariamente si assume il valore 2,8 Debye⁽¹⁴⁾ quale momento elettrico « parziale » del gruppo $C=O$ nel calcolo vettoriale del momento dipolare di una molecola poliatomico⁽¹⁵⁾.

Riteniamo pertanto che un valore di $h = -1,2$ sia più ragionevole di $h = -2$ nel caso del calcolo della differenza di elettronegatività tra carbonio ed ossigeno carbonilico agli effetti della risoluzione della equazione secolare per la perturbazione degli elettroni π in molecole di aldeidi e chetoni. Del resto questo valore, da noi meglio precisato, non è in contraddizione con quello valutato da Coulson⁽⁵⁾ che poneva $h = -2 \pm 1$.

In un prossimo lavoro con l'aiuto dei valori di η e di h discussi e precisati in questa Nota si procederà ad un calcolo della frequenza di oscillazione dei gruppi $C=O$ in molecole di aldeidi e chetoni secondo una meno grossolana approssimazione.

(11) Ved. per esempio WEHLAND, *Theory of Resonance*, 1947, p. 78.

(12) Si usa qui il classico valore di $e = 4,77 \cdot 10^{-10}$ u. e. s. dato che i momenti dipolari ricordati dalla letteratura sono ancora riferiti al vecchio valore del numero di Avogadro $N = 6,06 \cdot 10^{23}$.

(13) HOIENDAHL, *Studies of Dipole Moment*, Copenhagen 1928.

(14) Ved. per esempio DEBYE, *Polare Molekeln.*, p. 65 (ed. Hirzel 1929).

(15) In un calcolo rigoroso bisognerebbe anche tener conto della polarizzazione del legame σ che costituisce uno dei due legami del doppio legame $C=O$. Però se tale polarizzazione nel caso di un $C-O$ semplice legato con semplice legame può assumere valori non trascurabili ($\mu \cong 0,8 \text{ D}$)⁽¹⁶⁾ osserviamo che nel caso del doppio legame $C=O$ la polarizzazione della nuvola di carica π sarà certamente del tutto prevalente su quella del legame σ .

(16) Ved. PAULING, loc. cit., p. 68.

Endocrinologia. — *Sul destino del grasso introdotto per via endovenosa nei cani spancreati e normali*^(*). Nota di UGO LOMBROSO e UGO DACHÀ, presentata^(**) dal Socio U. LOMBROSO.

La concezione che il pancreas debba intervenire con una sua interna secrezione nel metabolismo intermedio dei grassi è stata prospettata da uno di noi (Lombroso) all'inizio del presente secolo, in base specialmente ad un fenomeno, la profonda stearrea che si manifesta immediatamente dopo l'estirpazione totale della glandula. Tale stearrea, che può raggiungere in peso ed anche superare in qualche caso e di molto il peso del grasso alimentare, non deve essere interpretata, come venne da molti Autori, come dovuta all'assenza nel tubo digerente del secreto pancreatico esterno. Infatti basta la presenza di un segmento di pancreas rimasto nell'organismo, ma separato dall'intestino, perchè la stearrea non compaia o sia molto meno intensa. Ed ancora, l'introduzione di secreto pancreatico nel lume del duodeno riduce di poco la stearrea dei cani spancreati; e così pure la sostituzione al grasso neutro di acido grasso e glicerina (che rappresentano appunto il risultato finale dell'azione del secreto pancreatico sul grasso neutro), non modifica sensibilmente la stearrea. Secondo il Lombroso la stearrea non rappresenta quindi il semplice rigetto del grasso alimentare per l'assenza del secreto pancreatico nell'intestino, ma corrisponde, almeno in parte, alla glicosuria che si osserva dopo l'estirpazione del pancreas, e che è l'esponente di espulsione di materiale non utilizzato; salvo che, a rendere più difficile tale interpretazione a proposito del grasso, sta il fatto che il rigetto dei lipidi si effettua per mezzo dell'emuntorio intestinale e si associa al grasso espulso perchè non assorbito.

La concezione ora esposta trova però una obiezione molto inattesa in una recente rivista di Chaikoff ed Entenman⁽¹⁾ nella quale sarebbe posto in discussione appunto l'argomento principale addotto dal Lombroso, la stearrea dei cani spancreati. Questi studiosi riportano in detta Nota una statistica di Autori americani i quali, studiando nei cani spancreati l'assorbimento dei grassi, raggiungono i più opposti risultati: da un assorbimento perfetto (cioè nessuna stearrea) ad una espulsione totalitaria o quasi del grasso alimentare, o, per essere più esatti, ad una stearrea tale da corrispondere pressochè in modo perfetto alla quantità del grasso somministrato.

In tre Note precedenti^(2, 3, 4), sono stati riferiti i risultati di nuove ricerche svolte nel nostro Laboratorio per controllare anzitutto le antiche esperienze di

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) I. L. CHAIKOFF e C. ENTENMAN, *Advances in Enzymology*, vol. 8, 171-202 (1948).

(2) U. DACHÀ e O. ROSSI, «Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Sc. Fis. Mat. Nat.», vol. 7, 169-175 (1949).

(3) U. DACHÀ e O. ROSSI, «Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Sc. Fis. Mat. Nat.», vol. 7, 175-177 (1949).

(4) U. LOMBROSO e U. DACHÀ, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», XXV, 760 (1949).

Lombroso e dei numerosi Autori che avevano svolto le loro ricerche in un'epoca anteriore alla scoperta dell'insulina e delle varie vitamine, e che tutti avevano concordemente ottenuta al profonda stearrea sopra enunciata. Come è stato in dette Note riferito, sia rifacendo le esperienze con le antiche disposizioni (cioè animali spancreati, ma non sottoposti a trattamento insulinico od a trattamento insulinico e vitaminico), sia sottoponendo i nostri animali a tali trattamenti, si sono confermati i vecchi risultati: e cioè stearrea molto elevata, talvolta uguale in peso al grasso alimentare, od anche superiore. Stearrea alquanto minore si osservò in due cani cui si somministrava insulina, vitamine, miscugli salini, polvere d'ossa ecc.; ma si trattò di una lieve riduzione della stearrea, sempre superiore al 60% del grasso alimentare (in un caso, già pubblicato, era del 62,4% ed in uno, ancora inedito, del 66,8%), stearrea che non aveva nulla a che fare con i dati esposti dagli Autori americani, i quali, come abbiamo detto, affermano di aver osservato in cani completamente spancreati un assorbimento perfetto dei grassi.

Esiste dunque, fra i molto numerosi dati da noi raccolti recentemente e quelli degli Autori americani, una così profonda discordanza che dovrebbe suggerire controlli anche da parte di altri Laboratori. Ci sono alcune differenze nella disposizione sperimentale tra gli animali da noi adoperati e quelli degli Autori americani, che forse potrebbero darci ragione di una tale discordanza. E cioè: le nostre ricerche si sono svolte nelle prime settimane o mesi dopo l'estirpazione del pancreas, mentre gli Autori americani hanno anche utilizzato animali nei quali la sopravvivenza era di più anni; per cui si può sospettare che, durante tutto questo tempo, altri tessuti abbiano potuto sostituirsi in parte al tessuto pancreatico. Comunque un controllo sarebbe veramente utile, tanto più che nelle ricerche degli Autori americani non si è sufficientemente presa in esame la possibilità di una espulsione tardiva del grasso. L'unico Autore che si è preoccupato del periodo di espulsione del grasso è stato il Dragstedt⁽⁵⁾. Questo Autore somministrava, insieme al grasso alimentare, colore di carminio, e raccoglieva tutte le feccie colorate prima di fare il dosaggio del grasso espulso. Noi abbiamo però osservato che anche in un periodo postumo alla raccolta delle feccie colorate con carminio, si può avere una espulsione tardiva di grasso molto ma molto superiore a quella ottenuta nelle feccie colorate⁽²⁾. Questa eventualità di una espulsione tardiva del grasso nei cani spancreati, che non è stata presa in considerazione dagli Autori americani, può modificare profondamente il significato dei dati da essi riferiti.

A proposito poi delle ricerche eseguite dal Dragstedt, (uno degli Autori citati da Chaikoff e Entenman tra quelli che avevano ottenuto un maggior assorbimento di grasso), è opportuno ricordare che questo Autore ha fornito un interessantissimo risultato⁽⁵⁾. E cioè egli avrebbe constatato che la lipemia nei cani spancreati non aumenta mai (talvolta lievemente si abbassa) dopo introduzione di grasso neutro - o di grasso neutro mescolato ad estratti di pancreas - o di acidi grassi; anche cioè nelle condizioni che più avrebbero dovuto favorire l'assorbimento dei grassi. Nel contempo, ripetendo con le stesse dosi di grasso la deter-

(5) C. VERMEULEN, F. M. jr. OWENS e L. R. DRAGSTEDT, «Am. J. Physiol.», 138, 792-796 (1943).

minazione della lipemia in cani normali, constatava alla 3^a ora un aumento che raggiungeva i 300 mg^o%. Ed allora, come si può supporre che si sia svolto l'assorbimento del grasso negli animali spancreati che mai presentarono aumento della lipemia dopo la somministrazione di grasso?

Su questo preciso argomento ritorneremo in una prossima Nota. Nella presente noi intendiamo soffermarci sui risultati ottenuti con una precisa disposizione sperimentale che coinvolge anche indirettamente tale argomento e si riallaccia pure ad un dato che appariva il più dimostrativo per la tesi che il metabolismo intermedio dei lipidi è profondamente alterato dopo l'estirpazione del pancreas. Come abbiamo sopra accennato, in un certo numero di casi si può osservare che il grasso espulso dall'intestino di cane spancreato supera in peso quello del grasso alimentare. Vale a dire ci si trova di fronte ad una espulsione di grasso endogeno; ed è appunto questo dato che suggerisce il paragone con la espulsione di glucosio nel cane spancreato, il rifiuto cioè di materiali dovuto ad una rallentata loro combustione. Però questo fenomeno si era presentato saltuariamente nelle nostre ricerche, senza che si potesse *a priori* prevedere quando si sarebbe manifestato o no. Un sospetto era sorto legittimamente analizzando i casi nei quali l'espulsione del grasso avviene dopo vari giorni da che il carminio somministrato insieme era stato eliminato; e cioè, si trattava di grasso rimasto nel lume intestinale più lungamente del restante cibo? o si trattava di grasso assorbito, ma che, entrato nell'organismo e non venendo ivi utilizzato, era in seguito espulso?

Dato che della capacità di assorbire grasso da parte del cane spancreato non si può avere una documentazione col seguire la lipemia (come risulta dalle interessanti ricerche del Dragstedt), abbiamo creduto di affrontare più direttamente il quesito praticando in cani spancreati perfusioni di grassi finemente emulsionati, seguendo poi in essi la stearra. Così facendo non restava più alcun dubbio sulla penetrazione nell'organismo di tale grasso: in qualche caso si era saggiato precedentemente nello stesso cane, prima di procedere all'estirpazione del pancreas, l'effetto della iniezione di corrispondenti quantità di finissime emulsioni omogeneizzate di grasso. Non abbiamo insistito su queste ricerche perchè già precedentemente C. Lombroso jr. ⁽⁶⁾ ha potuto dimostrare che i grassi introdotti per via endovenosa nei cani normali vengono perfettamente utilizzati. E ciò risulta sia dal Q. R. sia dal fatto che animali tenuti a dieta iperproteica ed ipocalorica tale da condurre ad un bilancio di N negativo, dopo perfusione di lipidi presentano un bilancio positivo di N, tanto maggiore quanto più elevata era la quantità di grassi introdotti per via endovenosa. Nei cani normali queste perfusioni sono generalmente bene tollerate tanto da poter essere ripetute 20-30 volte. Invece nei cani spancreati lo sono molto meno.

Le nostre esperienze sono state eseguite su 22 cani operati di estirpazione totale di pancreas, mantenuti quasi aglicosurici con insulina, chirurgicamente guariti, ai quali veniva più volte controllata la stearra per garantirci che non si trattasse di animali che eliminassero spontaneamente una quantità di grasso superiore all'alimentare. Di questi soltanto 5 poterono essere utilizzati in modo com-

(6) C. LOMBROSO jr. e A. MURATORIO, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », XXV, 870-872 (1949).

pleto, perchè gli altri morirono dopo 24-48 ore dall'iniezione di grasso emulsionato, lasso di tempo insufficiente per completare la ricerca.

L'emulsione di olio di oliva al 15 %, di cui ci siamo serviti, veniva preparata secondo la tecnica descritta da C. Lombroso jr. (7), salvo che si è variato il materiale emulsionante, nel dubbio che si dovesse attribuire ad esso la scarsa resistenza degli animali spancreati (8). Tutto l'allestimento dell'emulsione deve essere eseguito in modo che l'emulsione stessa risulti sterile e a pH 7. Tale emulsione veniva iniettata a goccia nella femorale nella quantità totale di olio riportata nella tabella e molto lentamente (tempo d'iniezione: 1 cc al minuto primo). Le flebo-clisi venivano ripetute per 2-3 giorni successivi. La raccolta delle fecce, iniziata dopo la prima perfusione (escludendo le fecce che quasi sempre l'animale emette durante la perfusione e subito dopo la fine di essa) veniva prolungata nei giorni successivi. Il grasso delle fecce veniva determinato medianie estrazione in Soxhlet con etere solforico.

Nella seguente tabella sono riassunti i dati ottenuti.

TABELLA.

Esperienza N.	Cane	Peso iniziale in Kg.	Giorni dall'intervento	Grasso somministrato per via endovenosa		Grasso alimentare in gr.	Totale grasso somministrato in gr.	Giorni di somministrazione	Totale grasso fecale eliminato in gr.	Grasso fecale eliminato - grasso alimentare in gr.	Eliminazione in %
				Tipo	Peso in gr.						
1	La	8.100	26	Olio oliva	36	7	43	3	36,71	29,71	82,5
2	Ri	6.200	10	id.	30	6	36	3	22,97	16,97	56,5
3	Av	5.300	16	id.	18,5	9	27,5	2	29,69	20,69	111,8
4	Li	11.800	1	id.	18	10	28	2	29,50	19,50	108,3
5	Sc	12.000	12	id.	22	3	25	2	23,65	20,65	93,8

Dai nostri dati risulta che quando a cani operati di estirpazione totale del pancreas viene somministrato per bocca cibo poverissimo di grasso (pane, carne sgrassata) e si introducono in circolo grassi finemente emulsionati, nelle fecce si ritrovano grassi in quantità notevole; in due casi (esperienze n. 1 e n. 5) in quantità quasi eguale a quella perfusa, in un caso (esperienza n. 2) in proporzione del 56,5 % ed in due casi (esperienze n. 3 e n. 4) in misura superiore a quella iniettata endovena.

(7) C. LOMBROSO jr., « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », XXV, 868-870 (1949).

(8) Nelle esperienze n. 1 e n. 3 si è usato, come emulsionante, l'asolectina secondo le indicazioni di C. Lombroso jr. (7), nelle esperienze n. 2 e n. 4 caseina in proporzione dell'1,5 % e nell'esperienza n. 5 uno stearato (fornito dalla S. A. Esperis che non ci ha reso noto la formula) in proporzione dell'1,5 %.

Questi risultati danno anzitutto una documentazione di quanto sia differente il comportamento degli animali normali in confronto agli animali spancreati quando in essi si introducono direttamente in circolo grassi emulsionati: nei primi, tali emulsioni sono perfettamente tollerate e non provocano stearrea; nei secondi invece si nota una grave intolleranza che conduce a morte nel maggior numero dei casi; e nei casi di sopravvivenza si determina una stearrea che giustifica non soltanto le piccole quantità di grasso alimentare, ma anche completamente o quasi il grasso introdotto endovena.

Tralasciando per ora le varie deduzioni, di cui alcune potrebbero essere di grande interesse, che si possono trarre dall'analisi dei nostri dati, ci pare comunque che l'aumento della stearrea osservato nei nostri casi (tale da giustificare come espulso sia il grasso alimentare che il grasso perfuso), dimostri che, se del grasso penetra nell'organismo dell'animale spancreato, anche superando la barriera intestinale, esso non viene facilmente bruciato; ma una quantità pressapoco corrispondente viene espulsa per l'emuntorio intestinale, rivelando così con una nuova disposizione sperimentale che la combustione dei grassi si è profondamente alterata.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *Sur la solution élémentaire de l'équation de la chaleur.* Nota di MIROSLAW KRZYŻAŃSKI, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. La solution élémentaire de l'équation de la chaleur

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

a pour expression

$$(2) \quad U(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}.$$

Elle est continue pour $y \geq 0$, à l'exception de l'origine des coordonnées $O(0, 0)$, et y jouit des propriétés suivantes: 1) $U(x, y) \geq 0$, 2) $U(x, 0) = 0$

pour $x \neq 0$, 3) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) dx = 1$, 4) δ étant un nombre positif arbitraire,

on a $\lim_{y \rightarrow 0} \int_{|x| > \delta} U(x, y) dx = 0$.

La fonction $U(x, y)$ a une interprétation physique bien connue.

Le but du présent travail est de démontrer que $U(x, y)$ est la seule solution de l'équation (1), régulière (1) dans l'ensemble $\gamma(h)$ des points de la région

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

(1) C'est à dire, continue dans l'ensemble $\gamma(h)$, de classe $C^{(2)}$ (admettant les dérivées du second ordre continues) à l'intérieur de $\Gamma(h)$ et y satisfaisant à l'équation (1).

illimitée $\Gamma(h)$: $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq h$, le point $O(0, 0)$ excepté, et y satisfaisant aux conditions

$$1^\circ \quad u(x, y) \geq 0,$$

$$2^\circ \quad u(x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \neq 0,$$

$$3^\circ \text{ l'intégrale } j(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) dx \text{ est bornée pour } 0 \leq y \leq h \text{ et l'on}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} j(y) = 1.$$

Nous allons voir que c'est une conséquence de trois théorèmes, démontrés successivement dans la suite.

La région $\Gamma(h)$ peut devenir en particulier (pour $h = \infty$) le demi-plan $y \geq 0$.

2. Je commence par démontrer un théorème qui met en évidence le rapport entre le problème traité et celui de l'unicité des solutions de l'équation (1) bornées et continues dans la région $\Gamma(h)$, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, situé sur la caractéristique $y = 0$.

THÉORÈME I. — Soit $u(x, y)$ une solution de l'équation (1) régulière dans $\gamma(h)$ et y satisfaisant aux conditions 1° , 3° et à la condition

$$(M) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \int_{|x| > \delta} u(x, y) dx = 0,$$

pour tout $\delta > 0$.

Alors $u(x, y) = U(x, y)$ partout dans $\gamma(h)$.

Démonstration. Posons

$$\mathfrak{J}(x, y, X) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^X u(x-s, y) ds \quad (X > 0).$$

Cette intégrale est non négative. Considérée comme fonction de x et y , elle satisfait à l'équation (1) à l'intérieur de $\Gamma(h)$. En vertu de l'hypothèse 3° , elle y est bornée. Elle est continue sur la caractéristique $y = 0$, à l'exception des points aux abscisses $x = 0$ et $x = X$ et satisfait à la condition initiale

$$(3) \quad \mathfrak{J}(x, 0, X) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \text{ et } x > X, \\ 1 & \text{pour } 0 < x < X. \end{cases}$$

En effet, on a

$$(4) \quad \mathfrak{J}(x, y, X) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x-X}^x u(\xi, y) d\xi;$$

cette intégrale peut encore s'écrire

$$(5) \quad \mathfrak{J}(x, y, X) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, y) d\xi - \int_{-\infty}^{x-X} u(\xi, y) d\xi - \int_x^{+\infty} u(\xi, y) d\xi \right].$$

Si $x > X$, c'est à dire $0 < x - X < x$, on a, selon (4) et (M),

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mathfrak{J}(x, y, X) \leq \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x-X}^{+\infty} u(\xi, y) d\xi = 0.$$

De même, si $x < 0$, on a

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mathfrak{J}(x, y, X) \leq \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x u(\xi, y) d\xi = 0.$$

Enfin, si $0 < x < X$, c'est à dire $x - X < 0$ et $x > 0$, la première intégrale au second membre de (5) tend vers $2\sqrt{\pi}$ et les deux autres tendent vers 0; on a donc

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mathfrak{J}(x, y, X) = 1.$$

Or, dans la classe de fonctions bornées, l'équation (1) admet une solution au plus, satisfaisant aux conditions initiales (3)⁽²⁾. Cette solution s'exprime par l'intégrale de Weierstrass

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^x U(x-s, y) ds.$$

On établit ainsi l'égalité

$$\int_0^x u(x-s, y) ds = \int_0^x U(x-s, y) ds.$$

En effectuant la dérivation par rapport à X , on trouve

$$u(x-X, y) = U(x-X, y) \quad \text{pour} \quad 0 < y < h.$$

En posant $X = 0$ et en tenant compte de la continuité de $u(x, y)$ dans $\gamma(h)$, on a finalement

$$u(x, y) = U(x, y) \quad \text{partout dans } \gamma(h).$$

3. Il nous reste de remplacer dans le théorème I. l'hypothèse (M) par l'hypothèse 2° du n. 1. À cet effet il suffit de démontrer qu'une solution de l'équation (1), satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3°, satisfait aussi à la condition (M). Nous le ferons ultérieurement. Nous commençons par démontrer qu'une solution de (1) régulière, non négative dans une demi-région \mathcal{C} , détachée de $\Gamma(h)$ par une droite

(2) J'ai démontré récemment que dans la classe de fonctions bornées l'équation linéaire du type parabolique, à deux variables indépendantes, dont les coefficients satisfont à certaines conditions de régularité, admet une solution au plus, régulière dans la région illimitée Γ , sauf aux points d'un ensemble E de mesure nulle, situé sur la caractéristique inférieure $y = 0$, et se réduisant à une fonction donnée pour $y = 0$, sauf aux points de E . Voir: M. KRZYŻAŃSKI, *Sur l'équation aux dérivées partielles de la diffusion*. « Annales de la Soc. Polon. de Math. », to. 23 (1950), (sous presse), en particulier, th. IV. Dans le cas actuel l'ensemble E se compose de deux points et on peut, comme l'a fait remarquer M. W. Feller, déduire cette unicité d'un théorème, démontré par lui. Voir: W. FELLER, *Zur Theorie der stochastische Prozesse*. « Math. Annales », Bd. 113 (1936), pp. 113-160.

$x = \alpha$, dont l'intégrale par rapport à x est bornée et qui s'annule pour $y = 0$, est bornée dans \mathcal{C} . On en déduit l'unicité d'une telle solution, lorsqu'elle se réduit à une fonction donnée de y pour $x = \alpha$.

THÉORÈME II. - Une solution de l'équation (1), régulière dans une demi-région $\mathcal{C} : \alpha \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq h$ et y satisfaisant aux conditions 1° $u(x, y) \geq 0$, 2° $u(x, 0) = 0$ pour $x \geq \alpha$, 3° $\int_{\alpha}^{+\infty} u(x, y) dx < \mu$, où $\mu > 0$ est un nombre constant, est bornée dans \mathcal{C} (3).

Démonstration. Soit $\alpha_1 > \alpha$. Supposons pour simplifier les calculs que $\alpha_1 = 0$ (dans le cas contraire on introduit la nouvelle variable indépendante $\bar{x} = x - \alpha_1$).

Soit $P_0(x_0, y_0)$ un point arbitraire de \mathcal{C} , pour lequel $x_0 > 0$. Considérons le rectangle $R : 0 \leq x \leq 2x_0, 0 \leq y \leq y_0$.

D'après la formule bien connue (4), on a

$$(6) \quad u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{y_0} [G'_{\xi}(x_0, y_0; 0, \eta) u(0, \eta) - G'_{\xi}(x_0, y_0; 2x_0, \eta) u(2x_0, \eta)] d\eta,$$

où $G(x, y; \xi, \eta)$ est la fonction de Green relative à l'équation (1) et au rectangle R , et $G'_{\xi}(x, y; \xi, \eta)$ sa dérivée par rapport à ξ . La fonction $G(x, y; \xi, \eta)$ a pour expression (5)

$$G(x, y; \xi, \eta) = U(x - \xi, y - \eta) + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p [U(x_p^{(1)} - \xi, y - \eta) + U(x_p^{(2)} - \xi, y - \eta)],$$

où $\{x_p^{(1)}\}$ et $\{x_p^{(2)}\}$ sont deux suites d'abscisses des points-images successifs, qu'on obtient comme il suit: $(x_1^{(1)}, y)$ est le point-image symétrique de (x, y) par rapport à la droite $\xi = 2x_0$, $(x_2^{(1)}, y)$ celui de $(x_1^{(1)}, y)$ par rapport à la droite $\xi = 0$, $(x_3^{(1)}, y)$ celui de $(x_2^{(1)}, y)$ par rapport à $\xi = 2x_0$, e. c. t.; de même $(x_1^{(2)}, y)$ est le point-image symétrique de (x, y) par rapport à la droite $\xi = 0$, $(x_2^{(2)}, y)$ celui de $(x_1^{(2)}, y)$ par rapport à la droite $\xi = 2x_0$, e. c. t.

Posons

$$V(x, y) = -2U_{\xi}(x, y) = xy^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}}.$$

On a

$$G'_{\xi}(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2} \left\{ V(x - \xi, y - \eta) + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p [V(x_p^{(1)} - \xi, y - \eta) + V(x_p^{(2)} - \xi, y - \eta)] \right\}.$$

(3) L'hypothèse 2° peut être remplacée par celle que $u(x, 0)$ est borné.

(4) Voir par ex. E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Math.*, Paris 1942, t. III, p. 320 (formule (49)).

(5) Voir E. E. LEVI, *Sull'equazione del calore*. « Annali di Math. », ser. 3, t. 14 (1907), pp. 187-264, en particulier pp. 222-226.

Si $x = x_0$, on a

$$\begin{aligned} x_{2q-1}^{(1)} &= (4q-1)x_0, & x_{2q}^{(1)} &= -(4q-1)x_0 & (q=1, 2, \dots), \\ x_{2q+1}^{(2)} &= -(4q+1)x_0, & x_{2q}^{(2)} &= (4q+1)x_0 & (q=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Or, $x \neq 0$ étant fixé, la fonction $|V(x, y)|$ atteint pour $y = \frac{x^2}{6}$ sa borne supérieure égale à $\left(\frac{6}{e}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-2}$. Donc il existe une constante positive K_0 telle que

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} |G'_\xi(x_0, y_0; 0, \eta)| \\ |G'_\xi(x_0, y_0; 2x_0, \eta)| \end{array} \right\} \leq K_0 x_0^{-2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = K x_0^{-2}.$$

La fonction $u(x, y)$ étant supposée non négative, on déduit de (6) et de (7) l'inégalité

$$(8) \quad u(x_0, y_0) \leq K x_0^{-2} \int_0^{y_0} [u(0, \eta) + u(2x_0, \eta)] d\eta.$$

Désignons par M_0 la borne supérieure de $u(0, y)$ pour $0 \leq y \leq h$; on déduit de (9) l'inégalité suivante

$$(9) \quad u(x_0, y_0) \leq K x_0^{-2} \left[M_0 h + \int_0^{y_0} u(2x_0, \eta) d\eta \right].$$

Il nous reste d'évaluer l'intégrale qui figure au second membre de (9). Or

$$u(2x_0, \eta) = u(0, \eta) + \int_0^{2x_0} u'_\xi(\xi, \eta) d\xi,$$

donc

$$(10) \quad \int_0^{y_0} u(2x_0, \eta) d\eta = \int_0^{y_0} u(0, \eta) d\eta + \int_0^{y_0} d\xi \int_0^{2x_0} u'_\xi(\xi, \eta) d\eta.$$

Comme $u(x, 0) = 0$, on a d'après une formule classique (6)

$$(11) \quad \int_0^{y_0} u'_\xi(\xi, \eta) d\eta = \int_0^{y_0} u'_\xi(0, \eta) d\eta + \int_0^\xi u(s, y_0) ds,$$

où $\int_0^\xi u(s, y_0) ds < \mu$ d'après l'hypothèse 3°.

Soit M_1 la borne supérieure de $u'_\xi(0, \eta)$ pour $0 \leq \eta \leq h$ (7). On déduit de (10) et (11) la limitation

$$(12) \quad \int_0^{y_0} u(2x_0, \eta) d\eta \leq (M_0 + 2M_1 x_0) h + 2\mu x_0.$$

(6) Voir E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Math.*, III, p. 309, formule (31).

(7) $u'_\xi(0, y)$ est bornée, puisque $u(x, 0) = 0$. Voir M. GEVREY, *Sur les équations du type parabolique*. « Journ. de Math. pures et appl. », ser. 6, vol. 9, p. 331, n. 5* (1913).

Les inégalités (9) et (12) permettent d'établir la limitation pour $u(x_0, y_0)$, à savoir

$$(13) \quad u(x_0, y_0) \leq 2Kx_0^{-2} [(M_0 + M_1 x_0)h + \mu x_0].$$

Le point (x_0, y_0) étant un point de \mathcal{C} tel que $x_0 > \alpha_1 = 0$ et d'ailleurs arbitraire, l'inégalité (13) montre que la fonction continue $u(x, y)$ est bornée dans \mathcal{C} .

4. Avant de passer au théorème annoncé au n. 3, nous démontrerons le lemme suivant:

LEMME. - Soit $u(x, y)$ une solution de l'équation (1) régulière dans la demi-région \mathcal{C} (voir th. II) et y satisfaisant aux hypothèses du théorème II. Alors à tout $\lambda > \alpha$ on peut faire correspondre un nombre $\bar{y}(\lambda) > 0$ tel que $u(x, y)$ soit, pour $x \geq \lambda$, une fonction croissante de y dans l'intervalle $0 \leq y \leq \bar{y}(\lambda)$.

Démonstration. - La fonction $u(x, y)$ est (en vertu du th. II) bornée dans \mathcal{C} . Dans la classe de fonctions continues et bornées dans \mathcal{C} c'est la solution unique de (1) régulière dans \mathcal{C} , s'annulant pour $y = 0$ et se réduisant à $\psi(y) = u(\alpha, y)$ pour $x = \alpha$ ⁽⁸⁾. Une telle solution peut être mise sous la forme de l'intégrale analogue au potentiel de double couche ⁽⁹⁾

$$(14) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y V(x - \alpha, y - \eta) u(\alpha, \eta) d\eta.$$

En effet, l'intégrale au second membre de (14) satisfait à l'équation (1) à l'intérieur de \mathcal{C} ; elle est continue pour $x > \alpha$, $0 \leq y \leq h$, et tend vers 0 avec y . Elle est aussi continue au point $(\alpha, 0)$, car τ étant choisi de façon que l'on ait $u(\alpha, y) < \varepsilon$ pour $y < \tau$, on a

$$\int_0^y V(x - \alpha, y - \eta) u(\alpha, \eta) d\eta < \varepsilon \int_0^y V(x - \alpha, y - \eta) d\eta = 4\varepsilon \int_{\frac{x-\alpha}{2\sqrt{y}}}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma < 2\varepsilon\sqrt{\pi}.$$

Cette intégrale tend vers $u(\alpha, y)$ lorsque $x \rightarrow \alpha$.

Or $x > \alpha$ et $\eta \geq 0$ étant fixés, $V(x - \alpha, y - \eta)$ est une fonction croissante de y pour $0 \leq y - \eta \leq \frac{(x - \alpha)^2}{6}$ et à fortiori pour $0 \leq \eta \leq y \leq \frac{(x - \alpha)^2}{6}$.

Soit $\lambda > \alpha$ arbitraire et $\bar{y}(\lambda) = \min. \left[h, \frac{(\lambda - \alpha)^2}{6} \right]$. On a $0 < V(x - \alpha, y_1 - \eta) < V(x - \alpha, y_2 - \eta)$ pour $x > \lambda$, $0 \leq \eta \leq y_1 < y_2 \leq \bar{y}(\lambda)$, et à fortiori, en vertu de (14)

$$u(x, y_1) < u(x, y_2) \text{ pour } x > \lambda, 0 \leq y_1 < y_2 \leq \bar{y}(\lambda).$$

Le lemme est ainsi démontré.

(8) Cette unicité a lieu dans la classe plus étendue de fonctions. Voir E. HOLMGREN, *Sur les solutions quasianalytiques de l'équation de la chaleur*. « Arkiv för Math., Astron. och Fys. », 18 (1924); M. PICONE, *Sul problema della propagazione del calore...* « Math. Annalen », to. 10, 701-712 (1929); A. TYCHONOFF, *Théorème d'unicité pour l'équation de la chaleur*. « Recueil Math. Moscou », 42, 199-215 (1935); M. NICOLESCO, *Sur l'équation de la chaleur*. « Comm. Math. Helv. », 10, 3-17 (1927); S. TÄCKLIND, *Sur le classes quasianalyt. des solutions des équations aux dérivées partielles du type parabolique*. « Nova Acta Reg. Soc. Sc. Upsal. », ser. IV, vol. 10, n. 3 (1936).

(9) E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Math.*, III, p. 302 (n. 544).

THÉOREME III. — Une solution $u(x, y)$ de l'équation (1) régulière dans $\gamma(h)$ et y satisfaisant aux conditions 1°, 2° et 3° (voir n. 1), satisfait aussi à la condition (M) (n. 2).

Démonstration. Il suffit de démontrer que

$$(15) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} u(x, y) dx = 0$$

pour $\delta > 0$ arbitraire, car la propriété analogue de l'intégrale $\int_{-\infty}^{-\delta} u(x, y) dx$ s'établit de même.

Or, en vertu de l'hypothèse 3°, l'intégrale $j(y)$ (voir n. 1) est convergente pour $0 \leq y \leq h$, donc l'intégrale $\int_{\delta}^{\infty} u(x, y) dx$ l'est aussi. Choisissons un nombre positif $\delta' < \delta$. D'après le lemme qui vient d'être démontré, appliqué à la demi-région $\delta' \leq x < \infty, 0 \leq y \leq h$, on peut déterminer un nombre positif $\bar{y}(\delta) \leq h$, tel que $u(x, y)$ soit une fonction croissante de y pour $x > \delta, 0 \leq y \leq \bar{y}(\delta)$. Or, ε étant un nombre positif arbitraire, choisissons un nombre $\nu > \delta$ de façon que l'on ait

$$\int_{\nu}^{\infty} u(x, \bar{y}) dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $u(x, y) < u(x, \bar{y})$ pour $0 < y < \bar{y}(\delta)$, on a

$$\int_{\nu}^{\infty} u(x, y) dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } 0 < y < \bar{y}(\delta).$$

Quant à l'intégrale étendue à l'intervalle $< \delta, \nu >$, on peut choisir (en vertu de l'hypothèse 2° un nombre $\omega > 0$ de façon que l'on ait

$$u(x, y) < \frac{\varepsilon}{2(\nu - \delta)} \quad \text{pour } \delta \leq x \leq \nu, 0 \leq y \leq \omega.$$

Posons $\tau = \min. [\omega, \bar{y}(\delta)]$. On a

$$\int_{\delta}^{\infty} u(x, y) dx < \varepsilon \quad \text{pour } 0 < y < \tau,$$

c'est à dire (15).

5. Des théorèmes I et III on peut déduire maintenant le théorème capital de la note, qui a été annoncé au n. 1.

THÉOREME IV. — La solution élémentaire $U(x, y)$ est la seule solution de l'équation (1), régulière dans $\gamma(h)$ et y satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3°.

Démonstration. D'après le théorème III, une solution de l'équation (1), régulière dans $\gamma(h)$ et y satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3°, satisfait aussi à la condition (M). Il suit du théorème I qu'une telle solution est identique à $U(x, y)$.

Analisi matematica. — *Relazione integrale di trasformazione dei polinomi ultrasferici in quelli di Laguerre.* Nota di LETTERIO TOSCANO presentata (*) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. Dati i polinomi ultrasferici

$$V_n^{(s)}(x) = (-1)^n \frac{(s, n)}{n!} F\left(-n, s+n; \frac{s+1}{2}; \frac{x+1}{2}\right)$$

e quelli di Laguerre

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1, n)}{n!} {}_1F_1(-n; \alpha+1; x),$$

mi propongo di stabilire la nuova relazione integrale ($\alpha > -1/2$)

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(\alpha+1/2, n)} \int_0^\infty e^{-z} \frac{(x+z)^n}{\sqrt{z}} V_{2n}^{(2\alpha+1)}\left(\sqrt{\frac{z}{x+z}}\right) dz$$

o l'equivalente

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{2x^{n+1/2}}{\sqrt{\pi}(\alpha+1/2, n)} \int_0^{\pi/2} e^{-x \operatorname{ctg}^2 \theta} \frac{V_{2n}^{(2\alpha+1)}(\cos \theta)}{\sin^{2n+2} \theta} d\theta.$$

Queste relazioni si possono specializzare per i polinomi di Hermite, e nell'insieme rientrano tra quelle che stabiliscono il passaggio tra polinomi di Iacobi, Laguerre, Hermite (1).

2. Introdotti i polinomi di Hermite con le formule

$$H_{2n}(\sqrt{2x}) = (-2)^n n! L_n^{(-1/2)}(x)$$

$$H_{2n+1}(\sqrt{2x}) = (-2)^n n! \sqrt{2x} L_n^{(1/2)}(x),$$

prendiamo le mosse dalla relazione integrale di Uspensky ($\alpha > -1/2$)

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-2)^n \Gamma(\alpha+n+1)}{\sqrt{\pi} (2n)! \Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^\pi H_{2n}(\sqrt{2x} \cos \varphi) \sin^{2\alpha} \varphi d\varphi.$$

E esprimiamo i polinomi di Hermite che in essa compaiono con l'altra relazione integrale (2)

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} (x_1^n + x_2^n) dt$$

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

(1) G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, P. II; G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*; 2ª ed., Bologna, 1946; G. SZEGÖ, *Orthogonal polynomials*, New York, 1939; E. FELDHEIM, *Relations entre les polynomes de Iacobi, Laguerre et Hermite* « Acta Mathematica », vol. 75, pp. 117-138 (1942).

(2) N. NIELSEN, *Recherches sur les polynomes d'Hermite*. « Det Kgl. Danske Videnskabernes, Selskab, Mathematisk-fysiske Meddelelser », I, 6 (1918).

essendo

$$x_1 = x + it\sqrt{2}$$

$$x_2 = x - it\sqrt{2}.$$

Si ha

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-2)^n \Gamma(\alpha + n + 1)}{\pi (2n)! \Gamma(\alpha + 1/2)} \int_0^\infty e^{-t^2} \left[\int_0^\pi (y_1^{2n} + y_2^{2n}) \sin^2 \alpha \varphi \, d\varphi \right] dt$$

con

$$y_1 = (\sqrt{x} \cos \varphi + it)\sqrt{2}$$

$$y_2 = (\sqrt{x} \cos \varphi - it)\sqrt{2}.$$

Da queste posizioni segue

$$y_1^{2n} + y_2^{2n} = 2^{n+1} \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} \binom{2n}{2r} (\sqrt{x} \cos \varphi)^{2r} t^{2n-2r},$$

e per il precedente integrale I tra parentesi quadre si ha

$$I = 2^{n+1} \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} \binom{2n}{2r} x^r t^{2n-2r} \int_0^\pi \sin^2 \alpha \varphi \cos^{2r} \varphi \, d\varphi.$$

Ma

$$\int_0^\pi \sin^2 \alpha \varphi \cos^{2r} \varphi \, d\varphi = \frac{\Gamma(\alpha + 1/2) \Gamma(r + 1/2)}{\Gamma(\alpha + r + 1)}$$

e quindi

$$I = 2^{n+1} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) (-t^2)^n \sum_{r=0}^n \binom{2n}{2r} \frac{\Gamma(r + 1/2)}{\Gamma(\alpha + r + 1)} \left(\frac{-x}{t^2}\right)^r.$$

Successivamente, poichè

$$\binom{2n}{2r} = \frac{2^{2r}}{(2r)!} (-n, r) \left(-n + \frac{1}{2}, r\right)$$

$$\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2r)}{2^{2r-1} \Gamma(r)} = \frac{\sqrt{\pi} (2r)!}{2^{2r} r!},$$

segue

$$I = \frac{\sqrt{\pi} 2^{n+1} \Gamma(\alpha + 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1)} (-t^2)^n \sum_{r=0}^n \frac{(-n, r) (-n + 1/2, r)}{(\alpha + 1, r) r!} \left(\frac{-x}{t^2}\right)^r,$$

e con il simbolo F di funzione ipergeometrica di Gauss si ha ancora

$$I = \frac{\sqrt{\pi} 2^{n+1} \Gamma(\alpha + 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1)} (-t^2)^n F\left(-n, -n + \frac{1}{2}; \alpha + 1; \frac{-x}{t^2}\right).$$

D'altra parte per la prima formula di trasformazione di Eulero si ha

$$F\left(-n, -n + \frac{1}{2}; \alpha + 1; \frac{-x}{t^2}\right) = \left(1 + \frac{x}{t^2}\right)^n F\left(-n, \alpha + n + 1; \alpha + 1; \frac{x}{x + t^2}\right);$$

e l'altra ⁽³⁾

$$F\left(\alpha, \beta; \frac{\alpha + \beta + 1}{2}; u\right) = F\left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}; \frac{\alpha + \beta + 1}{2}; 4u(1-u)\right]$$

per $\alpha = -2n$, $\beta = s + 2n$, $2u = y + 1$, ci dà

$$F\left(-2n, s + 2n; \frac{s+1}{2}; \frac{y+1}{2}\right) = F\left(-n, \frac{s}{2} + n; \frac{s+1}{2}; 1-y^2\right)$$

ovvero

$$F\left(-n, \frac{s}{2} + n; \frac{s+1}{2}; 1-y^2\right) = \frac{(2n)!}{(s, 2n)} V_{2n}^{(s)}(y).$$

Allora

$$F\left(-n, -n + \frac{1}{2}; \alpha + 1; \frac{-x}{t^2}\right) = \frac{(2n)!}{(2\alpha + 1, 2n)} \left(1 + \frac{x}{t^2}\right)^n V_{2n}^{(2\alpha+1)}\left(\sqrt{\frac{t^2}{x+t^2}}\right)$$

e

$$I = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} 2^{n+1} (2n)! \Gamma(\alpha + 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1) (2\alpha + 1, 2n)} (x + t^2)^n V_{2n}^{(2\alpha+1)}\left(\sqrt{\frac{t^2}{x+t^2}}\right).$$

Risalendo alla relazione integrale, ponendo $t^2 = z$ e osservando che

$$\frac{(2\alpha + 1, 2n)}{2^{2n}(\alpha + 1, n)} = \left(\alpha + \frac{1}{2}, n\right)$$

si conclude ($\alpha > -1/2$)

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(\alpha + 1/2, n)} \int_0^\infty e^{-z} \frac{(x+z)^n}{\sqrt{z}} V_{2n}^{(2\alpha+1)}\left(\sqrt{\frac{z}{x+z}}\right) dz.$$

Posto $z = x \operatorname{ctg}^2 \theta$ si ha

$$\frac{z}{x+z} = \cos^2 \theta$$

$$x+z = \frac{x}{\sin^2 \theta}$$

$$dz = -\frac{2x \cos \theta}{\sin^3 \theta} d\theta,$$

e la precedente relazione integrale assume la forma

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{2x^{n+1/2}}{\sqrt{\pi}(\alpha + 1/2, n)} \int_0^{\pi/2} e^{-x \operatorname{ctg}^2 \theta} \frac{V_{2n}^{(2\alpha+1)}(\cos \theta)}{\sin^{2n+2} \theta} d\theta.$$

Per $\alpha = 0$, con i polinomi di Legendre

$$P_n(x) = V_n^{(1)}(x),$$

si ha

$$L_n(x) = \frac{2x^{n+1/2}}{\Gamma(n+1/2)} \int_0^{\pi/2} e^{-x \operatorname{ctg}^2 \theta} \frac{P_{2n}(\cos \theta)}{\sin^{2n+2} \theta} d\theta.$$

(3) E. GOURSAT, *Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique*. «Annales scientifiques de l'École normale supérieure», ser. 2, to. X (supplément). pp. 3-142 (1881).

Geometria. — *Surfaces canoniques quadruples.* Nota di POL BURNIAT, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

Demeurée conjecturale jusqu'en 1932, l'existence des surfaces canoniques r -uples, $r > 2$, de genre $p_g \geq 4$ (surfaces dont le système canonique pur est irréductible, ∞^3 au moins et composé avec une involution d'ordre r) a été mise en évidence par B. Segre grâce à la construction de deux modèles projectifs de genre $p_g = 4$, pour $r = 3$ et $r = 4$ (1).

Bronowsky, en 1936, présente d'autre modèles pour $r = 3$ et $p_g = 5$ (2).

G. Pompili, en 1941, présente les trois modèles de surfaces canoniques triples de support rationnel ($p_g = 3, 4, 5$). Par une voie différente, en l'absence de toute information (la guerre), nous avons retrouvé les mêmes modèles (3), (4).

Reprenant la question, nous avons prouvé l'existence des surfaces canoniques quadruples pour toute valeur du genre p_g (5).

Toutes les surfaces canoniques mentionnées étaient régulières.

Dans cette Note, nous exposons un moyen simple de construire des modèles des surfaces équivalentes à des surfaces canoniques quadruples, régulières ou non, dont l'involution I_4 d'ordre 4 est elle-même composée avec une involution I_2 d'ordre deux. Nous illustrons le procédé par la construction de modèles concrets pour toute valeur de p_g et toute valeur de l'irrégularité.

1. Rappelons, en les adaptant à notre usage, quelques éléments de la théorie des surfaces doubles en même temps que quelques unes de leurs conséquences immédiates (6).

Désignons par F_2 une surface algébrique irréductible porteuse d'une involution I_2 d'ordre deux. Soit F_1 une surface image de F_2 . Le couple de points conjugués générique de I_2 fournit les deux déterminations d'une fonction algébrique bivalente du point générique de F_1 . Si D_1 est la courbe de diramation de cette fonction sur F_1 , on dit que F_2 est birationnellement identique à une surface double de support F_1 et de courbe de diramation D_1 . Pour rappeler cet ensemble de choses, nous écrirons simplement $F_2 = 2 F_1 (D_1)$.

Représentons par $|A|$ un système linéaire complet de courbes A de F_1 , par $|A|^\circ$ et A° le système de courbes et la courbe de F_2 , composés avec I_2 , dont $|A|$ et A sont les images respectives sur F_1 . Si le système $|A|^\circ$ de F_2 n'épuise pas le système complet linéaire $|A^\circ|$, celui-ci est la combinaison linéaire de $|A|^\circ$ et du système à courbe fixe $U_2 + |B|^\circ$, si U_2 est la courbe des points unis de I_2 et si l'on a $A^\circ \equiv U_2 + B^\circ$. Cette relation entraîne l'équivalence $2 U_2 \equiv 2 (A^\circ - B^\circ)$

(*) Nella seduta dell' 11 febbraio 1950.

(1) « Rend. dei Lincei », pp. 318-320 (1932).

(2) « Proc. Cambridge Phil. Soc. », pp. 366-372.

(3) « Rend. Ist. Lombardo », 1941.

(4) « Bull. Acad. royale Belgique », pp. 522-534 (1945).

(5) « Bull. Acad. royale Belgique », pp. 489-507.

(6) Pour les plans doubles, voir, par exemple, F. ENRIQUES, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, Padova, Cedan, 1932.

qui induit sur F_1 l'équivalence $D_1 \equiv 2(A - B)$. Toute courbe $d_1 \equiv A - B$ est donc - sur F_1 - une moitié linéaire de D_1 et donne lieu - sur F_2 - à la relation

$$d_1^0 \equiv A^0 - B^0 \equiv U_2.$$

De là (7):

I. Pour que le système linéaire complet et effectif de courbes $|A_2|$ de F_2 soit composé avec I_2 , il faut et il suffit:

1°. qu'il contienne quelque courbe $A^0 \equiv A_2$ unie dans I_2 ;

2°. que le système linéaire $|A - d_1|$ de F_1 ne soit pas effectif.

Désignons par $|K_2|$ et $|K_1|$ les systèmes canoniques impurs, effectifs ou non de F_2 et F_1 .

En vertu de ce qui précède, un théorème bien connu de Zeuthen-Castelnuovo étendu par Enriques aux surfaces⁽⁸⁾ fournit les relations

$$K_2 \equiv K_1^0 + U_2 \equiv K_1^0 + d_1^0 \equiv (K_1 + d_1)^0 \equiv (d_1')^0.$$

Par conséquent:

II. Pour que le système canonique $|K_2|$ de F_2 soit effectif et composé avec l'involution I_2 , il faut et il suffit que le système canonique $|K_1|$ de F_1 soit virtuel (F_1 de genre $p_g = 0$) et que l'adjoint $|d_1'|$ de d_1 soit effectif.

III. Pour que F_2 soit de genre géométrique nul, il faut et il suffit que F_1 soit de genre géométrique nul et que d_1 ne possède pas d'adjoint effectif.

Il est entendu, une fois pour toutes, que les courbes de diramation dont nous parlons doivent être comprises en leur sens invariant et que les courbes telles que d_1 représentent des moitiés linéaires de ces courbes invariantes.

2. Considérons maintenant une surface F_2 birationnellement identique à une surface canonique quadruple $4F_0$, de support F_0 , de genre $p_g \geq 4$. F_2 porte une involution $I_{4,2}$ d'ordre 4, birationnellement identique à F_0 , et avec laquelle son système canonique impur $|K_2|$ est composé. Le système canonique pur de F_2 , à cause de l'hypothèse, est irréductible et ∞^3 au moins.

Nous nous proposons de décrire un mode de construction de celles de ces surfaces F_2 dont l'involution $I_{4,2}$ d'ordre 4 est composée avec une involution $I_{2,2}$ d'ordre deux. À cette fin, nous allons caractériser des représentants projectifs de pareilles surfaces.

Désignons par F_1 une surface image de l'involution $I_{2,2}$ de F_2 . Nous pourrions écrire $F_2 = 2F_1(D_1)$, D_1 courbe de diramation convenable.

Sur F_1 , $I_{4,2}$ induit une involution $I_{2,1}$ - d'ordre deux - possédant la même image F_0 que $I_{4,2}$: deux points de F_1 conjugués dans $I_{2,1}$ sont les images de deux couples de points de $I_{2,2}$ conjugués dans $I_{4,2}$. Nous aurons donc encore $F_1 = 2F_0(\Delta_0)$, Δ_0 étant une courbe de diramation convenable.

Nous représenterons par d_1 et δ_0 des moitiés linéaires sur F_1 et F_0 de D_1 et Δ_0 , définies selon le mode indiqué au n. 1.

(7) Sous une forme légèrement différente, voir (8). PAUL LIBOIS, *Sur une classe de plans quadruples (abéliens)*, Duculot Gembloux, 1936.

(8) F. ENRIQUES, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*. «Memorie della R. Accad. Torino», 1893; *Sulle superficie algebriche*. «Rend. Circolo Mat. Palermo», 1905; F. SEVERI, *Sulle relazioni che leggano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*. «Rend. Ist. Lombardo», pp. 495-511 (1903).

À cause des hypothèses faites au sujet de F_2 , on voit d'abord que le système canonique $|K_2|$ est composé avec $I_{2,2}$. Il en est ainsi si, et seulement si, F_1 est de genre géométrique zéro (n. 1, II). Il résulte de là que F_0 est aussi de genre géométrique nul et que δ_0 manque d'adjoint effectif (n. 1, III).

Supposons ces conditions réalisées. Avec $K_{2,1}$ courbe image d'une courbe K_2 sur F_1 , on aura

$$|K_2| = |K_{2,1}|^0 = |K_1 + d_1|^0,$$

et, par suite, à cause de la relation $K_1 \equiv K_0^0 + \delta_0^0$ valable sur F_1 (n. 1),

$$K_{2,1} \equiv K_0^0 + \delta_0^0 + d_1.$$

Maintenant, à cause de l'hypothèse encore, le système $|K_2|$ est composé avec $I_{4,2}$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $|K_{2,1}|$ le soit avec $I_{2,1}$, c'est-à-dire (n. 1, I):

1° qu'existe quelque courbe δ_1 de F_0 telle que $\delta_1^0 \equiv d_1$ (sur F_1) ce qui permet d'écrire

$$K_{2,1} \equiv K_0^0 + \delta_0^0 + \delta_1^0 \equiv (K_0 + \delta_0 + \delta_1)^0 \equiv (K_{2,0})^0 \quad (\text{sur } F_1);$$

2° que le système

$$|K_{2,0} - \delta_0| = |K_0 + \delta_1| = |\delta_1|$$

ne soit pas effectif (sur F_0).

Enfin, pour que le système canonique pur de F_2 soit irréductible et ∞^3 au moins, il faut et il suffit que le système image de $|K_2|$ sur F_0 ,

$$|K_{2,0}| = |K_0 + \delta_0 + \delta_1| = |(\delta_0 + \delta_1)'|,$$

adjoint de la courbe $\delta_0 + \delta_1$, soit irréductible à ses composants fixes près et ∞^3 au moins.

Si $2\delta_1 \equiv \Delta_1$ (sur F_0), on a aussi $\Delta_1^0 \equiv D_1$ (sur F_1) et la courbe Δ_1 , image d'une courbe Δ_1^0 équivalente à la courbe de diramation invariante D_1 , se comporte sur F_0 comme la courbe de diramation invariante d'une surface double $2F_0$.

Cela noté, nous pouvons résumer comme suit ce qui précède.

La construction de surfaces F_2 birationnellement identiques aux surfaces canoniques quadruples de genre géométrique $p_g \geq 4$, dont l'involution d'ordre 4 est composée avec une involution d'ordre 2, revient, sur une surface F_0 de genre $p_g = 0$, à la construction de deux courbes de diramation Δ_0 et Δ_1 de surfaces doubles $2F_0$ satisfaisant aux conditions:

1° les moitiés linéaires δ_0 et δ_1 de Δ_0 et Δ_1 (définies comme au n. 1) sont dénuées d'adjoint effectif;

2° l'adjoint pur de la courbe $\delta_0 + \delta_1$ est irréductible et ∞^3 au moins. Cet adjoint est l'image du système canonique pur de F_2 .

Si cet adjoint pur coïncide avec l'adjoint et possède la dimension $r - 1$ et le degré n , F_2 possède les genres géométrique et linéaire $p_g = r$ et $p^{(1)} = 4n + 1$.

On voit de suite que les courbes de diramation de deux plan doubles de genre $p_g = 0$ satisfont, en général, à ces conditions et fournissent des surfaces F_2 qui sont des plans quadruples (non canoniques).

3. La construction de la surface F_2 la plus générale associée à une surface F_0 et à deux courbes Δ_0 et Δ_1 données, résulte immédiatement de ce qui précède.

On commence par construire une surface $F_1 = 2 F_0(\Delta_0)$. Sur F_1 , on construit ensuite le système complet $|D_1| = |\Delta_1^0|$. Si D_1 est la courbe générique de ce système, toute surface $F_2 = 2 F_1(D_1)$ répond à la question.

4. Si F_0 est rationnelle, prenons, pour la représenter, le plan $\chi_0 = \chi_1 = 0$ de l'espace cartésien (x, y, χ_0, χ_1) . Sur le plan F_0 , soient $\Delta_0(x, y) = 0$, $\Delta_1(x, y) = 0$, $\Delta_2(x, y) = 0$ les équations de Δ_0 et des systèmes complets $|\Delta_1|, |\Delta_2| = |\Delta_1 - \delta_0|$. La surface d'équations

$$\chi_1 = 0 \quad , \quad \chi_0 \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{\Delta_0}$$

sera un modèle de surface F_1 associée à ces données. Sur F_1 , le système complet $|D_1| = |\Delta_1^0|$ aura l'équation

$$D_1(x, y, \chi) \equiv a\chi_0 \Delta_2 + b\Delta_1 = 0,$$

a et b étant des paramètres arbitraires. Il faudra faire $\Delta_2 \equiv 0$ si le système $|\Delta_2|$ n'est pas effectif.

Les équations

$$\chi_0 = \sqrt{\Delta_0} \quad , \quad \chi_1 = \sqrt{D_1}$$

fournissent un modèle de la surface F_2 la plus générale associée au plan F_0 et aux courbes Δ_0 et Δ_1 .

Pour $ab \neq 0, \Delta_2 \not\equiv 0$, nous dirons cette surface « bicarrée ». Si l'on fait $a = 0$ ou $b = 0$, cette surface se particularise pour devenir abélienne ou cyclique.

Pour $\Delta_2 \equiv 0$, F_2 est nécessairement abélienne, car ses équations sont

$$\chi_0 = \sqrt{\Delta_0} \quad , \quad \chi_1 = \sqrt{\Delta_1}.$$

Ces dernières conclusions restent valable si F_0 n'est pas rationnelle.

5. En application de ce qui précède, on peut dire, par exemple :

Les surfaces F_2 construites à partir d'un plan F_0 et du couple de courbes,

$$\begin{aligned} & C_4, C_{2r+2}(O^{2r}) \quad \text{ou} \quad C_6(O^2, O_1') \quad , \quad C_{2r+2}(O^{2r}, O_1^2) \\ & \quad \text{ou} \quad C_{2s+2}(A^{2s}) \quad , \quad C_{2r+2}(B^{2r}) \quad \quad \quad r \geq 2, s \geq 2, \end{aligned}$$

où O_1 est infiniment voisin de O , sont birationnellement identiques à des surfaces canoniques quadruples régulières de genres

$$\begin{aligned} & p_g = 2r + 1, p^{(1)} = 8r + 3 \quad \text{ou} \quad p_g = 2r \quad , \quad p^{(1)} = 8r - 7 \\ & \quad \text{ou} \quad p_g = (r + 1)(s + 1) - 1 \quad , \quad p^{(1)} = 8rs - 3. \end{aligned}$$

Les surfaces F_2 des deux premiers types sont bicarrées, les dernières sont nécessairement abéliennes.

En effet, les couples de courbes δ_0 et δ_1 satisfont bien aux conditions requises au n. 2. Les systèmes $|K_{2,0}|$ correspondants

$$|C_r(O^{r-1})| \quad , \quad |C_r(O^{r-1}, O_1)| \quad , \quad |C_{r+s-1}(A^{s-1}, B^{r-1})|,$$

ont les dimensions et les degrés respectifs

$$2r \text{ et } 2r - 1 \quad , \quad 2r - 1 \text{ et } 2r - 2 \quad , \quad (r + 1)(s + 1) - 2 \text{ et } 2rs - 1.$$

Les surfaces F_1 associées à ces données sont rationnelles ⁽⁶⁾. Sur ces surfaces, la courbe de diramation $D_1 \equiv \Delta_1^0$ n'est pas composée avec les courbes d'un faisceau. Les surfaces $F_2 = 2 F_1 (D_1)$ correspondantes sont donc régulières.

Enfin, le système $|\Delta_2|$ n'est pas effectif dans le dernier cas seulement.

Montrons encore que

Les surfaces F_2 qui correspondent aux courbes

$$\Delta_1 = C_{2s+2}(A^{2s+2}) \quad , \quad \Delta_0 = C_{2r+2}(B^{2r}) \quad s \geq 1, r \geq 2,$$

sont birationnellement identiques à des surfaces canoniques quadruples abéliennes d'irrégularité s et de genres

$$p_g = r(s+1) \quad , \quad p_a = p_g - s \quad , \quad p^{(1)} = 8s(r-1) + 1.$$

En effet, le système $|\Delta_2|$ n'est pas effectif, δ_0 et δ_1 manquent d'adjoint effectif, $|K_{2,0}| = |C_{r+s-1}(A^s, B^{r-1})|$ a dimension $r(s+1)-1$ et degré $2s(r-1)$.

Enfin, sur la surface rationnelle F_1 ⁽⁶⁾, Δ_1^0 est composé avec $2s+2$ courbes du faisceau dont l'image est le faisceau des droites par A . F_2 est donc d'irrégularité s ⁽⁹⁾.

Les surfaces F_2 correspondant aux courbes $\Delta_0 = C_{2s+2}(A^{2s+2})$ et $\Delta_1 = C_{2r+2}(B^{2r+2})$ $r \geq 2, s \geq 2$ sont birationnellement identiques à des surfaces canoniques irrégulières de genres

$$p_g = rs \quad , \quad p_a = p_g - (r+s) \quad , \quad p^{(1)} = 8(r-1)(s-1) + 1.$$

Elles représentent les couples de points de deux courbes hyperelliptiques de genres respectifs s et r .

Cet énoncé admet une réciproque.

On vérifie de suite que les surfaces en question sont bien du type F_2 , qu'elles sont abéliennes parce que $|\Delta_2|$ n'est pas effectif, qu'elles possèdent bien les genres p_g et $p^{(1)}$ annoncés parce que l'adjoint pur de $\delta_0 + \delta_1$ est le système $|C_{r+s-2}(A^{s-1}, B^{r-1})|$.

F_1 est référible à une réglée R_1 hyperelliptique ⁽⁶⁾ de genre s , car Δ_0 est formée à l'aide de $2s+2$ droites a_0 d'un faisceau. Chaque droite de ce faisceau correspond à deux génératrices de R_1 , à chacune de ces génératrices correspond sur F_2 une courbe a_2 qui décrit un faisceau hyperelliptique de genre s .

Si l'on considère que Δ_0 et Δ_1 jouent actuellement rôles analogues vis-à-vis de F_2 , on voit que cette surface possède aussi un faisceau hyperelliptique de genre r de courbes b_2 , une droite b_0 par B_0 représentant deux de ces courbes.

Puisque les droites a_0 et b_0 sont unisécantes, il en est de même pour les courbes a_2 et b_2 , et F_2 représente bien les couples de points de deux courbes hyperelliptiques de genres s et r .

L'irrégularité de pareille surface est bien connue, elle vaut $r+s$ ⁽¹⁰⁾.

Les réciproque est presque immédiate.

(9) DE FRANCHIS, *Sugli integrali di Picard relativi ad una superficie doppia*. « Rend. Circolo Mat. Palermo », p. 3 (1905).

(10) DE FRANCHIS, *Sulla varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica*. « Rend. Palermo (1903).

Geometria. — *Su una notevole classe di varietà a connessione affine.* Nota di ALDO COSSU, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. Sia A_n una varietà a connessione affine lineare di parametri $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ ($\lambda, \mu, \nu = 1, \dots, n$) e sia $R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ il tensore di curvatura riemanniana di cui è noto il significato geometrico (1). Sono già note inoltre le forme assunte dal tensore $R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ allorché l'incremento subito da ogni vettore controvariante ζ^μ nel trasporto ciclico infinitesimale è rispettivamente parallelo alla giacitura del ciclo o al vettore ζ^μ (2).

Nella presente Nota si determina per $n > 3$ la forma assunta dal tensore di curvatura riemanniana nel caso più generale in cui il suddetto incremento è parallelo alla 3-direzione determinata dal vettore ζ^μ e dalla giacitura del ciclo. Se ne deduce inoltre una condizione necessaria e sufficiente per le A_n proiettivamente piane.

2. Sia P un punto della A_n ($n > 3$), che supporremo per ora a connessione, asimmetrica e $\xi^\lambda, \eta^\omega, \zeta^\nu$ tre vettori indipendenti applicati in P ed appartenenti allo spazio affine tangente in P alla A_n . Affinché il vettore

$$\rho^\nu = R_{\sigma\kappa\tau}^{\cdot\cdot\cdot\nu} \xi^\sigma \eta^\kappa \zeta^\tau$$

sia parallelo alla 3-direzione definita dai suddetti vettori è, come è noto, necessario e sufficiente che sia

$$(1) \quad \rho^{[\alpha} \xi^\beta \eta^\gamma \zeta^{\beta]} = \delta_{\nu\lambda\omega\mu}^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\sigma\kappa\tau}^{\cdot\cdot\cdot\nu} \xi^\sigma \eta^\kappa \zeta^\tau \xi^\lambda \eta^\omega \zeta^\mu = 0 \quad (3).$$

Se la (1) è identicamente soddisfatta, simmettizzando rispetto alle coppie di indici $\sigma\lambda, \kappa\omega, \tau\mu$ e contraendo rispetto a $\beta\lambda, \gamma\omega, \delta\mu$, si ha:

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

(1) Se ζ^μ è un generico vettore controvariante applicato in un punto P della A_n ed appartenente allo spazio affine E_n tangente in P alla A_n , costruito un ciclo infinitesimo di origine P ed appartenente alla giacitura determinata dalle direzioni $dx^\lambda, \delta x^\omega$, l'incremento che ζ^μ subisce nel trasporto ciclico infinitesimale è rappresentato, a meno di infinitesimi superiori al 2° ordine, da $D\zeta^\nu$ ove $\sigma D\zeta^\nu = R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} dx^\lambda \delta x^\omega \zeta^\mu$, essendo σ il rapporto tra l'area racchiusa dal parallelogramma infinitesimo di lati $dx^\lambda, \delta x^\omega$ e quella racchiusa dal supposto ciclo.

Analogamente per un vettore covariante ζ_ν , si avrà $\sigma D\zeta_\mu = R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} dx^\lambda \delta x^\omega \zeta_\nu$. È ovvio che la direzione dell'incremento non varia allorché si sostituiscono alle direzioni $dx^\lambda, \delta x^\omega$ due qualunque vettori controvarianti ξ^λ, η^ω paralleli alla giacitura del ciclo.

(2) Cfr. ad esempio E. BORTOLOTTI, *Sulla geometria della varietà a connessione affine*. « Ann. di Mat. », ser. IV, tomo VIII, 1930-31, pp. 80 e 93.

(3) Per il simbolo alternante [] e per i simboli di KRONECKER $\partial_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m}^{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_m}$ cfr. E. BORTOLOTTI, op. cit., pp. 59 e 76.

$$R_{\sigma\kappa\tau}^{\dots\alpha} = \frac{1}{n+1} \delta_{\tau}^{\alpha} R_{\sigma\kappa\nu}^{\dots\nu} + \frac{1}{n^2-1} [\delta_{\sigma}^{\alpha} (n R_{\kappa\tau} + R_{\tau\kappa}) - \delta_{\kappa}^{\alpha} (n R_{\sigma\tau} + R_{\tau\sigma})] - \\ - \frac{3}{(\mu-3)(n+1)} (R_{[\sigma\kappa\tau]}^{\dots\alpha} - \delta_{\sigma}^{\alpha} R_{[\nu\kappa\tau]}^{\dots\nu} + \delta_{\kappa}^{\alpha} R_{[\nu\sigma\tau]}^{\dots\nu} - \delta_{\tau}^{\alpha} R_{[\nu\sigma\kappa]}^{\dots\nu}),$$

ove $R_{\kappa\tau} = R_{\nu\kappa\tau}^{\dots\nu}$.

Più semplicemente si può scrivere

$$(2) \quad R_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu} = 2 \delta_{[\lambda}^{\nu} \varphi_{\omega]\mu} + \delta_{\mu}^{\nu} \psi_{\lambda\omega}$$

ove

$$\varphi_{\omega\mu} = \frac{R_{\omega\mu}}{n-1} + \frac{2 R_{[\omega\mu]}}{(n-2)(n^2-1)} + \frac{R_{\omega\mu\tau}^{\dots\tau}}{(n-2)(n+1)}$$

e

$$\psi_{\lambda\omega} = \frac{1}{(n-2)(n+1)} [2 R_{[\lambda\omega]} + (n-1) R_{\lambda\omega\tau}^{\dots\tau}].$$

Viceversa se il tensore di curvatura riemanniana di un A_n ($n > 3$) ha la forma (2) con $\psi_{\lambda\omega}$ tensore emisimmetrico, assegnati tre vettori indipendenti $\xi^{\lambda}, \eta^{\omega}, \zeta^{\mu}$ applicati in un punto P della A_n , per essi rimane verificata la (1). Concludendo:

Condizione necessaria e sufficiente affinché in una A_n ($n > 3$) un generico vettore ζ^{μ} applicato in P si trasporti, per l'equipollenza definita della connessione della A_n , lungo un ciclo infinitesimo di origine P , in un vettore parallelo alla 3-direzione determinata da ζ^{μ} e dalla giacitura del ciclo è che il tensore di curvatura riemanniana dell' A_n abbia la forma (2), essendo $\psi_{\lambda\omega}$ emisimmetrico.

3. A questa classe di A_n appartengono come casi particolari quelle già note per le quali si ha nella (2) rispettivamente $\varphi_{\omega\mu} \equiv 0$, $\psi_{\lambda\omega} \equiv 0$.

Nel primo caso la (2) si riduce a

$$R_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \psi_{\lambda\omega}$$

con $\psi_{\lambda\omega} = \frac{1}{n} R_{\lambda\omega\tau}^{\dots\tau}$. In tal modo ogni vettore covariante o controvariante si trasporta lungo ogni ciclo infinitesimo in un vettore ad esso parallelo. La connessione della A_n determina di conseguenza un trasporto assoluto di direzioni, o, in altre parole, la A_n è rappresentabile con conservazione del parallelismo su una A_n a connessione affine integrabile⁽⁴⁾.

Nel secondo caso la (2) si riduce a

$$R_{\lambda\omega\mu}^{\dots\nu} = 2 \delta_{[\lambda}^{\nu} \varphi_{\omega]\mu}$$

con $\varphi_{\omega\mu} = \frac{1}{n-1} R_{\omega\mu}$. Allora l'incremento subito da un generico vettore con-

(4) Cfr. E. BORTOLOTTI, op. cit., pp. 93, 94. Ciò naturalmente vale se la A_n è a connessione affine asimmetrica, perchè in caso contrario l'annullarsi identico di $\varphi_{\omega\mu}$ comporta anche l'annullarsi di $\psi_{\lambda\omega}$ e la A_n si riduce ad un ordinario spazio affine.

trovariante nel trasporto ciclico infinitesimale è parallelo alla giacitura del ciclo ⁽⁵⁾.

4. Tornando al caso generale si consideri il tensore $\varphi_{\omega\mu}$ che compare nella (2).

Esso determina nella stella di centro P dello spazio affine tangente in P alla A_n una reciprocità, in generale non degenera, per la quale alla direzione del generico vettore controvariante ζ^μ corrisponde la $(n-1)$ -direzione determinata dal vettore covariante

$$(3) \quad \tau \lambda_\omega = \varphi_{\omega\mu} \zeta^\mu$$

essendo τ uno scalare arbitrario.

La $(n-1)$ -direzione di λ_ω ha in comune con la giacitura determinata dai vettori controvarianti ξ^λ, η^ω una direzione, sia essa ad esempio quella di ξ^λ , tale cioè, che $\xi^\omega \lambda_\omega = 0$.

Premesso ciò, è facile verificare che il vettore

$$(4) \quad \rho^\nu = R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} \xi^\lambda \eta^\omega \zeta^\mu = \xi^\nu \varphi_{\omega\mu} \eta^\omega \zeta^\mu + \zeta^\nu \psi_{\lambda\omega} \xi^\lambda \eta^\omega$$

appartiene alla giacitura determinata da ζ^μ, ξ^λ .

Si consideri invece un generico vettore covariante ζ_ν la sua $(n-1)$ -direzione ha in comune con la giacitura determinata dai vettori ξ^λ, η^ω una direzione, sia essa ad esempio quella di η^ω , tale cioè che $\eta^\omega \zeta_\omega = 0$. Si ha allora che il vettore covariante

$$(5) \quad \rho_\mu = R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} \xi^\lambda \eta^\omega \zeta_\nu = \zeta_\nu \xi^\nu \varphi_{\omega\mu} \eta^\omega + \zeta_\mu \psi_{\lambda\omega} \xi^\lambda \eta^\omega$$

è parallelo alla $(n-2)$ -direzione comune alla $(n-1)$ -direzione reciproca di η^ω nella reciprocità inversa della (3) ed a quella di ζ_μ .

Ricordando quindi il significato geometrico⁽¹⁾ dei vettori (4) (5) si può dire che

un generico vettore controvariante ζ^μ per un punto P della A_n si trasporta, lungo un generico ciclo infinitesimo di origine P, in un vettore parallelo alla giacitura determinata da ζ^μ e dalla sua direzione reciproca, nella reciprocità (3), parallela alla giacitura del ciclo. Mentre invece un generico vettore covariante ζ_ν si trasporta lungo un ciclo infinitesimo in un vettore parallelo alla $(n-2)$ -direzione comune alla $(n-1)$ -direzione di ζ_ν ed a quella reciproca, nella reciprocità inversa della (3), della direzione parallela a ζ_ν ed alla giacitura del ciclo.

Il tensore emisimmetrico $\psi_{\lambda\omega}$ che compare nella (2) definisce nella stella di centro P dello spazio affine tangente in P alla A_n un complesso lineare di giaciture.

È facile verificare che

per ogni ciclo infinitesimo la cui giacitura appartiene al complesso lineare in questione la A_n si comporta relativamente ad un generico vettore controvariante o covariante come l' A_n esaminata nel secondo caso del numero precedente.

(5) Cfr. E. BORTOLOTTI, op. cit., p. 80. Se la A_n è una V_n riemanniana coincidono in questo caso i parallelismi di Levi-Civita e di Severi, cfr. E. BOMPIANI, *Le trasformazioni puntuali fra varietà che conservano il parallelismo di Levi-Civita*. « Rend. Acc. Lincei », vol. 29, 1920. Per talune proprietà nel caso generale cfr. A. COSSU, *Proprietà di curvatura di una particolare classe di varietà a connessione affine*. « Rend. Acc. Lincei », vol. VI, fasc. 6, pp. 702-707 (1949).

Inoltre un generico vettore ζ^μ si trasporta in un vettore ad esso parallelo lungo ogni ciclo infinitesimo parallelo alla $(n-1)$ -direzione reciproca di ζ^μ nella reciprocità (3); mentre un generico vettore covariante ζ_ν si trasporta in un vettore parallelo lungo ogni ciclo infinitesimo la cui giacitura è parallela a ζ_ν .

Sempre nello stesso ordine di idee si può dare una interpretazione geometrica del cono $(n-1)$ -dimensionale di incidenza relativo alla (3)

$$(6) \quad \varphi_{\omega\mu} dx^\omega dx^\mu = 0.$$

Esso è il luogo delle direzioni per P tali che ogni vettore controvariante parallelo ad una di esse si trasporta in un vettore parallelo lungo un qualunque ciclo infinitesimo ad esso parallelo.

Mentre l'altro cono di incidenza relativo alla (3) è l'involuppo di $(n-1)$ -direzioni tali che ogni vettore covariante ζ_ν parallelo ad una di esse si trasporta in un vettore ad essa parallelo lungo ogni ciclo infinitesimo la cui giacitura è parallela alla direzione reciproca di ζ_ν nella inversa della (3)⁽⁶⁾.

In questi ultimi casi esaminati è facile osservare che l' A_n si comporta come la varietà accennata nel primo caso del numero precedente.

Si osserva infine che se si ha contemporaneamente, con ovvio significato geometrico,

$$\lambda_\omega \xi^{[\omega} \eta^{\mu]} = 0 \quad , \quad \psi_{\omega\mu} \xi^\omega \eta^\mu = 0$$

o

$$\zeta_\omega \xi^{[\omega} \eta^{\mu]} = 0 \quad , \quad \psi_{\omega\mu} \xi^\omega \eta^\mu = 0$$

la A_n si comporta, relativamente al vettore ed alla giacitura del ciclo soddisfacenti alle precedenti condizioni, come una A_n dotata di una *connessione affine integrabile*.

5. La proprietà caratteristica della A_n in esame ed enunciata alla fine del n. 2 è invariante per una trasformazione della connessione della A_n che conservi il parallelismo delle direzioni⁽⁷⁾.

Ricordando infatti che la più generale trasformazione T_p (trasformazioni che conservano il parallelismo delle direzioni) è rappresentata da

$$(7) \quad \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + 2 \delta_\mu^\nu \psi_\nu$$

ove ψ_ν è un arbitrario vettore covariante, se ne deduce che il tensore di curvatura riemanniana dell' \bar{A}_n , trasformata della assegnata A_n mediante la (7), è dato da

$$\bar{R}_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} = R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} + 2 \delta_\mu^\nu \Psi_{\lambda\omega}$$

essendo $\Psi_{\lambda\omega} = \delta\psi_\lambda/\delta x^\omega - \delta\psi_\omega/\delta x^\lambda$ il rotore del vettore ψ_λ che compare nella (7).

È ovvio che

$$\bar{R}_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 2 \delta_{[\lambda}^\nu \varphi_{\omega]\mu} + \delta_\mu^\nu (\psi_{\lambda\omega} + 2 \Psi_{\lambda\omega})$$

(6) È ovvio che tale direzione reciproca di ζ_ν appartiene al cono (6).

(7) Cfr. ad esempio E. BORTOLOTTI, op. cit., p. 75.

è della forma (2), ove

$$\bar{\varphi}_{\omega\mu} = \varphi_{\omega\mu} \quad , \quad \bar{\psi}_{\lambda\omega} = \psi_{\lambda\omega} + 2 \Psi'_{\lambda\omega}.$$

Ne consegue che la reciprocità (3) è $T_{\mathcal{P}}$ -invariante.

Assegnata inoltre una A_n del tipo ricordato nel secondo caso del n. 3, con

$$(8) \quad R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 2 \delta_{[\lambda}^{\nu} \varphi_{\omega]\mu}$$

le sue $T_{\mathcal{P}}$ -trasformate hanno il tensore di curvatura del tipo (2) con

$$\bar{\varphi}_{\omega\mu} = \varphi_{\omega\mu} \quad \text{e} \quad \bar{\psi}_{\lambda\omega} = \psi_{\lambda\omega}.$$

Viceversa solo e soltanto se il tensore $\psi_{\lambda\omega}$ della (2) è il rotore d'un vettore con una opportuna scelta del vettore ψ_{λ} nelle (7) il tensore di curvatura trasformato risulta della forma ⁽⁸⁾.

6. Si consideri per ultimo il caso in cui la A_n sia a connessione affine simmetrica. In tal caso per il tensore di curvatura (2), ricordando la prima identità del Bianchi $R_{[\lambda\omega\mu]}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$, si ha

$$R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 2 \delta_{[\lambda}^{\nu} \varphi_{\omega]\mu} + 2 \delta_{\mu}^{\nu} \varphi_{[\omega\lambda]}$$

essendo $\varphi_{\lambda\omega} = \frac{1}{n^2 - 1} (n R_{\lambda\omega} + R_{\omega\lambda})$ e quindi $2 \varphi_{[\omega\lambda]} = \frac{1}{n + 1} R_{\lambda\omega\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}$.

Ricordando allora il significato geometrico dell'annullarsi del tensore di Weil ⁽⁹⁾ della connessione simmetrica data

$$W_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{1}{n^2 - 1} [\delta_{\omega}^{\nu} (n R_{\lambda\mu} + R_{\mu\lambda}) - \delta_{\lambda}^{\nu} (n R_{\omega\mu} + R_{\mu\omega})] + \frac{1}{n + 1} \delta_{\mu}^{\nu} R_{\omega\lambda\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = 0$$

se ne deduce che

Condizione necessaria e sufficiente affinché una A_n ($n > 3$) a connessione asimmetrica sia rappresentabile con conservazione delle geodetiche su di uno spazio affine o, come si dice, sia proiettivamente piana ⁽¹⁰⁾ è che la varietà a connessione affine simmetrica associata ⁽¹¹⁾ alla A_n (o una qualunque varietà a connessione affine simmetrica avente le stesse geodetiche della A_n) sia tale che ogni vettore ζ^{μ} per ogni suo punto P si trasporti lungo ogni ciclo infinitesimo di origine P in un vettore parallelo alla 3-direzione determinata da ζ^{μ} e dalla giacitura del ciclo.

Nel caso in cui l' A_n è a connessione simmetrica si può anche dire che quest'ultima è la condizione necessaria e sufficiente perchè l' A_n sia a connessione proiettivo-euclidea ⁽¹²⁾.

(8) Il tensore $\psi_{\lambda\omega}$ è il rotore di un vettore allorchando lo è il tensore $R_{[\lambda\omega]}$.

(9) Per il tensore di Weil o tensore di curvatura proiettiva cfr. J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, Springer 1924, p. 131 ed E. BORTOLOTTI, *Spazi a connessione proiettiva in Corsi dell'Ist. Naz. Alta Matematica*, Roma, 1941, p. 32

(10) E. BORTOLOTTI, op. cit., nella (9), p. 32.

(11) E. BORTOLOTTI, op. cit., nella (2), p. 59.

(12) Cfr. per esempio J. A. SCHOUTEN, op. cit., p. 130.

Geometria. — *Su certi involuppi proiettivamente legati ai fasci di curve piane.* Nota di GIUSEPPE TANTURRI, presentata (*) dal Corrisp. A. TERRACINI.

Considero un fascio F di curve piane avente in O un punto base a tangente variabile che non sia di flesso per la curva generica del fascio. È noto che in queste condizioni ci sono al più tre curve di F dotate di flesso in O , e almeno una; cosicchè i fasci si possono suddividere in tre classi, con riferimento a un dato punto base, secondo il numero di tangenti inflessionali nel punto O .

Le coniche osculatrici in O alle curve del fascio e che passano inoltre per un punto A avendo ivi per tangente una retta prefissata a , costituiscono una famiglia il cui involuppo, qualora esista, è proiettivamente legato al fascio, e individuato da esso e dall'elemento (A, a) : lo chiamerò *involuppo associato* al fascio e all'elemento.

Siccome non mi risulta che l'argomento sia stato studiato sotto questo aspetto, mi è parso non inutile l'esame di questo involuppo e del suo legame proiettivo col fascio F . Per qualche analogia formale vedasi il lavoro del prof. Bompiani, *Fasci di elementi differenziali nel piano proiettivo* (1).

I. Osservo intanto che nelle mie ipotesi, e ponendo O nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane, il fascio F può assumere l'equazione

$$(I) \quad \lambda x - y + (a_0 + \lambda a'_0) x^2 + (a_1 + \lambda a'_1) xy + (a_2 + \lambda a'_2) y^2 + \dots = 0.$$

Inoltre, data l'indole proiettiva della questione, non è restrittivo supporre che A sia il punto improprio dell'asse y e a la retta impropria del piano delle curve. Si ha così, variando λ , la famiglia di parabole osculatrici

$$(2) \quad y = \lambda x + [a_0 + (a'_0 + a_1)\lambda + (a'_1 + a_2)\lambda^2 + a'_2\lambda^3] x^2 = \lambda x + f(\lambda) x^2.$$

Le radici dell'equazione $f(\lambda) = 0$, che va supposta non identica, conducono alle curve di F dotate di flesso in O (incluso anche i casi di flessi d'ordine superiore).

Dirò *tangente semplice, doppia, o tripla di flesso* la retta tangente in O a una curva che corrisponda rispettivamente a una radice semplice, doppia o tripla dell'equazione $f(\lambda) = 0$. Determino ora l'involuppo associato nei diversi casi possibili, in relazione con la eventuale molteplicità delle radici di detta equazione, e con le possibili posizioni particolari del punto A .

a) $f(\lambda) = 0$ ha una radice tripla, e non è restrittivo supporre che sia $\lambda = 0$. La famiglia di parabole osculatrici $y = \lambda x + a\lambda^3 x^2$ involuppa la conica

$$4x + 27ay^2 = 0$$

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni», Istituto Nazionale di Alta Matematica, pp. 124-168 (1947-48).

che va messa in relazione con la curva C di F , tangente in O alla retta OA , di equazione $x + ay^2 + \dots = 0$.

Se però A sta sulla tangente tripla di flesso, le parabole osculatrici descrivono il fascio $y = \lambda x + ax^2$. Dunque:

Se il fascio F contiene una sola curva con flesso nel punto base O a tangente inflessionale t , l'inviluppo associato all'elemento (A, a) è una conica caratterizzata dal contenere gli elementi (O, OA) , (T, a) (essendo T il punto comune ad a e t) e dal valore $27/4$ dell'invariante di contatto in O con la curva C ; salvo che A stia su t , nel quale caso tutte le coniche osculatrici hanno fra loro un contatto del secondo ordine in A e l'inviluppo associato è indeterminato.

$b) f(\lambda) = 0$ ha una radice doppia $\lambda = 0$ e una semplice $\lambda = 1$. Siano rispettivamente d e s le tangenti doppia e semplice di flesso. Le parabole osculatrici $y = \lambda x + a\lambda^2(\lambda - 1)x^2$ inviluppano la cubica

$$4a^2x^2y - ax^2 - 18axy + 27ay^2 + 4x = 0$$

razionale perchè dotata di cuspidi. In relazione a questa vanno considerati: la curva C di F tangente in O alla OA , il punto D intersezione di d con a , la conica osculatrice tangente in O alla retta coniugata armonica di s rispetto alla coppia d e OA e il punto S , distinto da O , in cui tale conica incontra s ; e infine la retta b che con DS, d, a forma, nell'ordine, un birapporto eguale a $-1/4$.

Se però si prende A su s , si ha la famiglia di parabole osculatrici $y = \lambda x + a\lambda^2x^2$ e l'inviluppo associato è la retta

$$4ay + 1 = 0.$$

Se infine si prende A su d , le parabole osculatrici descrivono il fascio $y = \lambda x + a\lambda x^2$. Dunque:

Se il fascio F contiene due curve con flesso nel punto base O , a tangenti inflessionali d (doppia) e s (semplice), l'inviluppo associato all'elemento (A, a) è una cubica razionale caratterizzata dal contenere gli elementi (O, OA) , (A, a) , (S, s) , (D, b) e dal valore $27/4$ dell'invariante di contatto in O con la curva C ⁽²⁾; essa è dotata di cuspidi in un punto B tale che $(OA, d, s, OB) = 1/9$ e inoltre $(AS, AB, AO, a) = -1/3$; infine la tangente cuspidale è coniugata armonica di BO rispetto alle BA, BC .

Se però A sta su s , l'inviluppo associato è una retta passante per D , che si può caratterizzare come la tangente, distinta da a , condotta per D alla conica osculatrice generica.

Infine se A si trova su d manca l'inviluppo associato e le coniche osculatrici descrivono un fascio con un punto base su s .

$c) f(\lambda) = 0$ ha tre radici distinte. Siccome la quaterna Q di rette composta di OA e delle tre tangenti inflessionali possiede un invariante assoluto, è presumibile a priori che l'inviluppo associato ne sia in certo modo dipendente.

Posto $f(\lambda) = a(\lambda^3 + p\lambda + q)$, essendo $4p^3 + 27q^2 \neq 0$, si trova come inviluppo associato la quartica irriducibile

$$4x(1 + apx)^3 + 27a(y - aqx^2)^2 = 0.$$

(2) Un calcolo immediato prova che si tratta di condizioni indipendenti.

Per caratterizzarla proiettivamente si osservi che, escluso per ora che la quaterna Q anzidetta sia armonica o equianarmonica, e dette r_1, r_2, r_3 le tre tangenti inflessionali di equazioni $y = \lambda_i x$ ($i = 1, 2, 3$), si ha $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, relazione che si può anche scrivere

$$(\lambda_1, \lambda_3, 0, \infty) + (\lambda_2, \lambda_3, 0, \infty) + 1 = 0$$

e questa definisce in modo unico la retta $y = 0$. Inoltre fra tutti i punti di questa retta si fissi l'attenzione sul ben determinato punto M distinto da O per il quale passano tre parabole osculatrici formanti gruppo equianarmonico con la conica spezzata nelle rette OA e a . Segue allora che:

Se il fascio F contiene tre curve distinte con flesso nel punto base O , l'involuppo associato all'elemento (A, a) generico è una quartica razionale dotata di tacnodo in A con tangente tacnodale a ; considerata la retta s , ben determinata, che soddisfa la condizione $(r_1, r_3, s, OA) + (r_2, r_3, s, OA) + 1 = 0^{(3)}$, la conica osculatrice γ tangente a s , e il punto M di s definito in precedenza, la quartica appartiene al fascio individuato da γ contata due volte e dalla C^ spezzata in OA e nella AM contata tre volte; ed è definita in tale fascio dal valore $27/4$ dell'invariante di contatto in O con la curva di F tangente alla OA . Essa possiede una cuspidi sulla retta AM ed è tangente alle r_i .*

Senza difficoltà si vede poi che: se la quaterna Q è armonica, s coincide con una delle r_i , la cuspidi cade in M con tangente OM , e la quartica si caratterizza come prima, sostituendo solo a γ la conica spezzata nelle rette a e OM .

Infine: se la Q è equianarmonica, è M coincidente con O , cosicchè la quartica appartiene al fascio individuato dalla OA contata quattro volte e dalla γ contata due volte, restando definita nel fascio ancora dal predetto valore dell'invariante di contatto. Essa non possiede alcun punto multiplo fuori di A , che diventa però una cuspidi di seconda specie.

Rimane il caso che A stia su una tangente inflessionale. Si può allora porre per esempio $f(\lambda) = a\lambda(\lambda - 1)$ e l'involuppo associato è la conica

$$(ax - 1)^2 + 4ay = 0.$$

Per caratterizzarla si osservi che, chiamando r, s le due tangenti inflessionali distinte da OA ; t la coniugata armonica di OA rispetto a r, s ; γ la parabola osculatrice tangente a t ; R_0, S_0 i punti in cui, rispettivamente, γ taglia r, s fuori di O ; $R, (S)$ il coniugato armonico di O rispetto a $R_0, (S_0)$ e all'intersezione di $r(s)$ con a ; l'involuppo associato contiene gli elementi (R, r) e (S, s) . Dunque: se A sta su una delle tre tangenti inflessionali, l'involuppo associato è la conica contenente gli elementi (A, a) , (R, r) e tangente a s (o simmetricamente).

II. È quasi superfluo avvertire che gli involuppi di cui mi sono occupato dipendono dagli elementi E_2 delle curve del fascio F , onde si potrebbe a ragione parlare di involuppi associati a un fascio di E_2 non inflessionali e non aventi a comune uno stesso E_1 . Così sarebbe agevole, in questo nuovo ordine di idee, estendere la ricerca a un fascio di elementi E_k , seguendo una suddivisione non dissimile da quella del lavoro del prof. Bompiani (Nota cit.). Riservandomi di

(3) Con altro linguaggio, s è la seconda polare di OA rispetto al gruppo (r_1, r_2, r_3) .

tornare sull'argomento poco oltre limitatamente al caso inflessionale, è ora opportuno approfondire l'indagine sul legame proiettivo tra fascio e involuppo, esaminando quale relazione esista tra gli involuppi associati a due fasci aventi in comune la configurazione di tangenti inflessionali in uno stesso punto base.

A questo scopo si consideri, insieme col fascio F di equazione (1), il fascio Φ di equazione

$$(1') \quad \lambda x - y + (\alpha_0 + \lambda \alpha'_0) x^2 + (\alpha_1 + \lambda \alpha'_1) xy + (\alpha_2 + \lambda \alpha'_2) y^2 + \dots = 0$$

anch'esso con punto base in O e con tangente variabile. Per ogni valore di λ si hanno due curve, di F e Φ rispettivamente, fra loro tangenti. Le parabole osculatrici in O alle $(1')$ hanno equazione

$$(2') \quad y = \lambda x + [\alpha_0 + (\alpha'_0 + \alpha_1) \lambda + (\alpha'_1 + \alpha_2) \lambda^2 + \alpha'_2 \lambda^3] x^2 = \lambda x + \varphi(\lambda) x^2.$$

Fissato λ , le due curve fra loro tangenti in O che si ottengono per quel valore di λ da F e da Φ rispettivamente, hanno come invariante di contatto o di Mehmke-Segre

$$\frac{1}{K} = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)}.$$

Variando λ varia in generale anche K , e ci sono tre coppie di curve, rispettivamente nei due fasci, che posseggono uno stesso invariante di contatto. Però, come caso particolare che si presenta quando e solo quando i due fasci hanno in comune la configurazione delle tangenti inflessionali, K può essere indipendente da λ , e allora la $(2')$ diventa

$$(2'') \quad y = \lambda x + K f(\lambda) x^2.$$

Infatti i valori di λ che annullano $f(\lambda)$ conducono, in questa ipotesi, a coppie di curve, in F e Φ rispettivamente, aventi in O un flesso con la stessa tangente inflessionale. E viceversa. Dunque:

Se due fasci di curve piane hanno in comune in un punto base la configurazione delle tangenti inflessionali, associando alla curva generica del primo fascio la curva del secondo ad essa tangente, l'invariante di contatto non varia al variare della coppia; e viceversa.

Premesso questo, e mantenendo l'ipotesi che i fasci (1) e $(1')$ abbiano a comune in O la configurazione delle tangenti inflessionali, si osservi che si passa dalla famiglia (2) , di coniche osculatrici in O alle curve del primo fascio e tangenti in A alla retta a , alla famiglia $(2'')$ che è nelle stesse condizioni rispetto al secondo fascio, cambiando x in Kx , e y in Ky ; lo stesso avviene, di conseguenza, per i rispettivi involuppi quando esistano.

Segue: *gli involuppi associati a un elemento (A, a) e a due fasci di curve piane che in un punto base O , non flesso per tutte e a tangente variabile, hanno in comune la configurazione di tangenti inflessionali, si corrispondono in una omologia avente centro O e asse a . La caratteristica dell'omologia è eguale all'invariante di contatto di tutte le coppie di curve, rispettivamente dei due fasci, fra loro tangenti.*

III. Considero ora brevemente il caso di un fascio di curve che abbiano nel punto base O un flesso ordinario con tangente variabile. La $f(\lambda) = 0$ è identicamente soddisfatta e in luogo della (1) si deve ora scrivere

$$(3) \quad \lambda x - y - \lambda a_1 x^2 + (a_1 - \lambda a_2) xy + a_2 y^2 + (b_0 + \lambda b'_0) x^3 + \\ + (b_1 + \lambda b'_1) x^2 y + (b_2 + \lambda b'_2) xy^2 + (b_3 + \lambda b'_3) y^3 + \dots = 0.$$

In luogo di coniche, converrà considerare le cubiche osculatrici contenenti un dato elemento cuspidale (A, a) , e non è restrittivo porre A nel punto improprio dell'asse y e a coincidente con la retta impropria. Si trova così la famiglia di parabole cubiche

$$(4) \quad y = \lambda x + g(\lambda) x^3$$

ove si è posto

$$g(\lambda) = b_0 + (b'_0 + b_1)\lambda + (b'_1 + b_2)\lambda^2 + (b'_2 + b_3)\lambda^3 + b'_3\lambda^4.$$

Si origina così una quaterna di tangenti iperinflessionali corrispondenti alle radici di $g(\lambda) = 0$. La ricerca dell'inviluppo dà luogo a diversi casi simili a quelli esaminati in I. Scritta la (4) come segue

$$(4') \quad y = \lambda x + x^3 (g_0 \lambda^4 + 4g_1 \lambda^3 + 6g_2 \lambda^2 + 4g_3 \lambda + g_4),$$

mi limito qui al caso generale in cui le g_i sono indipendenti; e del resto tutti gli altri seguono da questo come casi particolari.

Per rendere spediti calcolo e interpretazione, si pensino temporaneamente costanti x e y , e λ coordinata proiettiva non omogenea su una retta o in un fascio; il risultante della (4') e della sua derivata non è che il discriminante $\Delta = i^3 - 27j^2$, ed eguagliandolo a zero si trova l'inviluppo del nono ordine

$$[i_g x^3 - (g_1 x + g_0 y)]^3 = 27 \left[(g_1^2 - g_0 g_2) xy + j_g x^4 + \frac{1}{2} (g_1 g_2 - g_0 g_3) x^2 - \frac{g_0^2}{16} \right] x$$

essendo i_g e j_g gli invarianti quadratico e cubico di $g(\lambda) = 0$.

Si vede subito, fra l'altro, che tale inviluppo è indeterminato sempre e solo quando $g(\lambda) = 4g_3 \lambda + g_4$, ossia quando tre almeno delle tangenti iperinflessionali coincidono con OA .

Tornando al caso generale, si consideri il luogo dei punti del piano per ciascuno dei quali passa un gruppo equianarmonico di cubiche (4'), luogo che è una cubica γ con elemento cuspidale (A, a) , e flesso in O con tangente p che è la terza polare di OA rispetto al gruppo di tangenti iperinflessionali, ed ha equazione $i_g x^3 = g_1 x + g_0 y$; si consideri inoltre il luogo dei punti del piano per ciascuno dei quali passa un gruppo armonico di curve (4'), quartica δ razionale con punto triplo in A e tangenti a (doppia) e OA , per la quale O è l'intersezione delle due bitangenti.

Orbene l'inviluppo associato appartiene al fascio individuato da γ contata tre volte e dalla C^3 spezzata in OA , e in δ contata due volte; ed è determinato in tale fascio dal valore $27/256$ dell'invariante di contatto in O con la curva del fascio (3) tangente in O alla OA . Esso ha un punto sestuplo in A con le sei tangenti coincidenti con a , e quattro punti doppi nelle intersezioni, fuori di A , di γ con δ .

IV. Nell'ordine di idee svolte al n. II sia, in generale, il punto O di flesso F_p per la curva generica del fascio. Si potrà definire, in modo non dissimile dai precedenti, l'inviluppo associato a un elemento (A, a) , e tale inviluppo dipenderà dalla configurazione delle *tangenti singolari*, intendendo tali quelle rette che nel punto base sono tangenti di flesso almeno F_{p+1} . Ora una immediata estensione dei ragionamenti del numero II prova che:

Se due fasci hanno in comune in un punto base O la configurazione delle tangenti singolari, riferite le curve dei due fasci a parità di tangente, l'invariante di contatto è sempre eguale per tutte le coppie, e inversamente. Gli inviluppi associati ai due fasci e a uno stesso elemento (A, a) si corrispondono in una omologia avente il centro in O , asse a , e caratteristica eguale a una potenza a esponente razionale dell'invariante di contatto.

Ciò del resto, come anche parte del numero II, si può derivare da una interpretazione dell'invariante di contatto che segue subito da quella del professor B. Segre⁽⁴⁾. Limitandoci al caso più semplice, se due curve sono tangenti in O senza avervi flesso, le coniche osculatrici contenenti un dato elemento (A, a) sono trasformate una nell'altra da una omologia di centro O , asse a , e caratteristica eguale all'invariante di contatto. Ovvìa generalizzazione per il caso che entrambe abbiano in O un flesso F_p .

Astronomia. — *Sulle variazioni delle latitudini medie annuali.*
Nota di TITO NICOLINI, presentata (*) dal Socio L. CARNERA.

In un precedente contributo⁽¹⁾ sono state esposte considerazioni sul movimento apparente del « polo medio » quale è possibile ricavare dai dati disponibili del Servizio Internazionale delle Latitudini. Siccome manca tuttora (e sarà forse così ancora a lungo) una riduzione veramente omogenea della gran mole di materiale osservativo delle Stazioni, ogni risultato numerico su tale soggetto non può avere attualmente che carattere di provvisorietà; tuttavia non sembra che questo difetto possa influenzare seriamente le conclusioni raggiunte. Quel movimento apparente deve corrispondere ad un fatto reale, e si presenta piuttosto come conseguenza di movimenti crostali locali (con possibilità, almeno per composizione, anche di movimenti vasti o continentali), anzichè di movimenti dell'intera massa terrestre rispetto all'asse di rotazione.

La ricerca del 1922 di W. D. Lambert, confermata da Sir H. S. Jones (v. bibliografia nel precedente contributo), dava validi risultati sul moto apparente del polo medio, e non v'è grave difficoltà ad interpretarli come dovuti a moti crostali. È anche essenziale però il contributo di H. Kimura⁽²⁾, che ha affermato con evidenza

(4) *Sui sistemi continui di curve piane con tacnodo.* « Rend. Acc. Lincei » (6), 9, pp. 970-74 (1929).

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) Questi « Rendiconti », vol. VII, fasc. 6, pp. 307-315, 1949 = « Contr. Astron. Capodimonte », ser. II, vol. III, n. 11.

(2) *Results ...* vol. VIII, p. 232.

netta lo spostamento crostale corrispondente alla stazione di Mizusawa. Guidato dai lavori dei predetti ricercatori, il precedente contributo⁽¹⁾ indicava le ragioni che suggeriscono seriamente tali moti come causa dei corrispondenti spostamenti del polo medio: anzitutto la variazione rilevata dal Kimura della latitudine media di Mizusawa dal 1906 al 1928 ($-0''.205$) paragonata alle variazioni, tra loro identiche, corrispondenti a Carloforte ($-0''.085$), Ukiah ($-0''.088$), Gaithersburg ($-0''.082$), queste attribuibili ad effetti cumulativi di errori nei moti propri, e che altrimenti apparirebbero casuali; inoltre il rilievo di discontinuità nel moto polare, correlative anche a discontinuità nella rotazione terrestre ed a fenomeni sismici, che danno la certezza di perturbazioni e movimenti locali della crosta, spesso rilevati per altre vie, in particolare per il Giappone.

Se si potesse prescindere dalla netta preponderanza di moti locali, gli stessi dati del precedente contributo potrebbero interpretarsi per mezzo di un movimento compatto della crosta; allora l'espressione « movimento progressivo del polo » avrebbe ancora un netto significato, sebbene sarebbe preferibile dire movimento progressivo della crosta, rispetto all'asse di rotazione, e rispetto alla complessiva massa terrestre. Ma effettivamente le considerazioni svolte propendevano per l'azione di perturbazioni e deformazioni locali; in questo caso un moto vasto e progressivo d'insieme, naturalmente molto lento, risulta dalla somma dei moti ed assestamenti locali, e questa considerazione sembra anche più naturale. Potrebbe anche darsi che siano più spesso interessate le parti esterne della crosta, a causa delle più insistenti variazioni delle sollecitazioni esterne, stagionali atmosferiche, o della radiazione solare.

Le considerazioni del precedente contributo⁽¹⁾ si basavano sullo studio della polodia già elaborata dal S. I. L. I dati che qui si forniscono sono invece le latitudini medie annuali deducibili dai valori mensili del S. I. L. Naturalmente anche questi dati non sono valori definitivi: cambiamenti di programmi, errori nelle declinazioni e moti propri, influenzano in modo imprecisato le latitudini medie e gli andamenti delle loro variazioni; inoltre le medie annuali riportate sono libere dalla oscillazione annuale, ma conservano evidentemente un residuo della chandleriana. Tuttavia questi dati vengono forniti potendo costituire elementi di ricerca, benchè possano subire correzioni di carattere definitivo; attualmente non è possibile procedere a tali definitive revisioni, ed è meglio fornire dati con un certo carattere di provvisorietà, anzichè non fornire nulla ed arrestare qualche utile ricerca.

Le latitudini medie annuali delle stazioni internazionali, per gli intervalli in cui hanno funzionato, sono dunque riportate alla Tabella I; per la bibliografia dei dati usati nel calcolo si rinvia al Contr. n. 8 di Capodimonte. Per la stazione di Tcharjui, le latitudini si riferiscono alla vecchia stazione; i valori dal 1909 compreso sono stati corretti di $-0''.225$ appunto per ridurre la nuova stazione alla vecchia. Per il 1922, i valori sono quelli di Wanach, Bd. VI, 1921.79-22.65, poichè ovviamente non avrebbe significato una combinazione coi valori di Kimura, che partono coi nuovi programmi ed orari dal 1922.7. Le riduzioni corrispondenti a Carloforte dal 1939 al 1946, eccetto il 1942, sono basate su scarsissime osservazioni, e mancano per 3 anni, quindi non si riportano le medie.

TABELLA I.

*Latitudini medie annuali delle Stazioni internazionali.**Stazioni settentrionali.*

	Miz. 39° 8'	Tchar. =	Carlof. =	Uk. =	Gait. =	Cincinn. =			
1900	3".609	10".692	8".936	12".089	13".153	19".352			
1901	629	657	946	075	199	304			
02	635	668	926	045	204	330			
03	610	694	907	063	176	354			
04	618	671	940	075	146	364			
05	621	649	965	113	192	264			
06	645	628	968	075	195	294			
07	625	657	944	082	216	273			
08	617	690	909	055	215	320			
09	601	699	908	083	212	297			
10	601	700	914	094	193	306			
1911	575	748	883	099	190	327			
12	585	723	886	144	219	345			
13	555	754	955	069	225	369			
14	501	769	927	115	237	396			
15	467	747	873	156		464			
16	491	780	885	159					
17	534	785	882	141					
18	549	684	917	150					
19	557		965	117					
20	514		9.036	074					
1921	534		016	083					
22	524		8.994	127					
23	348		860	026					
24	376		837	030					
25	411		854	11.972					
26	426	Kitab	845	12.047					
27	399	=	773	11.996					
28	422		828	12.060					
29	400		871	034					
30	373		865	067					
1931	344	1.652	847	089					
32	362	620	820	105	290	31".797 ?	36".761	38".268	
33	397	625	816	101	186				
34	388	560	809	084	200		712	218	
35	458	769	805	171	327	737 ?	780	262	
36	475	736	897	177	330	809	769	238	
37	430	682	891	179	321	816	799	323	
38	443	701	917	184	320	808	782	276	
39	421	686		158	329	804	764	300	
40	452	725		169	331	800	781		
1941	414	756		177	298				
42	453	710	921	148	285				
43	415	756		101	267				
44	404	777		101	224				
45	387	757		138	250				
46	374	703		232 ?	291				
47	382	706	946	191	272				
48	414	787 ?	944	134	256				

Stazioni australi ed equatoriale

La Pl.	Adel.	Bat.
—34°54'	—34°55'	—6°15'

Punti interrogativi: dubbi per scarso numero di osservazioni.

TABELLA II.

*Latitudini medie annuali, contate dalla media di riferimento,
per Greenwich, Washington, Berlino.*

Greenwich 1912-1935 (estremi inclusi)		Washington 1920-1946 (con μ corretti)		Berlino 1918-1927
— 0".110	— 0".022	+ 0".014	— 0".013	+ 0".007
— 015	+ 025	+ 015	— 031	— 026
+ 040	— 017	+ 036	— 011	— 001
+ 011	+ 005	+ 032	000	+ 234
— 033	— 025	— 016	+ 026	— 047
— 066	— 047	— 026	+ 091	— 034
— 056	— 058	— 001	+ 062	— 016
— 004	— 058	+ 011	+ 079	— 035
+ 059	— 068	+ 016	+ 065	— 037
— 024	— 049	+ 042	+ 056	
+ 006		+ 002	— 118	
— 084		+ 004	+ 048	
— 101		+ 024	+ 047	
— 039		+ 017		

Le declinazioni e moti propri del G. C., di Boss sono usati da Carnera dal 1941 (più precisamente dal 1935, servendosi di valori manoscritti comunicati da Kimura, che però contenevano qualche errore). Per Adelaide e La Plata le posizioni stellari sono quelle date dalle osservazioni meridiane di La Plata. Per Batavia, i valori qui riportati dipendono da riduzioni riferite anche al G. C. di Boss.

Nella Tabella II sono riportate anche le variazioni medie annuali (nel senso latitudine osservata meno media) per Greenwich⁽³⁾ (per cui si è adottata la tabella originaria 12 di H. S. Jones, cambiando i segni), Washington⁽⁴⁾, Berlino (Courvoisier)⁽⁵⁾, le latitudini medie o di riferimento di queste due ultime essendo rispettivamente

$$38^{\circ} 55' 17'' \cdot 030, 52^{\circ} 24' 24'' \cdot 589.$$

(3) *Observations made with the Cookson floating z. t....*; London, H. M. Stationery Office, 1939.

(4) « *Astronomical Journal* », vol. 32 e sg.

(5) « *Veröff. Univ. Sternw. zu Berlin. Babelsberg* », Bd. VIII, Hft. I, 1930.

I dati delle Tabelle sono anche riportati graficamente nella annessa figura, nella quale le linee verticali corrispondono ad epoche di cambiamenti di programma (il più radicale fu quello del 1922.7; viceversa nel 1940 la variazione si limita solo alla correzione di alcune posizioni stellari nel sistema definitivo di Boss).

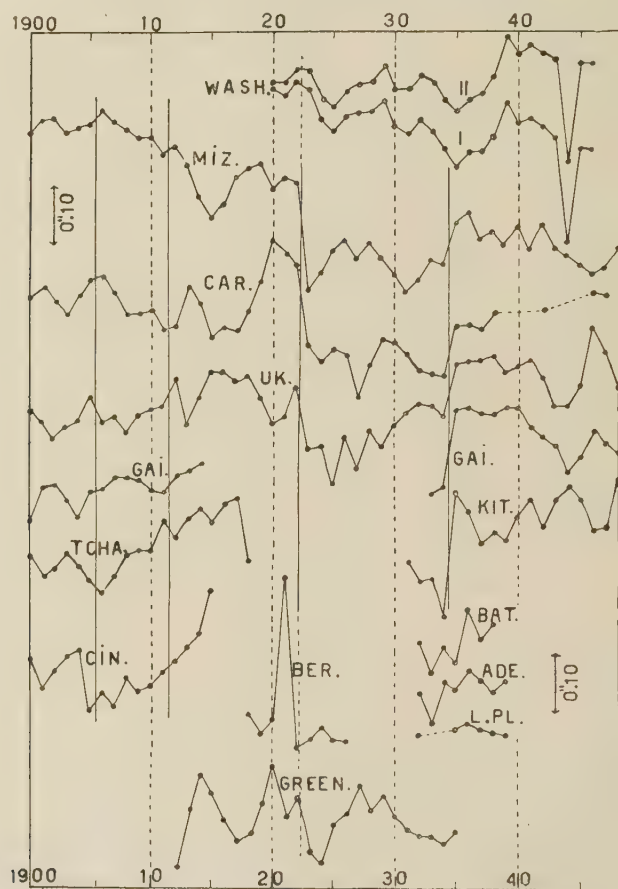


Fig. 1. — Variazioni delle latitudini medie annuali delle Stazioni Internazionali e di Washington, Berlino, Greenwich. Le verticali continue corrispondono a cambiamenti di programma per le Stazioni. Washington I dà la variazione originaria, II mostra l'effetto della opportuna correzione sistematica delle originarie δ del P. G. C.

Le conclusioni già raggiunte al Contributo precedente non possono essere modificate dai dati di questa Nota, ma ciò nonostante essi forniscono un punto di vista più originario ed alquanto diverso, che non necessita di passare per le elaborate deduzioni della polodia e del polo medio. Le considerazioni e conclusioni del Contributo stesso non vengono qui di nuovo particolareggiare, intendendosi fornire considerazioni complementari, e non ripetizioni. Quindi, tra le deduzioni utili, può rilevarsi quanto segue.

Si osservi, a riguardo però del solo andamento comune, il comportamento di Mizusawa, Carloforte, Ukiah, confermato nei tratti comuni da Gaithersburg, Kitab. Dopo il tratto prossimamente orizzontale corrispondente ai primi programmi, si ha una notevole caduta dopo il 1920, seguita da andamento generalmente crescente. Queste caratteristiche comuni, si spiegano coi cambiamenti di programmi stellari ed errori nei moti propri in declinazione, i cui effetti accumulandosi via via danno apparenze progressive nelle latitudini medie.

Per Mizusawa, all'andamento approssimativo suddetto si sovrappongono nettamente variazioni proprie, spiegate bene con moti crostali locali. In complesso si vede dal confronto che la latitudine media di Mizusawa tende a diminuire progressivamente.

Intorno al 1920, come si è rilevato in contributi precedenti, si è avuta una effettiva notevole perturbazione nel moto polare, che apparirebbe anche qui nella sua integrità se non vi fosse stato il cambiamento di programma di Kimura al 1922.7 (il quale cambiamento, in tal senso, è stato piuttosto un inconveniente). Tuttavia questo cambiamento di programma non è stato sufficiente a nascondere quella discontinuità, che si rivela chiaramente anche nelle variazioni relative a Greenwich, Washington, Berlino. Le variazioni di Washington confermano che anche verso il 1940-44 si è avuta una perturbazione interessante in modo particolare la crosta del continente americano.

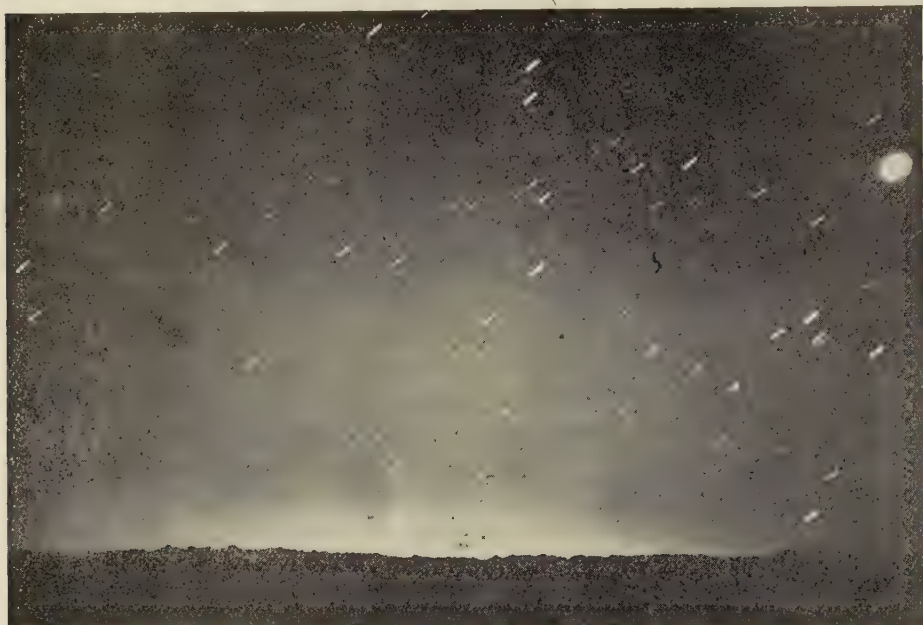
Si può osservare che la perturbazione intorno al 1920 ha inizio verso il 1916, con aumento delle latitudini medie per Mizusawa e Carloforte, diminuzione per Ukiah. Ma è interessante il rilievo di sfasamenti, evidenti anche per Berlino, la cui latitudine sale fortemente al 1921 per diminuire l'anno appresso. La presenza di sfasamenti o ritardi mostra chiaramente che non sono in giuoco movimenti dell'asse terrestre rispetto alla massa complessiva, ma movimenti locali della crosta, che si susseguono in assestamenti con qualche ritardo.

Dal 1935 Carnera usa, come si è detto, le declinazioni di Boss; il miglior sistema attenua gli errori cumulativi o progressivi, ed è in parte per questo che dal 1935 in poi le latitudini medie non appaiono soggette a forti variazioni progressive. Tuttavia variazioni parallele sono state già accennate sopra per Ukiah e Gaithersburg, e confermate da analoghe variazioni per Washington.

Altri rilievi potrebbero farsi, ma per terminare, basterà richiamare una comunicazione allegata al rapporto del prof. Carnera al Congresso di Zurigo della U. A. I. Scopo principale di quella comunicazione era la raccomandazione di esaminare e controllare scrupolosamente ogni alterazione nel Servizio Internazionale delle Latitudini, a riguardo dei programmi, numero di Stazioni, strumenti. Se i problemi da risolvere erano già praticamente difficili considerando moti solidali della crosta, o dell'intera massa terrestre, la presenza dei moti locali complica assai le cose; da cui la necessità di un servizio accuratamente continuato in impegnativa collaborazione, senza di che dovranno affrontarsi difficilissimi o inestricabili problemi di collegamento.

Astronomia. — *Misure fotometriche di luce zodiacale* (*). Nota di ATTILIO COLACEVICH e LIDIA VIVIANI, presentata (**) dal Socio G. ABETTI.

Il problema della natura della luce zodiacale non è a tutt'oggi chiarito sicuramente. Lo splendore della luce zodiacale è molto debole e non è possibile quindi uno studio con spettrografi a grande dispersione. Lo spettro risulta inoltre sempre



Luce zodiacale del mattino osservata il 30 dicembre 1943 al Pic du Midi. (Si nota la luce del crepuscolo lungo l'orizzonte; tra le tracce stellari la più intensa indica il pianeta Venere).

notevolmente alterato dalla presenza di radiazioni che hanno origine nel cielo notturno della nostra atmosfera e nella luce del crepuscolo. Una separazione dei contributi di queste tre parti non è fino ad oggi fattibile con un buon grado di sicurezza. Lo studio della distribuzione dello splendore nel cono della luce zodiacale è stato fatto di recente (1935) da W. Brunner⁽¹⁾ con interessanti risultati.

Ci è parso utile un riesame fotometrico del problema in base ad osservazioni eseguite in un cielo particolarmente puro di pulviscolo atmosferico quale quello del Pic du Midi de Bigorre a 2850 m. sul livello del mare nei Pirenei francesi. Le fotografie furono ottenute da A. Dauvillier con una camera del tipo Leica adoperando pellicole Agfa Superpan. Egli ci prestò gentilmente 15 foto-

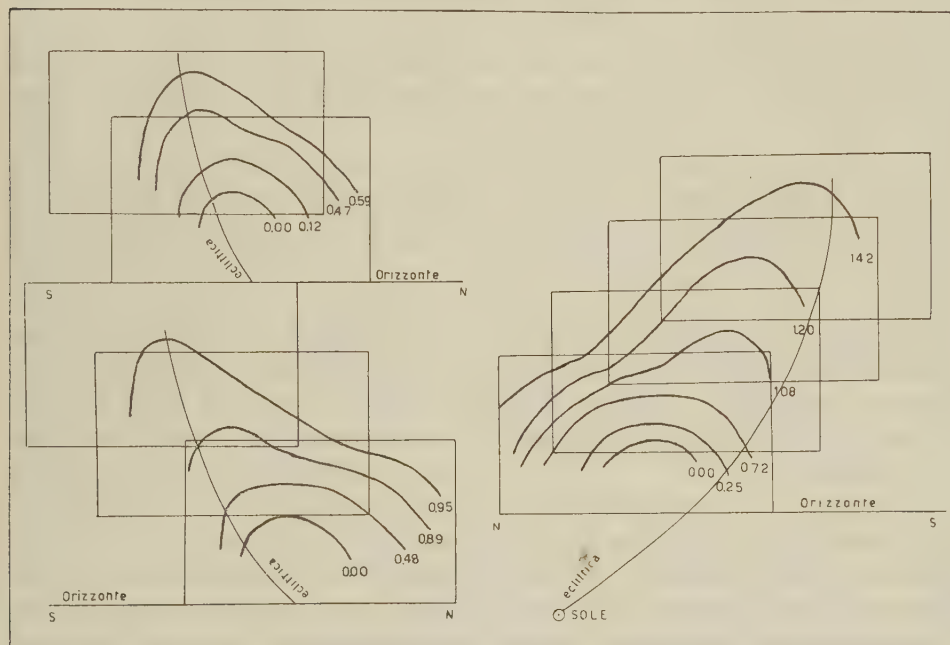
(*) Lavoro eseguito nell'Osservatorio Astrofisico di Arcetri in Firenze.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

(1) *Publikationen der Eidgenössischen Sternwarte in Zürich*. Band VI.

grammi fatti in tre notti: un primo gruppo di mattina in dicembre e due gruppi fatti la sera in febbraio.

La camera era tenuta ferma orizzontalmente durante ogni notte e puntata la mattina verso l'eclittica ad est e la sera verso l'eclittica ad ovest. L'esposizione di ogni pellicola è stata di tre minuti e gli intervalli tra ogni esposizione sufficienti per avere la luminosità del cielo per diverse distanze angolari del Sole sotto all'orizzonte. Su una pellicola della stessa emulsione venne da noi eseguita una esposizione di calibrazione che ha servito per il passaggio dai valori delle densità a quelli delle intensità oppure alle differenze di grandezza stellare. Ogni fotogramma



Isofote della luce zodiacale osservata sul Pic du Midi nel dicembre 1943 (a destra) e nel febbraio 1944 (a sinistra).

copre una zona del cielo di $28^\circ \times 42^\circ$. Prima di combinare i risultati ottenuti dai fotogrammi fatti in una singola notte, fu necessario apportare una correzione ai valori trovati, dipendente dalla distanza del punto misurato nel fotogramma dal centro dello stesso. A mano a mano che ci si allontanava dall'asse ottico si notò un indebolimento sistematico delle densità dipendente probabilmente per la massima parte della vignettatura strumentale.

I risultati di tutte le misure eseguite sono raccolti nella figura qui annessa. In essa sono rappresentate le isofote nelle tre notti: i due gruppi a sinistra per la luce zodiacale della sera e quello a destra per la luce zodiacale del mattino. Ogni rettangolo sta ad indicare un fotogramma; la loro posizione venne fissata calcolando la distanza del Sole dal centro dell'orizzonte di ogni fotogramma; in realtà per ognuno di essi la base inferiore era sulla medesima striscia di orizzonte durante ogni notte.

Non tutti i fotogrammi poterono essere utilizzati; quelli più deboli non davano un contributo significativo e furono scartati. L'origine della scala di misura delle intensità è diversa per le tre notti. Per ogni isofota è indicato lo splendore espresso in differenze di grandezza con la isofota più splendente in basso. Le massime differenze di grandezza trovate si rilevano dai grafici pari a 0.59, 0.91 e 1.42.

La luce zodiacale ha sempre un componente da attribuirsi alla luce crepuscolare. Mentre quella zodiacale propria si può pensare disposta lungo l'eclittica (rappresentata dalla curva in figura), quella crepuscolare è disposta simmetricamente rispetto al verticale che passa per il Sole. La combinazione di questi due tipi di radiazione porta ad una disposizione delle isofote di quasi simmetria, rispetto però ad un asse spostato in direzione del verticale del Sole. Nella parte più vicina all'orizzonte il contributo crepuscolare predomina; questa parte non è stata considerata e non è tracciata in figura. I risultati trovati confermano quelli del Brunner.

Fisica-Matematica. — *A proposito di alcune recenti obiezioni contro la relatività einsteiniana.* Nota di ORESTINA GARAVALDI, presentata (*) dal Socio G. GIORGI.

Negli «Atti dell'Accademia dei Lincei» è stata pubblicata una Nota di un illustre Autore, il prof. Q. Majorana ⁽¹⁾, la quale tenderebbe a dimostrare un risultato veramente straordinario, cioè che le ipotesi della *prima relatività* di Einstein, e in particolare le formule di trasformazione introdotte in quella Teoria, conducono ad una contraddizione.

Lasciamo qui da parte la questione fisica, cioè non discutiamo se le formule di Einstein siano o no d'accordo con l'esperimento. Fermiamoci al lato logico-matematico della questione, cioè alla domanda se le formule di Einstein costituiscono un insieme coerente. Dopo quasi un cinquantennio il mondo scientifico era d'opinione che le formule di Einstein (le così dette trasformazioni lorentziane) essendo ben semplici ed essendo passate pel vaglio di numerosi matematici molto esperti a scoprire ogni vizio recondito in qualsiasi catena di deduzioni, fossero esenti da qualsivoglia pecca logica. Ma poichè un Fisico di tanta autorità come il Majorana espone una dimostrazione secondo la quale, dalle ipotesi di Einstein si perviene ad una contraddizione logica, questa presentazione non può non impressionare; e non si può lasciarla senza replica, come senza replica sono state lasciate tante esposizioni antirelativiste fatte da critici meno autorevoli. Siamo in presenza di un paradosso, di una petizione di principio, fatta attraverso un ragionamento abile e profondo.

Ritengo che sia doveroso additare dove è che esiste la ben nascosta petizione di principio, affinchè l'autorità di un grande nome, come quella del Majorana, non possa indurre in errore gli inesperti.

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

(1) QUIRINO MAJORANA, *Sulla relatività di Alberto Einstein*. Nota dei « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei » (Classe Sc. fis. mat. e nat.), vol. V, fasc. 5 (novembre 1948), pp. 211-215.

Q. Majorana considera due piattaforme k e k' , materializzate in due regoli paralleli e accostati fra loro; estesi lungo l'asse OX. Per $t = 0$ i due regoli si suppongono fermi uno rispetto all'altro, cioè la piattaforma k' si trova nello stesso stato di moto della piattaforma k . In queste condizioni, un osservatore, stando fermo su k , sincronizza due serie di orologi distribuiti lungo k e lungo k' . Dopo di ciò, la piattaforma k' viene messa in moto rispetto all'altra con una certa velocità v parallela all'asse OX. Per effetto di questa operazione i due regoli non vengono a trovarsi in condizioni simmetriche, perchè il primo di essi, k , ha continuato il suo stato di quiete, mentre il regolo k' ha ricevuto un'accelerazione, passando dalla velocità zero, alla velocità v . Acquistata che sia questa velocità, i riferimenti sono diventati diversi per gli osservatori di k e k' , e il confronto fra l'andamento degli uni e degli altri orologi non si può fare senza introdurre convenzioni. Gli orologi di k' , che erano sincronizzati anche rispetto agli osservatori di k , non lo sono più rispetto a quest'ultimi, e perchè lo siano devono essere aggiustati *ex-novo* facendo le esperienze entro k' . Se questo aggiustamento si fa, le condizioni divengono paragonabili, ma tutto il ragionamento fatto da Majorana cambia. Non facendo l'aggiustamento, si troverà una dissimmetria: all'atto delle successive coincidenze gli orologi di k' si troveranno in arretrato rispetto agli orologi di k , perchè essi, dopo essere stati sincronizzati coi criteri di k , hanno subito un moto vario: le condizioni fra le due serie di orologi non sono simmetriche. Ammettere, come fa il Majorana, che la sincronizzazione eseguita dagli osservatori di k debba valere anche per gli osservatori di k' , vale quanto ammettere un criterio assoluto di simultaneità, cioè ammettere il principio antieinsteiniano che Majorana vuole difendere.

Se ci si vuole limitare a ragionamenti concernenti la relatività *speciale*, senza cioè implicare la *generale*, bisogna ovviamente evitare con cura ogni moto vario, poichè appunto l'influenza che le accelerazioni possono avere sui fenomeni da osservare è di dominio della relatività generale. È pertanto necessario che ogni osservatore faccia le proprie operazioni tutte dalla propria piattaforma, poichè per passare da una piattaforma ad un'altra, come da k a k' , occorre subire un moto vario, cioè con accelerazione non nulla.

Nell'ideare la sua esperienza il Majorana, invece, non rispetta l'esigenza sopracennata, cioè di eseguire per intero ogni operazione, dal principio alla fine, da una medesima piattaforma. E difatti, se consideriamo l'operazione del confronto degli orologi, rileviamo che al principio l'osservatore B di k' procede alla sincronizzazione degli orologi quando la sua piattaforma è immobile rispetto a k e quindi coincide con k ; mentre invece il controllo fotografico delle indicazioni degli orologi viene eseguito, dallo stesso osservatore B, posto su di una piattaforma in moto relativo rispetto a k , con riferimento ad orologi immobili rispetto a k .

Un ragionamento regolare si può fare, invece, supponendo che il regolo k' sia stato in moto sin da tempi remoti con la sua velocità definitiva, e che un osservatore collocato su k sincronizzi tutti gli orologi di k , mentre un osservatore collocato su k' sincronizzi fra loro tutti gli orologi di k' . Allora vi è simmetria perfetta fra i due regoli e fra le due serie di orologi, e le conseguenze riescono simmetriche.

La simmetria reciproca fra i due regoli, che Majorana crede di trovare in difetto, si riconosce più chiaramente se si suppone che i due regoli, sin da tempi remoti, abbiano velocità $+v/2$ e $-v/2$ rispetto ad un osservatore intermedio k_0 , che si definisce come fisso. E allora si vede che tutto è simmetrico rispetto a k_0 e che simmetriche sono le conseguenze, purchè gli orologi di ognuno dei regoli siano sincronizzati da un osservatore che stia sul regolo stesso e che ammetta uguale velocità di propagazione della luce dal suo punto di vista sul regolo stesso in entrambe le direzioni.

È da notare infine che il rilievo dell'Autore secondo cui « le variazioni della metrica spaziale e temporale di uno dei sistemi non sarebbero che apparenti e non reali rispetto all'altro » non viene ad avere un significato ben preciso senza una chiara ed univoca definizione dei concetti di *realità* ed *apparenza* (ciò che fra l'altro involgerebbe un esame gnoseologico piuttosto complesso) e comunque senza qualche criterio che permetta effettivamente di distinguere fra ciò che va inteso come *reale* e ciò che va inteso come *apparente*, in rapporto ad una qualche esperienza fisica anche solo concettuale.

Fisica. — *Urto neutroni-deutoni alle basse energie* (*). Nota di MARIO VERDE, presentata (**) dal Corrisp. G. VALLE.

È ben noto che nell'urto come problema di due corpi i casi particolari in cui l'energia della particella incidente è molto grande oppure molto piccola sono dal punto di vista teorico più facilmente trattabili.

Nel primo caso infatti si può fare uso della nota approssimazione di Born, nel secondo si ricorre ad uno sviluppo in serie dell'unica costante di fase δ_0 , o meglio di $k \cotg \delta_0$, k essendo il numero d'onda $k = 2\pi/\lambda$, di potenze di k^2 . Questo è stato da ultimo messo in evidenza con i lavori di Schwinger⁽¹⁾, Blatt e Jackson⁽²⁾ e Bethe⁽³⁾ per l'urto neutrone-protone (N-P). In questo modo è possibile di ottenere una espressione che dà direttamente la sezione d'urto del processo in funzione dell'energia. Nel caso particolare dell'urto di due nucleoni, due coefficienti dello sviluppo sono praticamente sufficienti a coprire l'intervallo di energia da zero fino a dieci MeV.

Questa circostanza ha servito a dimostrare l'impossibilità di decidere sulla forma del potenziale nucleare, se ad esempio gaussiano o di Yukawa. Servendosi infatti dei dati sperimentali alle energie inferiori a 10 MeV, per quello che abbiamo detto è sempre possibile di scegliere le due costanti, profondità del potenziale e raggio d'azione, in modo da spiegare la curva sperimentale. A favore il potenziale di Yukawa esistono solo argomenti indiretti. Bethe ad esempio

(*) Dall'Istituto di Fisica « A. Righi » dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell' 11 marzo 1950.

(1) J. SCHWINGER, « Phys. Rev. », 72, 742 A (1947).

(2) J. M. BLATT e J. D. JACKSON, « Phys. Rev. », 76, 18 (1949).

(3) H. A. BETHE, « Phys. Rev. », 76, 38 (1949).

(loc. cit.) fa osservare che il solo potenziale di Yukawa permette di spiegare le esperienze d'urto $N-P$ o $P-P$ con un unico raggio d'azione tripletto e singoletto.

Un altro argomento che non è stato ancora messo in evidenza e che a nostro parere parla molto a favore del potenziale di Yukawa è che esso soddisfa ad un'equazione differenziale

$$\Delta V - x^2 V = 0$$

che è invariante rispetto al gruppo di traslazione e di rotazione del riferimento, come si deve esigere da parte di un campo. Questo non è invece il caso per gli altri tipi di potenziale che si usano di solito in fisica nucleare.

A parte questi argomenti indiretti, la misura della distribuzione angolare nello sparpagliamento di neutroni da parte di deutoni e della sezione d'urto corrispondente in funzione dell'energia — precisamente alle basse energie dove si possono evitare le complicazioni dovute a eventuali forze dipendenti dalla velocità — può servire a stabilire definitivamente la realtà di uno dei potenziali oltre alla dipendenza dallo spin e dallo spin isotopico per la quale le esperienze d'urto neutroni-deutoni sono particolarmente adatte⁽⁴⁾.

In questa Nota ci proponiamo di estendere al caso dell'urto neutroni-deutoni, inteso come problema di tre corpi, lo sviluppo di $k \cot \delta_0$ in serie di potenze di k^2 .

A questo scopo basta partire dalle equazioni del moto nella forma (14) e (15) del lavoro citato in⁽⁴⁾. Nel caso dello spin complessivo $S = 3/2$, per un potenziale fra due nucleoni della forma generale

$$V_{23} = U_{23} \cdot \{w + b(2,3)_\sigma + \hbar(2,3)_\tau + m(2,3)_{\sigma,\tau}\}$$

dove U_{23} sta per la dipendenza spaziale, $(2,3)$ per la permutazione delle coordinate dei due nucleoni 2 e 3, di spin, di spin isotopico o di entrambe a seconda dell'indice posto in basso σ, τ e σ, τ .

Si ha

$$(1) \quad \begin{cases} T_k \psi' = (w + b) U^s \psi' - (\hbar + m) (U' \psi'' + U'' \psi') \\ T_k \psi'' = (w + b) U^s \psi'' - (\hbar + m) (U' \psi'' - U'' \psi'). \end{cases}$$

Per il significato dei simboli ora e nel seguito rimandiamo al lavoro citato in⁽⁴⁾.

Ricordiamo solo che

$$T_k = \Delta_r + \Delta_q + k^2 - k_d^2.$$

Nel nostro problema d'urto si hanno le seguenti condizioni ai limiti per $q = \infty$

$$(2) \quad \begin{cases} \psi' \simeq 0 \\ \psi'' \simeq -g(r) \frac{\sin(kq + \delta_0)}{q} \cdot \frac{1}{\sin \delta_0} = u(k) \end{cases}$$

(4) M. VERDE, «*Helv. Phys. Acta*», 22, 339 (1949).

$g(r)$ è l'autofunzione del deutone nello stato fondamentale normalizzata in \vec{r}

$$\int g(r) \cdot d^3 r = 1.$$

Indicheremo anche con ψ'_0, ψ''_0 le autofunzioni relative ad una energia

$$E_k = \frac{9}{8} \frac{\hbar^2}{M} k^2 = 0.$$

Il comportamento asintotico di queste autofunzioni è ovviamente

$$(2)' \quad \begin{cases} \psi'_0 \simeq 0 \\ \psi''_0 \simeq -g(r) \cdot \left(-\frac{1}{a_4} + \frac{1}{q} \right) = u(0). \end{cases}$$

La notazione è quella consueta, indicando a_4 la lunghezza di sparpagliamento per il quartetto ad un'energia zero.

Moltiplicando nella (1) la prima equazione per ψ'_0 la seconda per ψ''_0 e sommando, facendo poi altrettanto con il sistema

$$\begin{cases} T_0 \psi'_0 = (\omega + b) U^s \psi'_0 - (\hbar + m) (U' \psi'_0 - U'' \psi'_0) \\ T_0 \psi''_0 = (\omega + b) U^s \psi''_0 - (\hbar + m) (U' \psi''_0 - U'' \psi''_0) \end{cases}$$

moltiplicando però la prima per ψ' e la seconda per ψ'' , dopo aver sottratto i due risultati si ottiene

$$\begin{aligned} \psi'_0 (\Delta_r + \Delta_q) \psi' - \psi' (\Delta_r + \Delta_q) \psi'_0 + \psi''_0 (\Delta_r + \Delta_q) \psi'' + \\ - \psi'' (\Delta_r + \Delta_q) \psi''_0 + k^2 (\psi' \psi'_0 + \psi'' \psi''_0) = 0. \end{aligned}$$

Occorre infine sottrarre ancora l'espressione analoga relativa alla soluzione asintotica $u(k)$

$$u^*(0) \Delta_r + \Delta_q u(k) - u(k) (\Delta_r + \Delta_q) u^*(0) + k^2 u^*(0) u(k) = 0$$

per ottenere

$$\begin{aligned} \psi'_0 (\Delta_r + \Delta_q) \psi' - \psi' (\Delta_r + \Delta_q) \psi'_0 + \psi''_0 (\Delta_r + \Delta_q) \psi'' - \psi'' (\Delta_r + \Delta_q) \psi''_0 - \\ - u^*(0) (\Delta_r + \Delta_q) u(k) + u(k) (\Delta_r + \Delta_q) u^*(0) + k^2 (\psi' \psi'_0 + \\ + \psi'' \psi''_0 - u^*(0) u(k)) = 0. \end{aligned}$$

Ci è ora possibile integrare in tutto lo spazio di \vec{r} e \vec{q} adoperando la formula di Green. Essendo per i primi sei termini il contributo per \vec{r} e \vec{q} grandi nullo, rimane solo quello per $q = 0$ e si ha

$$4\pi \lim_{q \rightarrow 0} \int (u(k) - u^*(0)) d^3 r + k^2 \cdot \int (\psi' \psi'_0 + \psi'' \psi''_0 - u^*(0) u(k)) d\tau = 0$$

tenuto conto di (2) e (2)'

$$(3) \quad k \cotg \delta_0 = -\frac{1}{a_4} + \frac{k^2}{4\pi} \cdot \int \{u^*(0) u(k) - (\psi' \psi'_0 + \psi'' \psi''_0)\} d\tau.$$

Questa formula vale esattamente. Qualora si conosca la ψ' sotto la forma

$$\psi' = \psi'_0 + \chi'_1 k^2 + \chi'_2 k^4 + \dots$$

si ha lo sviluppo

$$k \cotg \delta_0 = -\frac{1}{a_4} + \frac{k^2}{2} \rho_4 + k^4 P + \dots$$

In analogia al caso dei due corpi, la costante

$$\rho_4 = \frac{1}{2\pi} \int \{ |u(0)|^2 - (|\psi'|^2 + |\psi''|^2) \} d\tau$$

che ha le dimensioni di una lunghezza definisce un raggio d'azione effettivo.

È possibile ottenere formule simili nel caso dell'urto di protoni contro deutoni.

L'altro caso dello spin $S = 1/2$ si può naturalmente trattare nello stesso modo. Il fatto essenziale è che nell'equazione di Schrödinger sotto la forma (15) che possiamo abbreviare scrivendo:

$$T_k \Psi^* = W \Psi^*$$

dove Ψ^* sta per l'insieme delle 4 componenti $\psi^a, \psi^s, \psi', \psi''$, la matrice W dell'interazione

$$W = \begin{pmatrix} (w+m)U^s & 0 & (b+k)U'' & -(b+k)U' \\ 0 & (w-m)U^s & (b-k)U' & (b+k)U'' \\ (b+k)U'' & (b-k)U' & wU^s - mU'' & -mU' \\ -(b+k)U' & (b-k)U'' & -mU' & wU^s + mU'' \end{pmatrix}$$

è simmetrica.

La formula corrispondente alla (3) è in questo caso:

$$(3') \quad k \cotg \delta_0 = -\frac{1}{a_2} + \frac{k^2}{4\pi} \cdot \int \{ u^*(0) u(k) - \\ - (\psi^a \psi_0^{a*} + \psi^s \psi_0^{s*} + \psi' \psi_0'^* + \psi'' \psi_0''^*) \} d\tau$$

ed anche qui a_2 è la lunghezza di sparpagliamento del doppietto ad energia zero. L'analogo raggio d'azione effettivo è

$$\rho_2 = \frac{k^2}{2\pi} \int \{ |u(0)|^2 - (|\psi^a|^2 + |\psi^s|^2 + |\psi'|^2 + |\psi''|^2) \} d\tau.$$

È naturale che per la valutazione dei coefficienti dello sviluppo occorre conoscere la soluzione delle equazioni del moto. A questo scopo si adopera il metodo variazionale che è stato descritto ampiamente nel lavoro citato in (4).

Il calcolo numerico è piuttosto laborioso, dovuto al fatto che occorre valutare i parametri variazionali da equazioni in cui entrano differenze di integrali che hanno valore presso a poco eguale e che vanno perciò calcolati con un buon numero di cifre decimali e che inoltre occorre far uso di tre e più parametri variazionali per avere risultati consistenti.

Vogliamo anticipare⁽⁵⁾ che con un'interazione statica del tipo simmetrico, si hanno due lunghezze a_4 e a_2 dello stesso segno (+) e dello stesso ordine di grandezza.

Le uniche misure dello sparpagliamento neutroni-deutoni ad energie estremamente basse, sono dovute a Fermi e Marshall⁽⁶⁾. Questi autori sono riusciti a dare un limite entro il quale si deve trovare il rapporto tra le due lunghezze a_4/a_2 e che è: $0,5 < a_4/a_2 < 2,25$. È dunque accertato che le due lunghezze hanno lo stesso segno.

È desiderabile che si abbiano misure più dettagliate per poter dal confronto con la teoria trarre delle conclusioni definitive di quella natura di cui abbiamo parlato al principio.

Fisica. - *Sopra l'estensione finita dell'elettrone nella teoria di Feynman.* Nota di LUIGI A. RADICATI, presentata (*) dal Corrisp. G. WATAGHIN.

1. Weisskopf⁽¹⁾ ha dimostrato che nella teoria del positrone, l'elettrone può venire considerato dotato di un'estensione finita, derivante dal fatto che la presenza di un elettrone in uno stato ad energia positiva altera la distribuzione degli elettroni negli stati ad energia negativa; tale alterazione equivale effettivamente ad immaginare la carica dell'elettrone distribuita sopra una regione spaziale di dimensioni non nulle.

Partendo dalle idee di Weisskopf, Sawada ha dimostrato in un recente lavoro⁽²⁾ come di tale estensione finita possa tenersi esplicitamente conto introducendo due funzioni spaziali $U^{(W)}(\vec{x})$ e $U_0^{(S)}(\vec{x})$, definite dalle relazioni

$$U^{(W)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\sqrt{m^2 + p^2}}{\sqrt{m^2 + (\vec{p} - \vec{k})^2}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{k}$$

$$U_0^{(S)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\sqrt{m^2 + (\vec{p} - \vec{k})^2} - k_0}{\sqrt{m^2 + (\vec{p} - \vec{k})^2}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{k}$$

dove m è la massa dell'elettrone, \vec{p} il suo impulso⁽³⁾ e $k_0 = |\vec{k}|$ ⁽⁴⁾.

(5) Un lavoro dettagliato con i risultati numerici comparirà nella H. P. A.

(6) E. FERMI e L. MARSHALL, « Phys. Rev. », 75, 578 (1949).

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) V. F. WEISSKOPF, « Phys. Rev. », 56, 72 (1939); « Rev. Mod. Phys. », 21, 305 (1949).

(2) K. SAWADA, « Prog. Theor. Phys. », 4, 275 (1949).

(3) Usiamo qui le unità naturali: $\hbar = c = 1$.

(4) La funzione $U^{(W)}$ era già stata introdotta da WEISSKOPF (loc. cit.) a proposito della parte elettrostatica della self-energy.

Per mezzo di queste due funzioni, la self-energy dell'elettrone si può scrivere nella forma (che si deduce senza difficoltà dalle (3.16), (3.18) e (3.19) del lavoro di Sawada)

$$(1) \quad \Delta E = -2 \pi e^2 \sum_k \sum_l \frac{1}{(E_i - E_l)^2 - k_0^2} \times \\ \times \int (i | \alpha_\mu e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} | l) \{ U^{(W)}(\vec{x} - \vec{x}') + \frac{E_i - E_l}{k_0} U_0^{(S)}(\vec{x} - \vec{x}') \} (l | \alpha_\mu e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}'} | i) d\vec{x}'$$

dove E_i, E_l sono l'energia dell'elettrone nello stato iniziale e in quello intermedio rispettivamente, e le α_μ sono le matrici di Dirac ($\mu = 1, 4; \alpha_4 = 1, \alpha_\mu \alpha_\mu = -1 - \alpha_\mu \cdot \vec{\alpha}$). L'espressione precedente di ΔE diverge, come ha dimostrato Weiskopf, in maniera logaritmica.

Osserviamo incidentalmente che la (1) consente di mettere in evidenza la differenza fra la teoria del positrone e la teoria di una sola particella. In quest'ultima infatti, ΔE risulta data da un'espressione analoga alla (1) nella quale però in luogo delle due funzioni $U^{(W)}$ e $U^{(S)}$ compaiono due funzioni $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$, come si deduce facilmente dalla (6) del lavoro di Sawada; ciò mostra che l'elettrone è in questo caso rigorosamente puntiforme.

2. La divergenza che figura nell'espressione di ΔE può venire eliminata come ha dimostrato Feynman⁽⁵⁾, introducendo un opportuno fattore relativistico di taglio. Ciò può farsi nella maniera più semplice, sostituendo nell'espressione precedente che, usando le notazioni di Feynman, scriveremo nella forma⁽⁶⁾

$$(2) \quad \Delta E = e^2 \int \bar{u} \gamma_\mu K_+(4, 3) \gamma_\mu u e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}_{43}} \delta_+(s_{43}^2) d\tau_4$$

in luogo della funzione $\delta_+(s_{43}^2)$, una funzione $f_+(s_{43}^2)$ definita dalla relazione $(s_{43}^2 = (x_{\mu 4} - x_{\mu 3})^2)$

$$(3) \quad f_+(s_{43}^2) = \frac{1}{\pi} \int e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}_{43}} \frac{1}{k^2} \frac{\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} d^4 k$$

dove $\vec{k} = \gamma_\mu k_\mu$ ($\gamma_\mu = \beta \alpha_\mu$), $d^4 k = (2\pi)^{-2} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4$ e $kx_{43} = k_\mu (x_{\mu 4} - x_{\mu 3})$.

Usando le regole date da Feynman per il calcolo degli integrali del tipo precedente, la (3) si può pure scrivere nella forma

$$(4) \quad f_+(s_{43}^2) = \begin{cases} \frac{i}{2\pi^2} \int e^{i \vec{k} \cdot (\vec{x}_4 - \vec{x}_3)} d\vec{k} \left\{ \frac{e^{-ik_0(t_4 - t_3)}}{2k_0} - \frac{e^{-i\sqrt{k^2 + \lambda^2}(t_4 - t_3)}}{2\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \right\} & \text{per } t_4 > t_3 \\ -\frac{i}{2\pi^2} \int e^{i \vec{k} \cdot (\vec{x}_4 - \vec{x}_3)} d\vec{k} \left\{ \frac{e^{ik_0(t_4 - t_3)}}{2k_0} - \frac{e^{i\sqrt{k^2 + \lambda^2}(t_4 - t_3)}}{2\sqrt{k^2 + \lambda^2}} \right\} & \text{per } t_4 < t_3 \end{cases}$$

(5) R. P. FEYNMAN, «Phys. Rev.», 76, 769 (1949).

(6) Cfr. FEYNMAN, loc. cit., formula 9.

Da questa relazione è facile vedere come la sostituzione della funzione f_+ alla δ_+ , possa venire interpretata, dal punto di vista « realistico », come equivalente al mescolamento al campo elettromagnetico di un campo vettoriale neutrale con quanti di massa λ .

Usando per la f_+ (s_{43}^2) l'espressione (4), si può dedurre dalla (2) un'espressione di ΔE analoga alla (1). Il calcolo, che non offre difficoltà, si può condurre in maniera simile ai calcoli di Sawada, e il risultato a cui si giunge è

$$(5) \quad \Delta E = -2 \pi e^2 \sum_k \sum_l \int (i | \alpha_\mu e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} | l) \times \\ \times \left[\frac{1}{(E_i - E_l)^2 - k_o^2} \left\{ U^{(W)}(\vec{x} - \vec{x}') + \frac{E_i - E_l}{k_o} U_o^{(S)}(\vec{x} - \vec{x}') \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(E_i - E_l)^2 - (k^2 + \lambda^2)} \left\{ U^{(W)}(\vec{x} - \vec{x}') + \frac{E_i - E_l}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}} U_\lambda^{(S)}(\vec{x} - \vec{x}') \right\} \right] (l | \alpha_\mu e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}'} | i) d \vec{x}'.$$

La (5) permette di precisare il mescolamento dei campi di cui si è detto più sopra: il primo termine, che è uguale a quello che figura nella (1), rappresenta il contributo alla self-energy dell'elettrone da parte del campo elettromagnetico, mentre il secondo rappresenta il contributo analogo proveniente dal campo neutrale λ , i cui quanti hanno energia $E = \sqrt{k^2 + \lambda^2}$.

Nell'interazione dell'elettrone con tale campo, figura in luogo della $U_o^{(S)}$ la funzione

$$U_\lambda^{(S)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\sqrt{m^2 + (\vec{p} - \vec{k})^2} - \sqrt{\lambda^2 + k^2}}{\sqrt{m^2 + (\vec{p} - \vec{k})^2}} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}} d \vec{k}$$

che si riduce alla $U_o^{(S)}$ per $\lambda = 0$. La dipendenza della funzione $U_\lambda^{(S)}$ dalla massa dei quanti del campo interagente, è proprio quella indicata da Sawada.

3. Nella teoria di Feynman pertanto la forma dell'elettrone risulta individuata dalle tre funzioni $U^{(W)}(\vec{x} - \vec{x}')$, $U_o^{(S)}(\vec{x} - \vec{x}')$, $U_\lambda^{(S)}(\vec{x} - \vec{x}')$. $U^{(W)}$, che non dipende dalla natura del campo interagente, ma soltanto dalla massa e dall'impulso dell'elettrone, è comune all'interazione dell'elettrone sia con il campo elettromagnetico che con il campo λ ; $U_o^{(S)}$ e $U_\lambda^{(S)}$ che dipendono invece dalla massa dei quanti interagenti risultano naturalmente diverse per l'interazione con il campo elettromagnetico e con il campo λ .

Naturalmente la (5), che è stata dedotta dalla (2) risulta, come ha dimostrato Feynman, finita e ciò in virtù del contributo negativo portato dal campo λ .

L'A. desidera ringraziare il prof. G. Wataghin per le utili discussioni con lui avute sull'argomento.

Chimica. — *La riduzione del nitroso derivato del sale R al catodo a gocce di mercurio* (*). Nota di PAOLO GOLDSCHMIED e FELIPE LUCENA, presentata (**) dal Corrisp. G. SEMERANO.

Tra i metodi di determinazione del cobalto, basati sulla formazione di complessi con sostanze organiche, oltre a quello ben noto di precipitazione con l' α -nitroso- β -naftolo, è stato studiato in questi ultimi anni anche un metodo fondato sull'impiego del nitroso derivato del sale R (sale sodico dell'acido 1-nitroso-2-ossinaftalen-3-6-disolfonico) (1). Si forma in tal caso un complesso rosso, di composizione $[C_{10}H_4(NaSO_3)_2(NO)O]_3Co$ notevolmente solubile in acqua: è possibile così evitare le manipolazioni più complesse dell'analisi ponderale.

Kidson e collaboratori (2) hanno migliorato la tecnica di questo metodo, elaborato da Macpherson e Stewart (3) e da Stare e Elvenhjem (4), nella determinazione del Co in terreni ed organi di animali, giungendo ad una sensibilità di 0,1 γ , disturbata solamente dalla presenza di Cu, Cr e Mn (questo ultimo se in forte quantità). Lugg e Josland (5), studiando il comportamento dei complessi del sale stesso con altri cationi, come Fe, Ni e Cu, hanno dimostrato che essi non ostacolano l'analisi del Co, anche se sotto forma di idrati o fosfati, purché si aggiunga acido citrico, che è capace di mantenerli in soluzione. Joung e collaboratori (6) hanno applicato tale metodo alle analisi tecniche. Il complesso del Co, al contrario di quelli degli altri cationi, è stabile anche a caldo in soluzione di acidi minerali; lo sviluppo completo della colorazione, e quindi l'esatta determinazione colorimetrica del Co, è però troppo influenzato da fattori difficilmente controllabili (quantità di acido nitrico, quantità di nitroso derivato del sale R, tempo di ebollizione, ecc.).

Come è noto, nel caso che le sostanze da dosare o il reattivo o entrambi siano polarograficamente attivi, la fine di una titolazione volumetrica in soluzione diluita può essere stabilita molto accuratamente in base alla misura dell'altezza della corrente di diffusione. Numerosi sono i casi in cui questo procedimento, detto polarometrico, ha permesso di conseguire risultati praticamente soddisfacenti.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica, Centro di studio per la Polarografia del C. N. R., Padova.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

(1) H. S. VAN KLOOSTER, «J. Am. Chem. Soc.», 43, 746 (1921).

(2) E. B. KIDSON, H. O. ASKEW e J. K. DIXON, «New Zealand J. Sci. Technol.», 18, 601-7 (1936); «Chem. Centr.», 1937, I, 3994.

(3) H. T. MACHESON e J. STEWART, «Biochem. J.», 32, 763-7 (1938).

(4) F. J. STARE e C. A. ELVENHJEM, «J. Biol. Chem.», 99, 473-83 (1932).

(5) J. W. H. LUGG e S. W. JOSLAND, «J. exp. Biol. med. Sci.», 14, 319-21 (1936); «Chem. Centr.», 1938, I, 2224.

(6) R. S. JOUNG, E. T. PNIKNEY e R. DICK, «Ind. Eng. Chem., Anal. Ed.», 18, 474-6 (1946).

TABELLA I.

Esp. N.	Conc. mol. sale nitro- so-R	Pot. riduzione in volt		Intensità corr. diffusione μA		$K = i_d/c$
		Sec. Seme- rano	Sec. Heyrov.	osserv.	calc. $c=10^{-3}m$	
Soluzione ammoniacale NH_4Cl 0,1 N— NH_3 0,5 · N; pH=9						
1	$5 \cdot 10^{-5}$			0,58	11,6	$11,6 \cdot 10^3$
2	$9,8 \cdot 10^{-5}$	—0,211	—0,255	1,12	11,4	$11,4 \cdot 10^3$
3	$18,3 \cdot 10^{-5}$	—0,213	—0,269	2,09	11,4	$11,4 \cdot 10^3$
4	$25,7 \cdot 10^{-5}$	—0,201	—0,271	2,93	11,4	$11,4 \cdot 10^3$
5	$32,1 \cdot 10^{-5}$	—0,201	—0,260	3,65	11,67	$11,67 \cdot 10^3$
				media . . .	11,4	
Soluzione acetica: CH_3COOH 0,1 N— CH_3COONa 0,1 N pH=4,7						
6	$6,3 \cdot 10^{-5}$			0,83	13,0	$13,0 \cdot 10^3$
7	$17 \cdot 10^{-5}$	+0,053	—0,012	2,19	12,9	$12,9 \cdot 10^3$
8	$26 \cdot 10^{-5}$	+0,059	—0,011	3,38	13,0	$13,0 \cdot 10^3$
9	$34 \cdot 10^{-5}$	+0,064	—0,016	4,37	12,8	$12,8 \cdot 10^3$
				media . . .	12,98	

Non essendo ancora noto nessun caso di titolazione polarometrica basato sulla formazione di un complesso solubile, si è creduto interessante studiare il processo di formazione del complesso di cobalto in questione.

In attesa di ultimare le esperienze di titolazione, si rendono noti in questo lavoro, i risultati conseguiti nello studio preliminare, indispensabile, del comportamento polarografico del nitroso derivato del sale R.

PARTE SPERIMENTALE. — Secondo le indicazioni di Kidson⁽²⁾, è stata preparata una soluzione acquosa allo 0,1 % di nitroso derivato del sale R, pari ad una concentrazione $2,65 \cdot 10^{-3}$ M, da diluire opportunamente per il rilevamento dei polarogrammi. Una prima serie di misure è stata eseguita nella soluzione base C di Hohn⁽⁷⁾, modificata secondo Kolthoff e Langer⁽⁸⁾: NH_4Cl 0,1 N — NH_3 0,5 N (pH = 9); una seconda serie, in soluzione tampone di acetato⁽⁸⁾: CH_3COOH 0,1 N — CH_3COONa 0,1 N (pH = 4,7).

Tutte le misure sono state eseguite a 18° C, usando un complesso polarografico Nejedly, dotato di galvanometro di sensibilità massima $9,6 \cdot 10^{-10}$ A/mm/m.

(7) H. HOHN, *Chemische Analysen mit dem Polarographen*. E. Zintl. Berlin: J. Springer, 1937.

(8) I. M. KOLTHOFF e A. LANGER, « J. Am. Chem. Soc. », 62, 3172-5 (1940).

Per avere un potenziale anodico costante nelle varie esperienze, le misure della prima serie furono eseguite usando un anodo esterno a calomelano normale, collegato alla cella di elettrolisi mediante un ponte salino a NH_4NO_3 — agar; quelle della seconda serie, invece, furono eseguite con anodo interno, dato il valore notevolmente negativo del potenziale anodico che avrebbe spostato le curve troppo all'inizio del rilevamento.

L'ossigeno disciolto nelle soluzioni fu eliminato per gorgogliamento di idrogeno elettrolitico. Ad eguale trattamento desaerante fu sottoposta la soluzione dopo ogni aggiunta di sale, attendendo 5 minuti prima del rilevamento della curva relativa. Le soluzioni acetiche richiesero un tempo di gorgogliamento notevolmente maggiore.

La prima parte della tabella I si riferisce alle soluzioni ammoniacali; due soluzioni, nelle quali il nitroso derivato era in concentrazione 1:4,12 sono state usate per la determinazione della valenza del processo. Esse presentano i seguenti potenziali di inizio dei gradini, determinati secondo Semerano⁽⁹⁾ con la tangente alle curve a 35°, 16':

$$\text{curva I: } \pi = -0,188 \text{ V; } \quad \text{curva II: } \pi = -0,206 \text{ V.}$$

In base alla relazione:

$$(1) \quad \Delta\pi = \frac{0,058}{n} \lg \frac{C_1}{C_2}$$

si deduce da questi dati un valore di n pari a 1,98: il processo di riduzione sarebbe cioè bivalente ed il prodotto di riduzione sarebbe la idrossilamina corrispondente.

Poichè $\bar{i}_d = 12,08 \mu\text{A}$ per una concentrazione $C = 10^{-3} \text{ M}$, avendo determinato un valore 2,46 per $m^{2/3} t^{1/6}$ al potenziale a cui si è misurata l'altezza del gradino ($-0,363 \text{ V}$), applicando la equazione di Ilkovič⁽¹⁰⁾:

$$(2) \quad \frac{\bar{i}_d}{C} = 605 n D^{1/2} m^{2/3} t^{1/6}$$

si calcola un valore di D eguale a $1,64 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$, ed una costante della corrente di diffusione

$$I = \frac{\bar{i}_d}{C m^{2/3} t^{1/6}} = 4,91.$$

Il coefficiente di diffusione risulta perciò nettamente più alto di quelli riscontrati per altre sostanze organiche⁽¹¹⁾ e, quello che è più strano, di quello trovato da Kolthoff e Langer⁽⁸⁾ per l'analogo α -nitroso- β -naftolo derivato. Si è ritenuto quindi opportuno confrontare le altezze del gradino relativo al nitroso derivato del sale R con quello dell'ossigeno, che si riduce anch'esso secondo un processo

(9) G. SEMERANO, «Gazz. chim. ital.», 62, 518-38 (1932).

(10) D. ILKOVIC, «Collection Czechoslov. Chem. Commun.», 6, 498-513 (1934).

(11) M. J. ASTLE e V. MCCONNELLY, «J. Am. Chem. Soc.», 65, 35-8 (1943); M. J. ASTLE e W. P. CROPPER, «J. Am. Chem. Soc.», 65, 2395-9 (1943); M. J. ASTLE e S. I. STEPHENSON «J. Am. Chem. Soc.», 65, 2399-402 (1943).

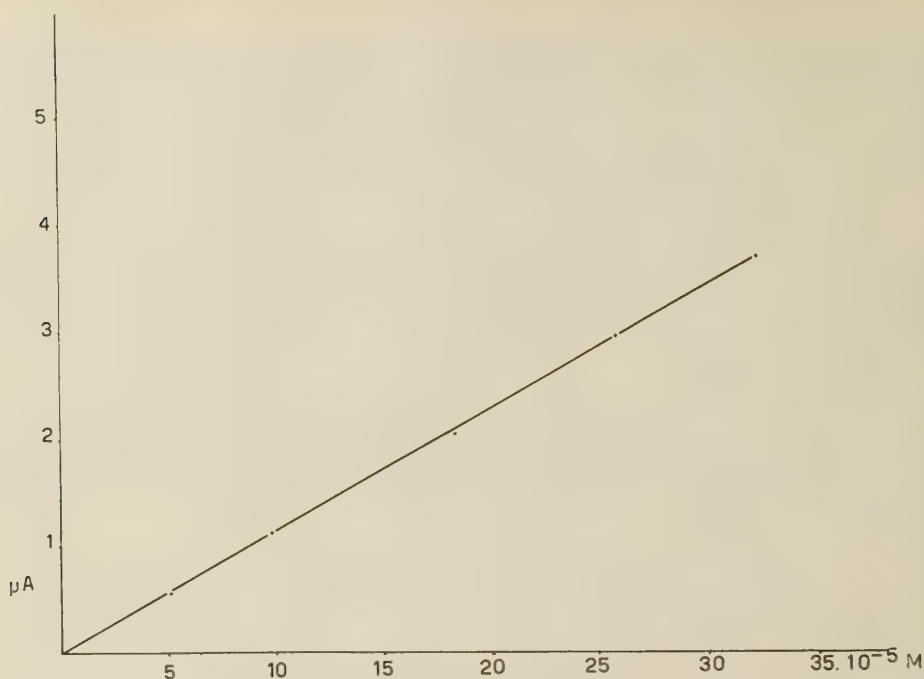


Fig. 1. - Diagramma di taratura del nitroso derivato dal sale R in soluzione ammoniacale (NH_4Cl 0,1 N— NH_3 0,5 N: pH=9) a 18° . $K=i/C=8,792 \cdot 10^{-5} \mu\text{A/gr. mole/l.}$

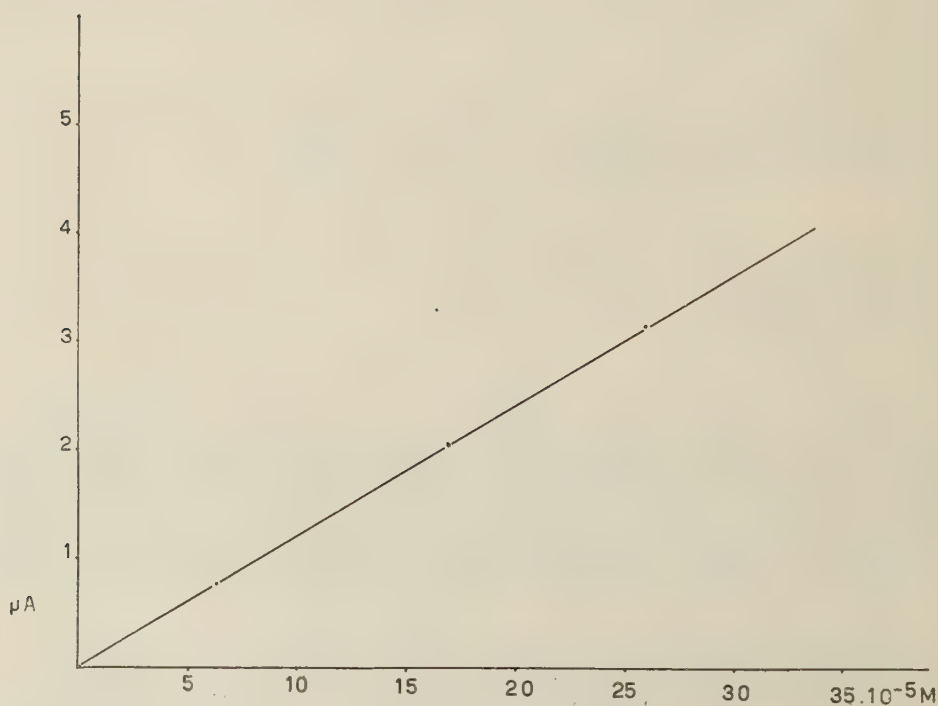


Fig. 2. - Diagramma di taratura del nitroso derivato del sale R in soluzione acetica (CH_3COOH 0,1 N— CH_3COONa 0,1 N: pH=4,7) a 18° . $K=i/C=8,325 \cdot 10^{-5} \mu\text{A/gr. mole/l.}$

bivalente e che presenta un coefficiente di diffusione⁽¹²⁾ $D_{18} = 1,98 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$. I risultati del confronto furono i seguenti:

ossigeno: altezza del gradino = mm 43, per una concentrazione $2,5 \cdot 10^{-4} \text{ M}$ ca;

nitroso derivato del sale R: altezza del gradino = 26,5 mm, per una concentrazione $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ M}$.

Di conseguenza per il derivato nitroso del sale R, $D_{18} = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$, in ottimo accordo con quello calcolato direttamente dalla equazione di Ilkovič.

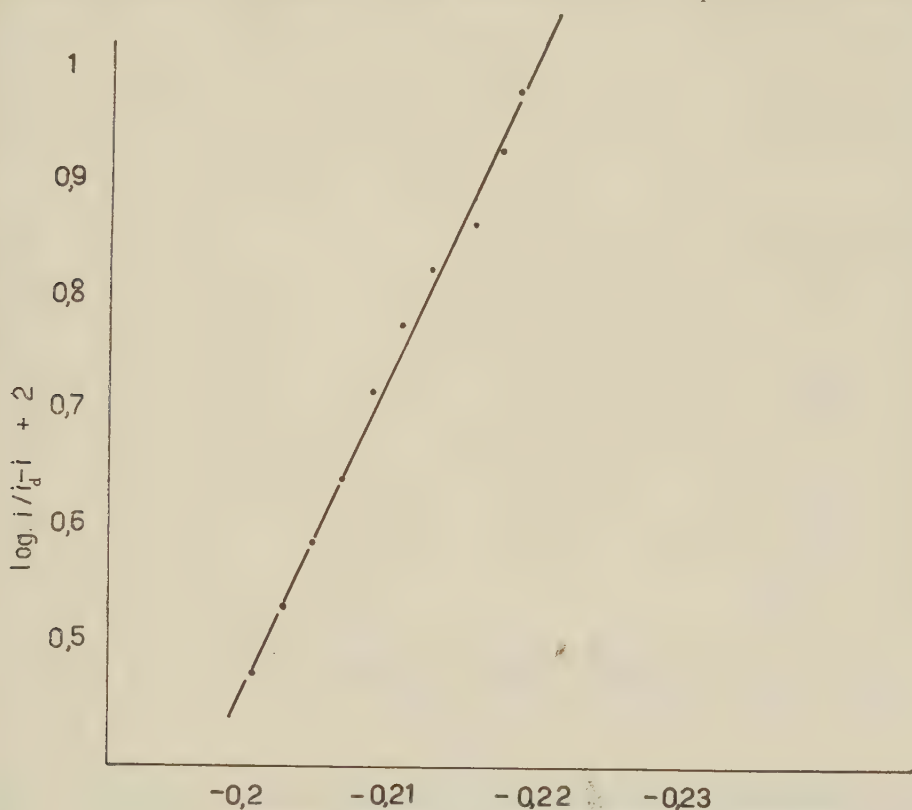


Fig. 3. - Diagramma $\log(i/i_d - i)/\pi$ per la soluzione base ammoniacale.

Dai polarogrammi di taratura, tenuto conto della caduta ohmica della cella (la soluzione base ammoniacale presentava una resistenza di 503Ω) si è ricavato per il potenziale di semigradino un valore di $-0,264 \text{ V}$ (rispetto E.C.N.).

Nella seconda parte della tabella I riportiamo i dati relativi alle misure eseguite nelle soluzioni tampone di acetato. Le altezze dei gradini ottenuti in questa soluzione base risultarono quasi eguali a quelle della soluzione ammoniacale e si può prevedere che il coefficiente D debba avere un valore di poco diverso da quello nella soluzione C di Hohn, il capillare usato essendo stato il medesimo.

Il potenziale anodico della cella contenente la soluzione tampone di acetato, presentava un valore pari a $-0,137 \text{ V}$. (rispetto all'elettrodo a calomelano nor-

(12) E. A. MOELWYN-HUGHES, «Handbuch der Enzymologie», 1, 222 (1940).

male): risulta quindi che il potenziale di semigradino sperimentale deve venir diminuito di detto valore, ottenendosi così un $\pi_{1/2} = -0,013$ V., perfezionato in $-0,012$ V. in base al calcolo della caduta ohmica della cella.

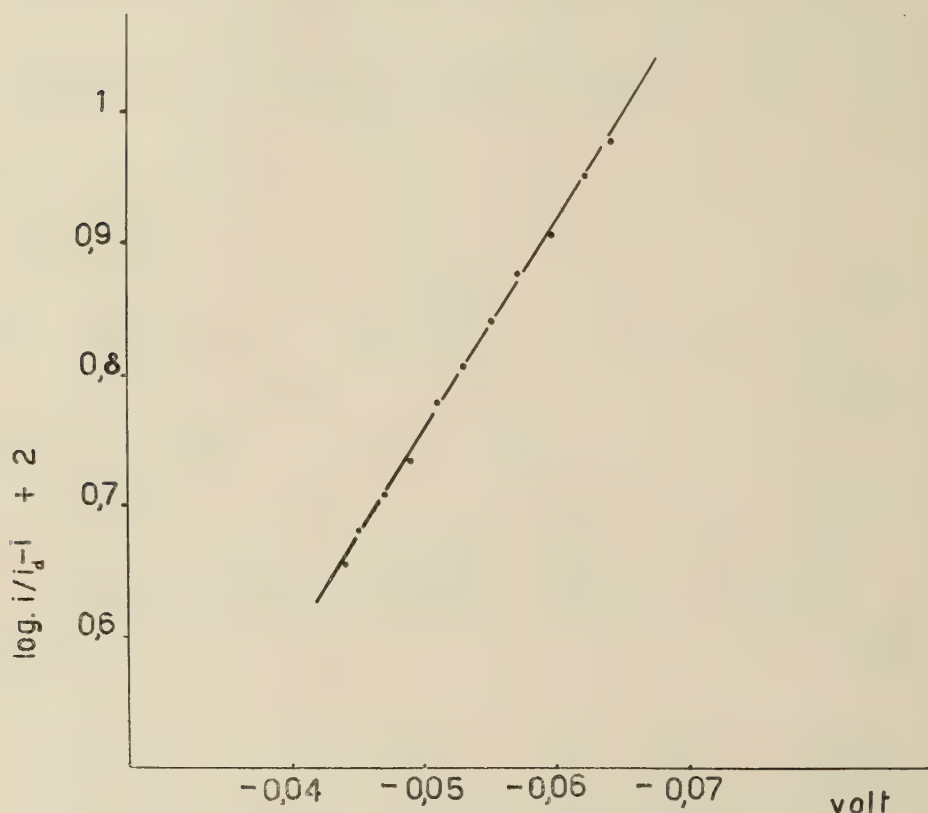


Fig. 4 - Diagramma $\log (i/i_d - i)/\pi$ per la soluzione acetica.

I potenziali di inizio del gradino polarografico relativi a due curve di concentrazione 1:4,12 sono risultati i seguenti:

curva I: $\pi = +0,094$ V.

curva II: $\pi = +0,074$ V.

Da questi valori, mediante la relazione (1), si calcola un valore di n pari a 1,83. Il valore di $m^{2/3} t^{1/6}$ risultò $2,41 \text{ mgr}^{2/3} \text{ sec}^{-1/2}$; la costante della corrente di diffusione:

$$I = \frac{\bar{i}_d}{C m^{2/3} t^{1/6}} = 5,34$$

in base all'equazione (2) si può così calcolare un valore per $D_{18} = 1,94 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$.

Le figure 1 e 2 mostrano il diagramma di taratura del derivato nitroso del sale R nelle soluzioni ammoniacali e acetica rispettivamente e le figure 3 e 4 il diagramma $\lg (i/i_d - i)/\pi$ per la determinazione della valenza del processo nelle suddette soluzioni base.

Chimica. — *Misura polarografica dell'attività interfasele degli esa-cloro-cicloesani isomeri*^(*). Nota di FELIPE LUCENA e ELENA GAGLIARDO, presentata^(**) dal Corrisp. G. SEMERANO.

Numerose ricerche sono state compiute allo scopo di stabilire la costituzione delle inositi, in vista soprattutto dell'importanza biologica posseduta da alcune delle forme isomere in cui l'esa-ossi-cicloesano può presentarsi⁽¹⁾.

La recente scoperta delle elevate proprietà insetticide possedute da uno dei cinque isomeri finora conosciuti (dei sedici teoricamente possibili)⁽²⁾ dell'1, 2, 3,

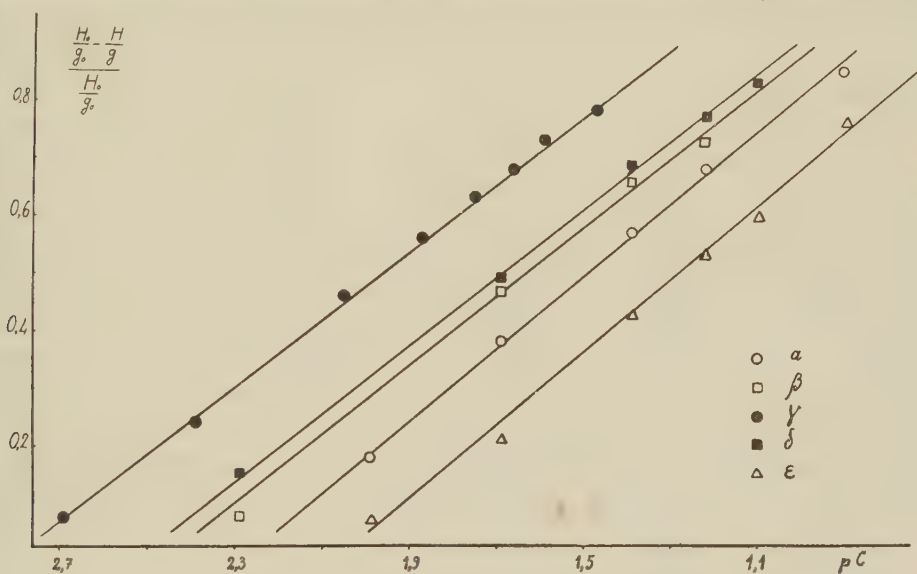


Fig. 1.

4, 5, 6-esa-cloro-cicloesano, ha accresciuto notevolmente in questi ultimi anni l'interesse per il problema della stereoisomeria dei derivati esa-sostituiti del cicloesano e richieste nuove indagini sulle relazioni esistenti tra potere insetticida, configurazione molecolare e comportamento chimico-fisico generale.

L'isomeria degli esa-cloro-cicloesani è particolarmente interessante perché in questo caso una lieve differenza di costituzione chimica è accompagnata da notevoli differenze nel comportamento chimico-fisico, fatto questo senza dubbio dovuto al volume e alle proprietà polarizzanti dell'atomo di cloro.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università. Centro di studio per la Polarografia del C. N. R., Padova.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

(1) A. CONTARDI, «Chimica e Industria», 31, 37-41 (1949).

(2) K. C. KANER, R. B. DU VALL e F. N. ALQUIST, «Ind. Eng. Chem.», 39, 1335-8 (1947); BLEKKINGH, «Rec. trav. chim.», 68, 345 (1949); F. VALENZA, «Chimica e Industria», 31, 113-7 (1949); C. V. BOWEN, «U. S. Dept. Agr., Bur. Entomol. and Plant Quarantine», E-755 (1948) 38. p.

Ai fatti già noti a Van der Linden ⁽³⁾, che per primo descrisse quattro di questi isomeri, e che furono confermati da Slade ⁽⁴⁾, si sono aggiunti, più recentemente quelli che si riferiscono al comportamento elettrochimico ⁽⁵⁾, spettroscopico ⁽⁶⁾, cinetico ⁽⁷⁾, dipolare ^(8, 9, 10, 11, 12), e roentgenografico ⁽¹³⁾.

Così, ad esempio, l'isomero γ , che è quello cui spetta la maggior parte dell'attività battericida delle miscele tecniche, si dimostra di gran lunga come il più attivo dal punto di vista elettrochimico potendo venire dealogenato a valori relativamente bassi del potenziale catodico, a differenza degli isomeri α , β , δ ed ϵ , che sono pure dotati di scarsa attività battericida.

Altre proprietà chimico-fisiche, in parte già studiate, ma che meriterebbero ulteriore considerazione, sono il momento dipolare, l'attività ottica, la repulsione tra gli atomi di cloro e la simmetria delle varie forme cristalline; sull'ultima di esse non si può dire che si abbiano ancora idee molto sicure, se si escludono le conclusioni tratte sulla forma β alla quale è stato relativamente facile assegnare la costituzione più simmetrica possibile.

Di fronte a questo stato di cose non deve meravigliare se anche l'interpretazione delle notevoli differenze esistenti nell'attività battericida non abbia trovato una interpretazione soddisfacente. Mentre infatti era sembrato relativamente facile in un primo momento ⁽⁴⁾ di assegnare all'isomero γ la struttura della mesoinosite, in seguito alle ricerche di Melander ⁽⁸⁾, Hassel e collaboratori ⁽⁹⁾, Hassel e Taarland ⁽¹⁰⁾, Van Vloten ⁽¹³⁾, Rolla ⁽¹¹⁾, le configurazioni precedenti si devono considerare ormai superate. E sebbene le ultime ricerche roentgenografiche abbiano fatto balenare la speranza di essere sulla buona strada per la spiegazione della costituzione dei diversi isomeri, l'interpretazione della differente azione battericida resta tuttora insoluta. Le misure cinetiche di Cristol e di Jannelli e Gagliardo ⁽⁷⁾ sulla velocità di dealogenazione in soluzione alcalina e quelle di Rolla sul momento

(3) VAN der LINDEN, «Ber.», 45, 236 (1912).

(4) R. E. SLADE, «Chemistry & Industry», 1945, 314.

(5) G. DRAGT, «Anal. Chem.», 20, 737-40 (1948); G. B. INGRAM e H. K. SOUTHERN, «Nature», 161, 437-8 (1948); K. SCHWABE, «Z. Naturforsch.», 3, 217 (1948); M. SUZUKI e M. NAKAJIMA, «Botyu-Kagaku (Sci. Insect Control)», n. 10, 31-5 (1948); M. NAKAJIMA, M. SUZUKI, Y. KATUMURA e T. OKUBO, «Botyu-Kagaku (Sci. Insect Control)», n. 11, 3-11 (1949); A. YAMAMOTO, T. KAMESAKI e M. KASAHARA, «Botyu-Kagaku (Sci. Insect Control)», n. 12, 1-4 (1949); H. KELLER, M. HOCHWEBER e von H. HALBAN, «Helv. Chim. Acta», 29, 761-9 (1946).

(6) L. W. DAASH, «Anal. Chem.», 19, 779-85 (1947); D. H. WHIFFEN e H. W. THOMPSON, «J. Chem. Soc.», 1948, 1420-2.

(7) S. J. CRISTOL, «J. Am. Chem. Soc.», 69, 338-42 (1947); L. JANNELLI e E. GAGLIARDO, «Gazz. chim. ital.» (in corso di stampa); L. JANNELLI, «Gazz. chim. ital.» (in corso di stampa).

(8) MELANDER, «Svensk. Kem. Tids.», 58, 231 (1946).

(9) HASSEL e collaboratori «Tids. Kjemi Bergvesen», 10, 126 (1930).

(10) HASSEL e TAARLAND, «Tids. Kjemi Bergvesen Met.», 2, 6 (1942).

(11) M. ROLLA, «Gazz. chim. ital.», 79, 491-502 (1949).

(12) E. HETLOT, «Acta Chem. Scand.», 2, 678-82 (1948).

(13) VAN VLOTEN, KUISSINK, STRIJK e BIJVOET, «Nature», 162, 771 (1948); J. M. BIJVOET, «Rec. trav. chim.», 67, 777-81 (1948); P. FONTANA e A. M. MARIANGELI, «Chimica e Industria», 31, 128 (1949).

dipolare ⁽¹¹⁾ hanno portato alla conclusione che questa diversità non possa essere ascrivita nè a una diversa velocità di eliminazione di acido cloridrico, nè ad una differenza del momento polare della molecola.

TABELLA I.

Esp. N.	pC (C in mM/l)	$H_{max.}$ in mm	$H_{grad.}$ in mm	(H/g)	$\frac{(H_0/g_0) - (H/g)}{(H_0/g_0)}$
<i>isomero α</i>					
1	—	62,7	18,1	3,46	—
2	1,99	52,3	18,4	2,84	0,18
3	1,69	39,2	18,3	2,14	0,38
4	1,39	27,8	18,6	1,49	0,57
5	1,22	20,8	18,7	1,11	0,68
6	0,90	9,7	18,6	0,52	0,85
<i>isomero β</i>					
7	—	80,5	18,7	4,30	—
8	2,29	73,5	18,6	3,95	0,08
9	1,99	65,1	18,7	3,49	0,19
10	1,69	42,4	18,6	2,28	0,47
11	1,39	27,5	18,7	1,47	0,66
12	1,22	21,0	18,0	1,17	0,73
13	1,10	14,1	18,7	0,75	0,82
<i>isomero γ</i>					
14	—	60,4	18,0	3,33	—
15	2,69	57,0	18,5	3,08	0,07
16	2,39	47,8	18,8	2,54	0,24
17	2,05	34,3	18,3	1,82	0,46
18	1,87	26,5	18,3	1,45	0,56
19	1,75	22,8	18,6	1,22	0,63
20	1,66	18,8	18,3	1,03	0,68
21	1,59	16,6	18,4	0,90	0,73
22	1,47	13,5	18,2	0,74	0,78
<i>isomero δ</i>					
23	—	71,2	18,1	3,92	—
24	2,29	61,7	18,6	3,32	0,15
25	1,69	36,9	18,4	2,00	0,49
26	1,39	22,9	18,6	1,23	0,69
27	1,22	16,5	18,6	0,89	0,77
28	1,10	12,0	18,5	0,65	0,83
<i>isomero ϵ</i>					
29	—	67,4	18,5	3,64	—
30	1,99	62,5	18,5	3,38	0,07
31	1,69	52,9	18,5	2,86	0,21
32	1,39	38,5	18,5	2,08	0,43
33	1,22	31,8	18,5	1,72	0,53
34	1,10	26,7	18,5	1,44	0,60
35	0,90	19,7	19,2	1,05	0,71

TABELLA II.

Esp. N.	pC (C in mM/l)	$H_{max.}$ in mm	$H_{grad.}$ in mm	(H/g)	$\frac{(H_0/g_0) - (H/g)}{(H_0/g_0)}$
<i>isomero α</i>					
36	—	64,6	15,9	4,06	—
37	1,99	52,8	16,0	3,30	0,19
38	1,81	45,5	15,9	2,86	0,29
39	1,69	39,4	15,6	2,52	0,38
40	1,59	35,2	16,0	2,20	0,46
41	1,52	31,5	16,4	1,92	0,53
42	1,45	27,8	16,5	1,68	0,59
43	1,39	25,8	16,3	1,58	0,61
44	1,30	22,1	15,5	1,42	0,65
45	1,22	18,5	15,5	1,19	0,71
46	1,16	13,9	16,0	0,87	0,78
<i>isomero β</i>					
47	—	55,4	13,1	4,22	—
48	1,99	37,7	14,4	2,61	0,38
49	1,81	30,7	14,3	2,14	0,49
50	1,69	25,9	14,3	1,81	0,57
51	1,59	22,4	14,2	1,57	0,63
52	1,52	19,6	14,3	1,37	0,67
53	1,39	16,0	14,3	1,11	0,74
54	1,22	10,9	14,5	0,75	0,82
<i>isomero γ</i>					
55	—	63,0	15,7	4,01	—
56	2,45	58,0	15,8	3,67	0,08
57	2,19	47,3	16,9	2,79	0,30
58	2,03	41,3	16,9	2,44	0,39
59	1,92	36,0	17,4	2,06	0,49
60	1,80	33,2	18,2	1,82	0,55
61	1,69	27,9	17,9	1,55	0,61
62	1,60	22,6	17,0	1,32	0,67
63	1,47	18,0	17,4	1,03	0,74
<i>isomero δ</i>					
64	—	62,2	13,8	4,50	—
65	2,29	52,7	14,0	3,76	0,16
66	1,99	45,9	14,2	3,23	0,28
67	1,81	37,8	14,6	2,58	0,43
68	1,69	32,0	14,3	2,23	0,50
69	1,59	27,3	14,6	1,86	0,59
70	1,52	23,3	14,5	1,60	0,64
71	1,39	19,0	14,7	1,29	0,71
72	1,22	13,0	14,6	0,89	0,80
<i>isomero ε</i>					
73	—	64,7	13,5	4,79	—
74	1,99	54,3	13,7	3,96	0,17
75	1,69	43,9	14,1	3,11	0,35
76	1,52	34,6	14,2	2,43	0,49
77	1,39	29,3	14,2	2,06	0,57
78	1,30	25,5	14,3	1,78	0,63
79	1,22	22,3	14,4	1,54	0,68
80	1,10	17,4	14,9	1,16	0,76

Tenendo presente che molto spesso l'attività biologica di una sostanza è in stretta relazione con le sue proprietà interfasali⁽¹⁴⁾, si è voluto stabilire se l'attività nettamente differente dell'isomero γ corrispondesse a un più elevato adsorbimento di questo isomero alle superfici interfasali.

Dato che il metodo polarografico si era già dimostrato così utile nella differenziazione elettrochimica dell'isomero γ e che esso permette anche il confronto dell'attività di superficie delle varie sostanze, siamo ricorsi a questo metodo per stabilire le eventuali differenze esistenti nell'attività interfasale dei cinque esa-clorocicloesani isomeri.

Come è noto, l'attività interfasale di una sostanza si studia polarograficamente determinando l'azione che la sostanza esercita in piccole tracce sull'altezza dei massimi dell'ossigeno o di altre adatte sostanze. La tecnica che si usa è fondamentalmente la seguente: si cerca un solvente nel quale la sostanza presenta una solubilità sufficiente (dato che si opera in soluzioni molto diluite, questo non è di solito difficile da realizzare) e nel quale l'ossigeno presenti massimi elevati di corrente e si fanno aggiunte della soluzione della sostanza in esame tali da provocare un progressivo abbassamento del massimo.

Il confronto dell'attività di superficie viene quindi effettuato o stabilendo il valore dei coefficienti caratteristici dell'equazione che rappresenta la relazione tra altezza del massimo e concentrazione della sostanza attiva⁽¹⁵⁾, o ricavando i valori delle concentrazioni per le quali il massimo della soluzione base originaria, viene ridotto a metà⁽¹⁶⁾.

PARTE SPERIMENTALE. - Data la maggiore solubilità in acetone dei cinque isomeri, prime esperienze erano state rivolte alla ricerca delle condizioni migliori di sviluppo dei massimi dell'ossigeno da mezzo acetone; i risultati ottenuti, sia variando la quantità di acqua aggiunta all'acetone, sia la natura e la concentrazione dell'elettrolita base (cloruro di litio o cloruro ammonico), sono stati però modesti perchè i massimi dell'ossigeno risultanti erano più alti della normale corrente di diffusione.

Risultati migliori si sono invece ottenuti con alcool metilico puro o alcool metilico e acqua come solventi. Perchè la soluzione non presentasse una eccessiva resistenza ohmica, ma fosse però dotata ancora di un notevole potere solvente per gli isomeri in esame, la scelta si è orientata verso una miscela acqua-alcool metilico a volumi circa uguali. Per quanto si riferisce alla scelta dell'elettrolita base, le esperienze atte a stabilire la concentrazione più opportuna di esso allo scopo di ottenere i massimi dell'ossigeno aventi la massima altezza, hanno posto in evidenza che soluzioni di cloruro ammonico molto diluite presentano una discontinuità sul tratto iniziale del massimo, mentre quelle più concentrate non risultano più lineari ma si incurvano nettamente molto prima della caduta del massimo.

Soluzione conveniente è risultata quella costituita da dieci parti di alcool metilico, dieci parti di acqua e 0,7 parti di cloruro ammonico 0,1 N (in volume).

(14) H. VELDSTRA, «Bull. Soc. chim. biol.», 31, p. 29 (1949).

(15) G. SEMERANO, «Arch. sci. biol. (Italy)», 20, 329-42 (1934).

(16) J. RASCH, «Collection Czechoslov. Chem. Commun.», 1, 560-70 (1929).

I risultati ottenuti aggiungendo a 20 cm³ della soluzione predetta piccoli volumi della soluzione dei vari isomeri sciolti in alcool metilico sono riportati dalle seguenti tabelle e figure. In esse le concentrazioni sono espresse in millimole per litro. Le rispettive soluzioni più diluite venivano ottenute a partire da soluzioni originarie $2,06 \cdot 10^{-3}$ M allo scopo di evitare che già in partenza i fenomeni di adsorbimento alle pareti del recipiente esercitassero una influenza sensibile. Le due serie di tabelle e figure si riferiscono a due serie di esperienze compiute a notevole distanza di tempo l'una dall'altra allo scopo di stabilire l'eventuale esistenza di alterazione nei rapporti reciproci di attività interfase dei cinque isomeri con la loro conservazione allo stato di soluzione.

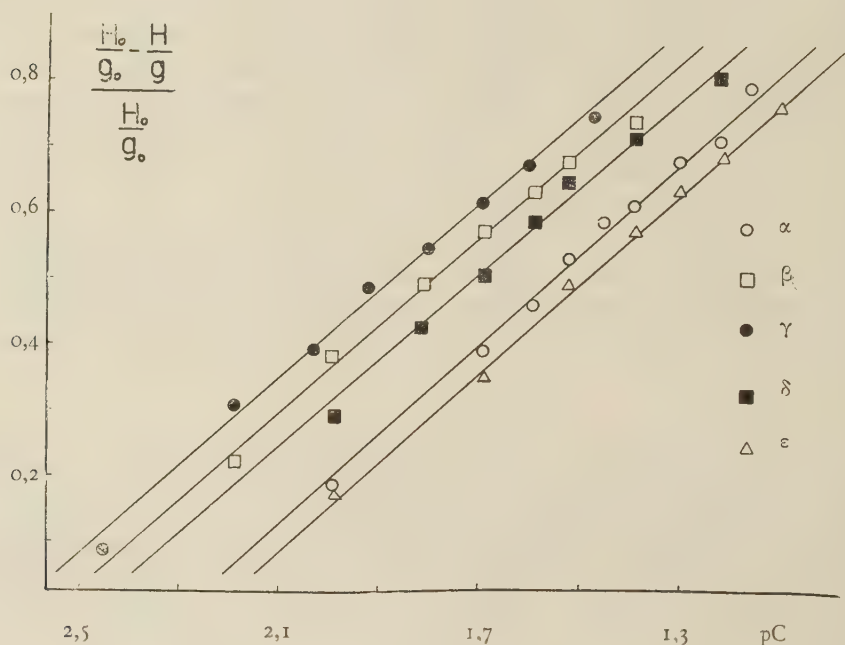


Fig. 2.

Le figure rappresentano la relazione esistente tra i pC ($\equiv -\log C$) e gli abbassamenti relativi del massimo. Nel calcolo di questi ultimi si è creduto utile riferirsi all'altezza di relativi gradini in modo da eliminare l'influenza di eventuali piccole variazioni delle condizioni sperimentali da curva a curva. È perciò che nelle tabelle e nelle figure viene riportato il valore $(H_0/g_0) - (H/g)/(H_0/g_0)$ dove H_0 è l'altezza del massimo misurato a partire dal tetto del gradino, H la medesima altezza allorché alla soluzione è stata aggiunta la concentrazione C del relativo isomero, g_0 e g rappresentano le altezze dei gradini di diffusione corrispondenti a questi massimi.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. - Come risulta dalle figure, si può ritenere che esiste una relazione sufficientemente lineare tra i pC e i $\left(\Delta \frac{H}{g}\right)_{rel.}$.

Le pendenze delle rette si mantengono costanti nel passare da un isomero ad un altro, quella che cambia è la posizione di esse sulla scala dei pC . A questo proposito è da osservare che, come prevedevamo, il γ isomero è nettamente più attivo degli altri. Rappresentando con un'equazione la relazione esistente tra $\left(\Delta \frac{H}{g}\right)_{rel.}$ e il pC , si avrebbe: $\left(\Delta \frac{H}{g}\right)_{rel.} = a - b \cdot pC$ con b costante per i diversi isomeri e a variabile da isomero ad isomero. Utilizzando l'equazione valevole per i diversi isomeri si giunge facilmente a poter calcolare il valore del pC corrispondente ad un abbassamento del 50% del massimo dell'ossigeno.

La tabella seguente riporta i valori ottenuti.

TABELLA III.

isomero	I	pC per $\left(\Delta \frac{H}{g}\right)_{rel.} = 1/2$
		(C in mM/l)
		II
α	1,50	1,55
β	1,64	1,80
γ	1,99	1,89
δ	1,67	1,70
ϵ	1,27	1,51

Questi valori dimostrano che, anche dopo lunga conservazione allo stato di soluzione, i rapporti relativi di attività interfase dei cinque isomeri si mantengono sensibilmente invariati; fa soltanto eccezione la coppia β e δ , ma ciò ha la sua ragione perchè, come è noto e come è anche risultato nel corso delle nostre esperienze cinetiche, sulle quali si riferisce altrove⁽⁷⁾, l'isomero δ è sempre impuro di γ , dati i suoi rapporti di solubilità. Siccome quest'ultimo isomero è di gran lunga il più attivo si spiega agevolmente come nella prima serie il composto δ sia risultato più attivo del β , a differenza di quanto risulta dai valori della seconda serie, perchè nel primo caso si è impiegato il prodotto δ del commercio e nel secondo si è proceduto alla purificazione per cristallizzazione frazionata da miscela di cloroformio ed etere di petrolio; il prodotto risultante era sicuramente puro come dimostrano i valori ottenuti nelle misure cinetiche e i diagrammi polarografici esenti completamente dal gradino del γ isomero che invece era presente nel primo campione (20% circa di γ isomero).

Si può quindi concludere che i cinque isomeri dell'esa-cloro-cicloesano si ordinano nella seguente serie di attività superficiale decrescente: $\gamma > \beta > \delta > \alpha > \epsilon$.

Il risultato è alquanto strano per quanto si riferisce all'attività del composto β , che a detta dei risultati roentgenografici e di momento dipolare, dovrebbe essere il più simmetrico e quindi il meno attivo; e ciò si riscontra effettivamente studiando la cinetica dei processi di dealogenazione.

L'attività relativa del γ isomero si riduce alquanto dopo un lungo periodo di conservazione allo stato di soluzione; ciò non sembra però che si possa attribuire a una trasformazione strutturale del composto perchè determinazioni polarografiche quantitative porterebbero ad escluderlo.

Certo che il significato teorico dei risultati delle misure dei massimi polarografici non è ancora molto chiaro. Dato il parallelismo riscontrato però tra attività di superficie ricavata con il metodo polarografico e con altri procedimenti, le conclusioni alle quali si è giunti nello studio del γ isomero debbono avere in fondo un significato concreto del quale occorre tener conto nella interpretazione dell'attività biologica di questa sostanza.

Chimica fisica. — *Applicazione di una migliore approssimazione di calcolo alla valutazione delle frequenze Raman del gruppo carbonilico coniugato* (*). Nota di EOLO SCROCCO e P. CHIORBOLI, presentata (**) dal Socio G. B. BONINO.

In un precedente lavoro ⁽¹⁾ Bonino e Scrocco hanno mostrato come per un certo numero di composti carbonilici sia possibile, in prima approssimazione, dedurre la così detta « frequenza propria » del gruppo C=O legato in molecola e coniugato a doppi legami etilenici ovvero a nuclei aromatici, utilizzando i valori degli indici di legame π calcolati con il noto metodo degli orbitali.

I risultati di questo calcolo erano interessanti, tanto che i citati Autori sono ritornati recentemente sullo stesso argomento per approfondire la discussione delle approssimazioni usate ⁽²⁾.

L'approssimazione di calcolo utilizzata in quel lavoro era la cosiddetta approssimazione [A] ⁽³⁾, per la quale si pone $\beta_{C=O} = \beta_{CC}$ e si trascura la differenza tra le elettronegatività degli atomi di carbonio e di ossigeno del gruppo carbonilico. Si eguaglia cioè l'integrale coulombiano dell'atomo di ossigeno carbonilico a quello dell'atomo di carbonio ordinario legato in molecola.

Gli Autori citati hanno discusso brevemente nel già ricordato recentissimo lavoro ⁽²⁾ una migliore scelta delle grandezze caratteristiche di questo calcolo. In primo luogo hanno valutato un più ragionevole valore del rapporto $\beta_{CO}/\beta_{CC} = \eta$ (posto eguale ad 1 nella approssimazione di tipo [A]) partendo da dati sperimentali termochimici inerenti ai « legami » C=O e C=C. In secondo luogo i detti Autori, a seguito di una breve discussione sulle cosiddette « elettronegatività » termochimiche di Pauling, hanno anche dedotto un valore delle differenze tra gli integrali coulombiani degli atomi di carbonio e di ossigeno riferibili sempre alle funzioni d'onda π . Come si sa questa differenza è trascurata nella approssimazione di tipo [A].

(*) Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche (presso l'Istituto Chimico « G. Ciamician » della Università di Bologna).

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) Ved. questi « Rendiconti » (VIII), vol. VI, 421 (1949).

(2) Ved. questo fasc. di « Rendiconti », p. 183.

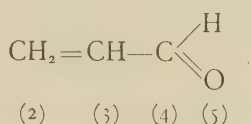
(3) BONINO e ROLLA, « Rend. Acc. Linc. » (VIII), vol. V, 220 (1948)

L'equazione secolare del problema viene costruita, come è noto, in base a relazioni del tipo:

$$(\alpha_r - \epsilon_j) c_{rj} + \sum_s \beta_{rs} c_{sj} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots)$$

dove i β_{rs} sono gli integrali di risonanza relativi ai legami rs , e α_r è la differenza tra l'integrale coulombiano dell'atomo r e lo stesso integrale che compete all'ordinario atomo di carbonio legato in molecola. La grandezza ϵ_j rappresenta la differenza fra l'energia E_j del livello molecolare e l'integrale coulombiano dell'atomo di carbonio.

Per esempio per la molecola di acroleina⁽⁴⁾:



l'equazione secolare verrà scritta, ponendo

$$\rho_j = -\frac{\epsilon_j}{\beta_{CC}} \quad ; \quad \eta = \frac{\beta_{CO}}{\beta_{CC}} \quad ; \quad h = -\frac{\alpha_o}{\beta_{CC}}$$

nel modo seguente:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & \rho & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & \rho & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & \rho & \eta \\ 5 & 0 & 0 & \eta & \rho - h \end{array} = 0.$$

Facilmente si possono costruire le equazioni secolari per le altre molecole di aldeidi e chetoni studiate secondo questa approssimazione che chiameremo [C].

Nel citato lavoro di Bonino e Scrocco⁽²⁾ sono stati precisati, in base alle discussioni sovra ricordate, i seguenti valori approssimati di η e di h :

$$\eta = 2 \quad ; \quad h = -1, 2.$$

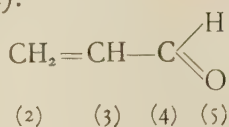
Con questi valori noi abbiamo calcolato le equazioni secolari di due tipi di strutture di composti carbonilici, una riferibile ad aldeidi o chetoni non saturi alifatici e l'altra riferibile allo scheletro dell'aldeide benzoica ovvero dell'acetofenone.

Si sono dedotti così i valori dei livelli energetici, espressi con le grandezze ρ_j , e i valori dei coefficienti delle combinazioni lineari dei vari orbitali molecolari, c_{rj} . Nelle seguenti tabelle sono dati questi valori per ciascuno dei due tipi molecolari studiati, nonché, per comodità del lettore, i quadrati dei coefficienti c_{rj} normalizzati. I valori $\rho < 0$ rappresentano, come al solito, i livelli di « legame », mentre i valori $\rho > 0$ rappresentano livelli molecolari di « antilegame ».

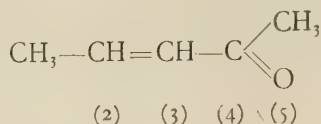
(4) La numerazione degli atomi in questa formula e nelle formule seguenti è stata scelta in vista di una migliore unificazione dei simboli usati in questa Nota e in Note di prossima pubblicazione.

Tipo I:

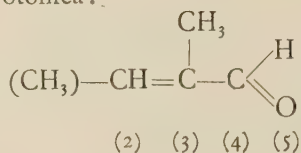
a) Acroleina (propenale):



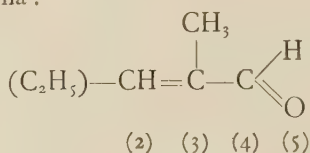
b) Etilidenacetone:



c) Aldeide 2-metilcrotonica:



d) Metil-etil-acroleina:

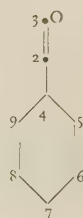


ρ_j		c_2	c_3	c_4	c_5
1,95780	c_r	0,24939	— 0,48825	0,70652	— 0,44747
	c_r^2	0,06219	0,23839	0,49917	0,20023
0,704136	c_r	0,70178	— 0,49415	— 0,35383	0,37161
	c_r^2	0,49249	0,24418	0,12519	0,13812
— 1,021573	c_r	0,66163	0,67589	0,02885	— 0,32342
	c_r^2	0,43775	0,45683	0,00083	0,10460
— 2,840362	c_r	0,08662	0,24603	0,61220	0,74643
	c_r^2	0,00750	0,06053	0,37479	0,55716

Tipo II:

a) Aldeide benzoica:

b) Acetofenone:



ρ_j	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9
2,246,0	c_1	— 0,48016	0,27864	0,52135	— 0,34549	0,25477	— 0,22683	0,25477	— 0,34549
	c_2^2	0,23055	0,07764	0,27181	0,11936	0,06491	0,05145	0,06491	0,11936
1,63954	c_1	0,52312	— 0,36850	— 0,12079	— 0,16254	0,38728	— 0,47242	0,38728	— 0,16254
	c_2^2	0,27365	0,13579	0,01459	0,02642	0,14999	0,22318	0,14999	0,02642
I	c_1	0	0	0	0,5	— 0,5	0	0,5	— 0,5
	c_2^2	0	0	0	0,25	0,25	0	0,25	0,25
0,760904	c_1	— 0,35118	0,35817	— 0,44914	0,34646	0,18551	— 0,48762	0,18551	0,34646
	c_2^2	0,12333	0,12829	0,20173	0,12003	0,03441	0,23776	0,03441	0,12003
— I	c_1	0	0	0	0,5	0,5	0	— 0,5	— 0,5
	c_2^2	0	0	0	0,25	0,25	0	0,25	0,25
— 1,014775	c_1	0,02467	— 0,26633	0,55753	0,27056	— 0,28297	— 0,55772	— 0,28297	0,27056
	c_2^2	0,00061	0,07093	0,31084	0,07320	0,08007	0,31104	0,08007	0,07320
— 1,956546	c_1	— 0,10170	— 0,26886	0,33891	0,38240	0,40928	0,41836	0,40928	0,38240
	c_2^2	0,01034	0,07229	0,11486	0,14623	0,16751	0,17502	0,16751	0,14623
— 2,87557	c_1	0,60127	0,71769	0,29357	0,12147	0,05572	0,03875	0,05572	0,12147
	c_2^2	0,36153	0,51508	0,08618	0,01475	0,00311	0,00150	0,00311	0,01475

Dai valori dei coefficienti corrispondenti ai livelli che intervengono a costituire lo stato fondamentale della molecola sono stati dedotti gli indici di legame $I_{C=O}$ del gruppo $C=O$ per i due tipi di molecole, utilizzando a ciò le indicazioni del già citato lavoro di Bonino e Scrocco.

Da questi valori degli indici di legame siamo risaliti ai valori più approssimati delle frequenze del gruppo $C=O$ per i vari composti.

Gli indici di legame $C=O$ secondo questa approssimazione $[C]$ ($h = -1, 2$; $\eta = 2$) sono:

a) per il tipo molecolare I) $I_{C=O} = 0,8953$;

b) per il tipo molecolare II) $I_{C=O} = 0,9046$.

Nella tabella seguente riportiamo i valori delle frequenze di oscillazione del gruppo $C=O$ calcolati secondo le due approssimazioni $[A]$ e $[C]$ insieme con le frequenze Raman sperimentalmente determinate.

Frequenze di oscillazione del gruppo $C=O$ calcolate e trovate.

N. d'ord.	Composto	$\nu_{C=O}$ calcol. (cm^{-1})		$\nu_{C=O}$ trovato (cm^{-1})	Note
		app. $[A]$; $h=0$; $\eta=1$	app. $[C]$; $h=-1, 2$; $\eta=2$		
1	acroleina	1683	1686	1692	(1)
2	aldeide 2-metilcrotonica . . .	1683	1686	1689	(1)
3	metil-etil-acroleina	1683	1686	1688	(2)
4	etilidenacetone	1683	1686	1668	(3)
5	aldeide benzoica	1694	1690,4	1696	(4)
6	acetofenone	1694	1690,4	1679	(4)

(1) BOURGUEL, «C. R.», 195, 311 (1932).

(2) GREDY, «Bull. Soc. Chim. France», 1, 1029 (1935); 2, 1951 (1935).

(3) KOHLRAUSCH, PONGRATZ, «Zeits. phys. Chem.», 27, 192 (1934).

(4) KOHLRAUSCH, PONGRATZ, «Wien. Ber.», 143, 288 (1934).

Dalla tabella si vede che la correzione portata dalla applicazione dell'approssimazione $[C]$, con $h = -1, 2$ e $\eta = 2$, porta un miglioramento già apprezzabile nel calcolo della frequenza di oscillazioni del gruppo $C=O$ per le aldeide alifatiche non sature che abbiamo esemplificato. Questa migliore approssimazione non riesce però ancora a renderci conto della notevole differenza che è stata riscontrata da Bonino e Scrocco tra le frequenze calcolata e trovata nel caso dell'etilidenacetone.

Nel caso dell'aldeide benzoica l'applicazione della approssimazione $[C]$ mette in evidenza una situazione di maggior complicazione sulla quale si dovrà ritornare in seguito. Ciò nondimeno si può già positivamente constatare che per l'aceto-

fenone l'applicazione dell'approssimazione [C] non riesce ad eliminare il notevole scarto tra calcolato e trovato.

Resta dunque confermato che nel caso dell'acetofenone, come anche in quello dell'etilidenacetone, lo scarto tra calcolato e trovato non dipende dall'aver trascurato nell'approssimazione [A] la differenza b tra le elettronegatività degli atomi di carbonio e di ossigeno del gruppo carbonilico e dall'aver posto eguali gli integrali di risonanza relativi ai legami $C=C$ e $C=O$.

Si accentua così l'interesse, già segnalato da Bonino e Scrocco⁽¹⁾, di indagare se tali differenze tra calcolato e trovato, che ordinariamente si riscontrano nel caso di chetoni e cioè nel caso di composti che portano un gruppo metilico direttamente legato al carbonio carbonilico, non debbano invece dipendere da fenomeni di « iperconiugazione » del metile stesso.

Geologia. — *Appunti geologici sul versante sinistro della media Val Camonica, dalla Val Palobbia alla Valle di Fa*^(*). Nota di BRUNO ACCORDI, presentata^(**) dal Corrisp. GB. DAL PIAZ.

GENERALITÀ. — Nelle estati del 1948 e del 1949 iniziai e proseguì, insieme al prof. S. Morgante, una serie di ricerche geologico-petrografiche ed il rilevamento alla scala 1:25.000 di un'aspra zona posta sulle pendici sudoccidentali del massiccio dell'Adamello, limitata a nord dalla linea Pizzo Badile-Ceto (corrispondente circa ad una linea di cresta), ad ovest dal fiume Oglio, a sud dal versante meridionale della Valle di Fa, a est da una linea spezzata che costituisce lo spartiacque da cui scendono, convergendo a ventaglio, la Valle di Braone, la Valle del Listino, la Valle della Monoccola e la Valle di Dois. Queste valli, che confluiscono — ad eccezione della prima — nella Val Paghera, formano essenzialmente la parte alta della zona in esame, compresa grosso modo tra le isoipse di 1000 e di 2700 metri; la parte bassa invece (fra 400 e 1000 metri circa), è formata dalla Val Palobbia, dalla Valle di Cobello, dalla Valle di Re e dalla Valle di Fa.

La mia opera è stata rivolta in modo particolare allo studio dei terreni sedimentari, e la presente Nota tratta appunto di questi. Il prof. Morgante si è invece occupato particolarmente delle osservazioni e dello studio delle formazioni eruttive e dei fenomeni di metamorfismo.

Il rilevamento non è ancora ultimato: esso è per ora limitato, nella parte più a sud, ad una larga fascia compresa tra il fiume Oglio e quota 1100 circa, mentre nella parte più a nord si spinge in vari punti fin oltre quota 2000. I terreni sedimentari però sono compresi in gran parte nella zona rilevata, eccettuata la parte alta del Pizzo Badile e qualche altro modesto lembo. Oltre a terminare le

(*) Lavoro compiuto nell'Istituto di Mineralogia e Geologia dell'Università di Ferrara e compreso nel programma del Centro Studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Università di Padova.

Ringrazio vivamente il prof. Gb. Dal Piaz, il prof. A. Bianchi e il prof. S. Morgante per gli aiuti ed i consigli.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

parti incompiute, occorrerà anche curare un ulteriore studio di dettaglio nei punti più interessanti e più complicati del territorio già rilevato.

La zona, che racchiude alcuni dei più interessanti fenomeni visibili nel massiccio dell'Adamello, non era mai stata esaminata a fondo; W. Salomon ne percorse i principali sentieri prima del 1908, descrivendola a grandi linee (bibl. 5). La carta geologica pubblicata dal Salomon alla scala 1:75.000 manca, naturalmente, di tutti i particolari; placche di terreni sedimentari su tonalite e masse tonalitiche tra i materiali del Trias non sono segnate; i principali filoni che compaiono lungo le mulattiere, non segnati sulla carta, vengono dal Salomon ricordati nella Memoria che descrive i vari itinerari da lui percorsi: dei numerosi filoni minori non v'è traccia alcuna, mentre il loro rilevamento e la loro distinzione in base alla differenziazione sono stati da noi particolarmente curati.

Quanto alla serie stratigrafica del Trias, sulla sua carta a scala relativamente piccola Salomon dovette separare i vari terreni con limiti approssimati; inoltre tenne distinti solo il Werfeniano dall'Anisico, e questo da tutti i terreni più recenti riuniti nell'unico termine « Wengener Schichten und Esinokalk ». Nel nostro rilevamento invece è stato possibile distinguere, nel Werfeniano, i tre termini « Servino », « Dolomia cariata » ed « Eltodolomit »; l'Anisico inferiore è separato dall'Anisico superiore; ed i termini più recenti risultano distinti nelle successive « Zona a *P. reitzi* », « Zona a *D. lommeli* » e « Dolomie e calcari dolomitici di Esino ».

La regione da noi studiata si distingue da quelle finitime soprattutto per i seguenti motivi:

1° Le masse tonalitiche e granodioritiche si sono incuneate verso ovest, limitando le formazioni sedimentarie ad una fascia stretta ed in buona parte smantellata, e spingendo apofisi fino a poche centinaia di metri dal fiume Oglio;

2° le formazioni sedimentarie sono attraversate da parecchie decine di filoni, in buona parte provenienti dal basso; per cui si ha l'impressione che la copertura sedimentaria sia esile, e che sotto di essa vi siano, a brevissima profondità, masse eruttive. Ne consegue che il metamorfismo di contatto è diffuso in tutta la zona;

3° la parte alta si apre in una serie di bellissimi circhi glaciali che conservano perfettamente la caratteristica morfologia. La parte bassa invece è profondamente incisa, e le gole ed i ripidi pendii rendono disagevole il rilevamento dettagliato. Le azioni di smantellamento furono certo intense, soprattutto a causa della poca compattezza di quelle formazioni calcaree in cui il metamorfismo provocò un aumento della grana cristallina (vedi, ad esempio, i marmi del Pizzo Badile). Alcuni lembi isolati di sedimenti adagiati, anche a quote notevoli, su masse eruttive, rappresentano relitti dell'originaria copertura.

SERIE STRATIGRAFICA. - Secondo Salomon, la regione costituisce essenzialmente la cerniera della « sinclinale del Badile », cerniera la cui direzione è all'incirca E-W.

Non vi compaiono gli elementi stratigrafici più profondi; in particolare, mancano assolutamente gli scisti cristallini prepermiani e le arenarie quarzose permiane. Il Werfeniano inferiore, detto « Servino » (fini arenarie micacee spesso fortemente argillose, giallo-verdastre e grigio-scure, più o meno fittamente stratificate), compare solamente in un piccolo affioramento a bassa quota e al limite

settenzionale, presso il paese di Ceto, e fa parte dell'ala nord della « sinclinale del Badile ». Nei banchi di Servino si trovano scarsi resti di ammoniti indeterminabili e, in misura un po' più abbondante, fucoidi in forma di corti bastoncelli spesso biforcuti. Nella stessa località compare, sempre in piccoli affioramenti disposti sopra al Servino, la dolomia cariata (*Zellenkalk*) attribuita al Werfeniano superiore.

Tra quest'ultima formazione ed i soprastanti calcari marnosi fittamente stratificati, riferibili all'Anisico inferiore, vi sono banchi calcarei compatti, grigio-giallastri o grigi; presso Ceto affiorano con modesti spessori e sono accompagnati da brecce calcaree; più a sud, invece, in Valle di Cobello, hanno spessori rilevanti; in entrambe le località sono interrotti da letti (dello spessore di 0,50-1 metri) che compaiono raramente (ogni 50-100 metri) di materiale friabilissimo, grigio-verde, che a prima vista può essere scambiato per un filone di porfirite totalmente alterato; in rare località meno soggette all'alterazione superficiale e più lontane dalla zona di contatto, ho potuto constatare che gli straterelli in questione sono di argilla quasi pura. Secondo Salomon, i calcari compatti ora descritti, da lui chiamati « Eltodolomit », sarebbero vicarianti della dolomia cariata; ma come giustamente osserva Riedel (bibl. 4), nella mia zona — che confina appunto con la zona rilevata da Riedel —, i due terreni affiorano insieme, nè è possibile definire per ora se i calcari compatti appartengano ancora al Werfeniano superiore o vadano già attribuiti all'Anisico inferiore.

I primi materiali sicuramente riferibili all'Anisico sono rappresentati dalla caratteristica serie fittamente pieghettata a sottili letti di calcari nerastri alternati ad altrettanto esili letti argillo-marnosi (facies camuna). L'Anisico inferiore è ben sviluppato nella parte centrale della zona, lungo una fascia compresa tra altezze medie di 600 e 1200 metri e limitata dalla Val Palobbia a nord e dalla Valle di Re a sud. Al contatto con masse eruttive o con filoni il metamorfismo agì profondamente su questi materiali, provocando soprattutto depigmentazione, ricristallizzazione e formazione di minerali caratteristici (tra i più abbondanti citiamo granato, epidoto, diopside); il fenomeno è imponente specie lungo la linea di contatto presso il Dosso degli Areti. A distanza dai contatti il metamorfismo provocò particolarmente l'indurimento dei letti argillo-marnosi, con formazione di cornubianiti, e la parziale ricristallizzazione dei letti calcarei.

L'Anisico superiore compare al margine meridionale della zona studiata, sotto forma di una fascia semicircolare che congiunge la Valle di Re alla Valle di Fa; compare inoltre al margine settentrionale, dove costituisce gran parte del ripido fianco destro della Val Palobbia.

Consta di calcari molto scuri, arenacei o marnosi in vario grado, poco stratificati, compatti e per nulla plastici, con superfici e piani di frattura a patina ruggine, cui seguono materiali simili a quelli dell'Anisico inferiore ma con alteranze più rade, maggior tenore in arenaria, minor plasticità; sono anche presenti alcuni banchi, alternati e metamorfosati, interpretabili come conglomerati ad elementi vistosi, molto scuri, durissimi, fortemente biotitici. Questa serie è ripiegata in grande, ma le fitte e piccole pieghe sono assenti e sostituite da un gran numero di modestissime faglie. Sul fianco nord della Val Palobbia l'Anisico superiore sembra assumere uno spessore imponente, ma in realtà si tratta della ripetizione

di uno stesso pacco di materiali dovuta ad un unico grande ripiegamento con forte compressione.

Il Ladinico inferiore (strati a *P. reitzi*) consta di calcari bianco-grigi o giallastri, spesso marnosi o silicei in vario grado, per lo più poco compatti, a volte farinosi, con lenti e noduli di calcare il cui tenore in silice o in argilla è diverso da quello del letto che li ingloba; tali noduli o lenti seguono i piani di stratificazione e conferiscono ai banchi un aspetto bernoccolato o nodulare. Gli



(fot. dell'autore).

Fig. 1. - Contatto fra granodiorite (a sinistra) e materiali metamorfici dell'Anisico superiore (a destra). Rispetto all'Anisico inferiore, le alternanze tra letti calcarei chiari e letti calcareo-argilloso-arenacei scuri sono più rade (ogni 10 cm. circa), i materiali sono poco plastici, tra i prodotti del metamorfismo compaiono i minuti cristalli di anfiboli. Fondovalle della Valle di Fa, verso quota 800.

strati a *P. reitzi* compaiono nelle località già citate a proposito dell'Anisico superiore, cioè alle due ali settentrionale e meridionale della zona, assumendo discreto sviluppo alla base del Pizzo Badile; in questa area sono particolarmente tormentati dal ripiegamento e dal metamorfismo, che anche su questi materiali agì profondamente provocando ricristallizzazione, depigmentazione e formazione in abbondanza dei caratteristici minerali già citati: non sono rari, proprio ai piedi del Badile, banchi di granatiti dello spessore di alcuni decimetri.

Il Ladinico superiore (strati a *D. lommeli*) ha materiali omogenei e ben riconoscibili, dati da tipiche arenarie compatte a grana discretamente grossa, for-

temente cementate, di colore bruno-violaceo; sono intensamente fessurate e rispondono alla percussione con timbro metallico. La loro estensione è limitata: sono ben rappresentate nell'alta Valle di Vades, a sud del Badile, e compaiono — in piccolissimo affioramento — al Bisone (margine sud della zona).

Sopra agli «strati a *D. lommeli*» seguono altri materiali calcarei, pure riferibili al Ladinico superiore (Esino), rappresentati prevalentemente da candida dolomia ricristallizzata a grana grossissima, un po' farinosa: la parte inferiore, più giallastra, mostra delle stratificazioni; la parte superiore ne è priva. Quest'ultima formazione costituisce di preferenza cime più o meno isolate, (per esempio, il Pizzo Badile, il M. Bagnone), che ricordano a volte l'aspetto delle scogliere dolomitiche (vedi soprattutto il Pizzo Badile). Al M. Bagnone, in cui la dolomia viene a contatto con filoni e masserelle eruttive differenziate in senso basico, il prodotto più abbondante del metamorfismo è rappresentato da grossi rombododecaedri di granato.

Quasi tutti i materiali del Trias qui descritti sono disseminati di filoni in misura non molto diversa: fanno eccezione le compatte arenarie bruno-viola del Wengen (strati a *D. lommeli*), nelle quali la parte finora esaminata è risultata priva di filoni. Quanto alla distribuzione topografica, la Valle Palobbia è ricchissima in filoni, sia sui versanti che sul fondovalle; in qualche caso ne affiorano una decina in uno spazio largo non più di 100 metri. Le valli più a sud sono meno ricche, ma in varie plaghe i filoni non sono rilevabili perchè occultati dalla vegetazione.

Lo spessore dei filoni varia da pochi centimetri a qualche metro, con prevalenza di spessori medi di 50–100 cm.; quanto alla loro giacitura, prevalgono i filoni verticali o fortemente inclinati, con direzione NNE–SSW, discordanti rispetto agli strati. I filoni interstratificati sono poco frequenti.

I filoni a composizione granodioritico-tonalitica hanno grande prevalenza rispetto a quelli differenziati in senso basico e rispetto ai rarissimi filoni aplitici.

TETTONICA. — Pur tenendo presente che nell'insieme la zona rappresenta la cerniera e l'ala sud della già menzionata «sinclinale del Badile», localmente però la disposizione degli strati è accidentata e complicata per la presenza, lungo la cerniera stessa, di masse eruttive (in forma di speroni o di muraglioni) in parte provenienti da E–SE, in parte — a quanto sembra — sollevatesi con movimento verticale.

Le pieghe e le fitte pieghettature sono innumerevoli, per cui il raccorciamento degli strati plastici rispetto alla loro originaria estensione è notevolissimo.

Non è raro il fenomeno per cui strati contigui e affioranti con egual inclinazione, che diremmo in posizione normale, sono invece i fianchi di una stretta piega inclinata o coricata.

Si comportarono plasticamente le formazioni dell'Anisico inferiore (strati a *D. gracilis*) e del Ladinico inferiore (strati a *P. reitzi*), mentre le arenarie del Ladinico superiore (strati a *D. lommeli*) e le più recenti dolomie furono di preferenza fratturate. I materiali dell'Anisico superiore (zona a *C. trinodosus*) tennero un comportamento intermedio.

Faglie e diaclasi importanti o seguibili per lungo tratto sono assenti.

Quantunque il fenomeno esiga ulteriori osservazioni, sembra non manchino esempi di scorrimento e di dislocazione di masse rigide (dolomia compatta).

TERRENI QUATERNARI. - I materiali morenici sono presenti in quantità assai variabile con l'altezza. I magnifici circhi glaciali della zona alta sono quasi completamente denudati; le soglie glaciali corrispondono in genere a gradini di tonalite scoperta o in minima parte rivestita da veli morenici: raramente compaiono i resti di morene laterali o di fondo. Gli elementi di questi depositi sono esclusivamente tonalitici.

Nella fascia bassa invece, soprattutto sotto i 600 metri, vi sono ripiani morenici a dolce pendenza in cui gli elementi tonalitici, prevalenti, sono mescolati ad una modesta percentuale di ciottoli di calcare anisico. Interessante, in questa fascia, è una bella frana morenica allo sbocco della Val Palobbba, formata solo da frammenti di calcare varegato grigio (detto localmente occhiadino) proveniente dall'altro fianco (destro) della Val Camonica.

Allo sbocco della Val Paghera, ampia conca a dolce pendenza che riceveva i ghiacciai scendenti dai circhi delle valli Listino-Monoccola-Dois, vi è una bella e caratteristica morena di fondo a elementi tonalitici, troncata a valle da una frana nel punto in cui terminano i terreni sedimentari, e al disotto del quale agì a fondo, come agisce tuttora, il fenomeno erosivo.

Residui morenici di un terzo tipo si ritrovano sui piccoli terrazzi orografici prospicienti la Val Camonica; i principali sono allineati in corrispondenza delle quote 600, 900 e 1200 metri. Lo spessore degli avanzi morenici che ricoprono detti terrazzi, e che furono deposti dal grande ghiacciaio camuno, supera raramente qualche metro; in essi gli elementi tonalitici sono mescolati a blocchi di materiali pretriassici provenienti dal nord e costituiti in prevalenza da micascisti, conglomerati tipo « verrucano », arenarie.

Il mantello morenico a dolce pendenza che corre ai piedi dei rilievi occupa anche una porzione del fondovalle, per cui nella nostra zona la pianura alluvionale dell'Oglio è piuttosto stretta.

In tutto il territorio rilevato mancano conoidi di deiezione degne di nota.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] BIANCHI A. e DAL PIAZ GB. - *Studi geologico-petrografici sul Massiccio dell'Adamello: Il settore meridionale del Massiccio dell'Adamello. Relazione sul rilevamento e studi preliminari della zona compresa fra la Valle di Stabio e l'alta Valle del Caffaro* « Bollettino del R. Ufficio Geologico Italiano », vol. 62, Roma 1937.
- [2] BIANCHI A. e DAL PIAZ GB. - *Atlante geologico-petrografico dell'Adamello meridionale: regione tra lo Stabio ed il Caffaro*. « Memorie dell'Istituto Geologico della R. Università di Padova », vol. XII, Padova, 1937.
- [3] COZZAGLIO A. - *Note esplicative sopra alcuni rilievi geologici in Val Camonica*. « Giornale di Mineralogia », vol. V, Pavia 1894.
- [4] RIEDEL A. - *Primi risultati di uno studio geologico sulla media Val Camonica a sinistra del fiume Oglio*. « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », serie VIII, vol. VI, fasc. I, Roma 1949.
- [5] SALOMON W. - *Die Adamellogruppe*. « Abhandlungen der K. K. Geologischen Reichsanstalt », vol. XXI, fasc. I, Wien 1908.

Farmacologia. — *Piante e tossine*. Nota preliminare di ALBERTO GARELLO, presentata (*) dal Socio A. BENEDICENTI.

Risalgono al 1931 le ricerche, che nel Laboratorio di Farmacologia Sperimentale dell'Università di Genova, diretto allora dal nostro Maestro prof. Benedicenti, furono intraprese dal dott. Gibelli per studiare il potere antitossico delle piante.

Sperimentando su funghi appartenenti alla famiglia della Saprolognee collocati su un liquido culturale contenente glucosio, egli li vide moltiplicarsi rapidamente. Se al liquido culturale si aggiungeva della tossina difterica, i funghi non se ne avvedevano affatto poiché si sviluppavano normalmente e in nessun modo soffrivano per opera di questo veleno a cui gli animali sono tanto sensibili. In seguito si poté anche osservare che la tossina aggiunta al liquido culturale era stata dal fungo distrutta. Iniettando infatti ad una cavia il liquido culturale di controllo a cui era stata aggiunta la tossina in modo che in un cmc. era contenuta la dose minima mortale, secondo le indicazioni fornite dall'Istituto Sieroterapico Milanese, la cavia moriva; iniettando invece pari dose del liquido culturale (quantitativamente uguale a quello di controllo) sul quale i funghi si erano sviluppati, l'animale rimaneva del tutto normale. Subito dopo il Gibelli estese le sue ricerche servendosi di una cultura di *Penicillium glaucum*, ed anche in questo caso stabilì che la muffa distruggeva nel liquido culturale la tossina difterica che vi era stata aggiunta, così che le dosi, anche molto più alte di quelle mortali, iniettate alla cavia non davano origine a nessun sintomo morboso.

La cosa non era del tutto nuova poichè la bibliografia aveva appreso che poco prima il Vaudremer (1) aveva osservato come una muffa sviluppatasi per caso su una soluzione di tubercolina l'aveva privata della sua tossicità. Anche altre analoghe osservazioni si trovano nella letteratura. In successive esperienze il Gibelli separando il micelio dal liquido di cultura che conteneva la tossina ed iniettandolo in forma di emulsione a una cavia vide che non aveva alcuna azione e concluse che è la muffa viva che, per effetto del suo ricambio, versa nel liquido culturale una sostanza atta a neutralizzare le tossine.

Fu allora che il nostro Maestro propose al Gibelli di ricercare se questa facoltà fosse propria delle muffe, dei funghi, delle piante crittogame tallofite infine, o anche delle piante fanerogame più evolute e consigliò di sperimentare su semi di lupino germoglianti in un liquido culturale appropriato.

Se si pone un seme di lupino su un liquido culturale, contenente tossina difterica, esso non germoglia. Occorre attendere che la germogliazione si sia iniziata su un liquido culturale normale e sia progredita fino ad avere le radici lunghe circa un centimetro. Ponendo allora il seme sul liquido tossico la germogliazione

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

(1) VAUDREMER, *Culture de bacilles tuberculeux*, «C. R. Soc. Biol.», XCIV (1926).

procede benissimo ed in alcuni casi più rigogliosamente che nei semi tenuti su un liquido culturale normale, per controllo.

Simili osservazioni colla tubercolina io stesso avevo fatto nel Laboratorio di Farmacologia fino dal 1920, ma non vennero allora pubblicate. Operando nel modo suddetto il Gibelli poté notare che non solo i semi di lupino, ma anche quelli di grano e di miglio avevano come i funghi e le muffe la proprietà di distruggere la tossina difterica aggiunta al liquido culturale che così diveniva innocuo per gli animali cui era iniettato.

Se nelle piante di lupino, normalmente cresciute, si divide con un taglio la parte fogliare dalla parte radicale e si pongono separatamente in due recipienti contenenti liquido culturale più tossina difterica si vede che esse si mantengono vivaci per alcuni giorni, ma i due liquidi iniettati separatamente a due caviglie le uccidono.

Resta così dimostrato, anche in questo caso, che è la *pianta viva in toto* che opera nel liquido di cultura la distruzione del veleno. D'altra parte esperienze *in vitro* dimostrano come nel liquido in cui la tossina è stata distrutta, rendendola innocua per la cavia, debba esistere un quid antitossico molto attivo poichè raccogliendone un po' in un tubo da saggio e aggiungendovi nuova tossina difterica in dose più volte superiore alla dose minima mortale e lasciando i due liquidi in contatto per un po' di tempo, talvolta assai breve, questo miscuglio iniettato alla cavia lascia l'animale in condizioni del tutto normali.

Incoraggiato da questi risultati il Gibelli volle iniettare nello stelo di piante di fave coltivate in vaso, la tossina difterica operando con semplice dispositivo in modo che le piante potessero lentamente assorbire una quantità forte di questo veleno. Ma le piante crescono rigogliose come se nulla fosse avvenuto.

Se alcune ore dopo il completo assorbimento della tossina si recide la pianta e si torchia, il succo iniettato ad una cavia l'uccide; il veleno è ancora nel corpo del vegetale, ma se si lasciano passare, come in altre esperienze, diversi periodi di tempo si può osservare che la tossina è stata distrutta perchè il succo è divenuto innocuo per l'animale.

Il Gibelli volle anche vedere, in esperienze che risalgono al 1938, se questi liquidi culturali di piante superiori fossero dotati anche di proprietà antibiotiche e ne cercò l'effetto sul *Piocianeo* ed il *Bact. Coli*, dimostrando che la virulenza di questi germi era attenuata restando tuttavia viventi per quel fenomeno di batteriostasi nel quale la vitalità del germe è risparmiata, il potenziale respiratorio è conservato, ma viene messo fuori uso quel complesso enzimatico che presiede alla riproduzione del germe patogeno.

Simile effetto, come è noto, hanno i raggi X, i raggi ultravioletti e quelli α del radio. Ma queste esperienze, di competenza non dei farmacologi, ma di batteriologi non furono nè allora nè poi continuate ⁽²⁾.

Sulle piante superiori, in quest'ansia di ricerche di nuovi antibiotici, molte indagini furono fatte. Così l'Atkinson studiò i succhi di duecento e più piante

(2) GIBELLI, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 1932 e riassunto di tutte le esperienze in « Archives Internat. de Pharmacodynamie », Bruxelles, 1938.

cresciute spontaneamente e provò vari fiori; il Little ed il Gebrauch sperimentarono su succhi di piante coltivate; il Bauer isolò e studiò la protamina dell'anemone e così via, non riuscendo però, a quanto pare, a risultati di pratica utilità.

Dopo molto tempo, nello scorso anno 1949 io, per consiglio del Maestro, sono tornato sull'argomento da tanto tempo abbandonato ed ho dapprima sperimentato su altre piante tallofite e precisamente sulle alghe.

La bibliografia ci dice che il Pratt ha ottenuto dalla *Chlorella vulgaris* e dalla *Ch. pyrenoidosa* una sostanza denominata *Chlorellina* che si è dimostrata attiva verso diversi batteri gram-positivi e gram-negativi (3).

Io mi sono occupato esclusivamente delle proprietà antitossiche delle alghe ed ho sperimentato sulla Lemma o lente palustre, alga comunissima negli stagni e nota anche, come farmaco, fino dai tempi di Dioscoride e di Galeno.

Se si dispongono in un cristallizzatore, queste alghe sopra l'acqua sulla quale furono raccolte, operando con cautela in modo che le radichette peschino nel liquido ed il piccolo disco verde galleggi alla superficie dell'acqua, come avviene in natura, esse vivono normalmente.

Se all'acqua si aggiunge della tossina difterica e con questa tossina si lasciano in contatto per tre giorni si può vedere che esse non soffrono alcun nocimento e se si inietta ad una cavia la dose minima mortale ed anche più, dell'acqua cui fu aggiunta la tossina, l'animale rimane normale.

La stessa dose di tossina contenuta nella stessa quantità di acqua sulla quale non hanno vegetato le alghe uccide la cavia.

Analoghi risultati ho ottenuto con un'altra alga comunissima la Spirogyra, lavata ed accuratamente liberata da ogni corpo estraneo. I suoi filamenti si trovano in tutte le acque stagnanti o poco correnti. Ma qui poteva sorgere il dubbio che essendo l'alga immersa coi suoi filamenti nell'acqua, avesse potuto adsorbire una parte della tossina. Ma prelevando queste alghe dall'acqua e tossina in cui per diversi giorni hanno vissuto, asciugandole tra carta da filtro, macerandole con pochi centimetri cubi d'acqua distillata, riducendole in una fine poltiglia, poi filtrando e spremendo il succo fra garza e poscia filtrando ancora su carta il liquido così ottenuto (3-5 cmc.) iniettato ad una cavia non produce all'animale alcun effetto tossico.

Anche le alghe marine sono state oggetto di ricerca e ho sperimentato sulle *Phicoficeae*, alghe brune, d'aspetto di foglie molto ramificate nelle quali la clorofilla è mascherata dalla ficofeina. Queste alghe sono comunissime sulle scogliere della passeggiata a mare di Nervi, ma se ne conoscono centinaia di specie e non ho potuto sapere a quale specie apparteneva l'alga da me adoperata.

Qui sorge il dubbio che la scomparsa della tossina possa dipendere, in parte almeno, dal bromo e dal jodio contenuto nell'acqua di mare, essendo noto che le batteriotossine vengono dal bromo rapidamente distrutte. Ho fatto vivere le alghe in acqua di mare artificiale priva di questi alogeni ed ho osservato lo stesso fenomeno.

(3) PRATT, *Chlorellin, an antibacterial substance from Chlorella*, in «Science», 99, 351 (1944).

Anche le alghe terrestri contengono bromo e jodio e lo Zenger⁽⁴⁾ li ha rinvenuti nelle ceneri della lente palustre. Io però, neppure coi più sensibili reattivi, ho potuto riscontrare mai tracce di questi elementi nell'acqua in cui le lemne avevano vissuto.

Altre esperienze sono state da me eseguite sui semi germoglianti di lupino su un liquido culturale appropriato al quale era stato aggiunto la tossina difterica (nella proporzione di 0,0070 per ogni cmc.). In tutte le esperienze tenni conto non solo dell'aspetto e della lunghezza delle radici, spesso più sviluppate che nel liquido culturale privo di tossina, ma anche dello sviluppo delle pianticelle *in toto* e di tutti quegli altri sintomi che potessero indicare un avvelenamento della pianta o una inibizione della germogliazione.

Sapendosi dai lavori del Burgi⁽⁵⁾ che la clorofilla è dotata di una mediocre proprietà batteriostatica ho voluto vedere se semi di lupino fatti germogliare al buio distruggevano ugualmente la tossina. L'oscurità influisce sensibilmente sulla germogliazione, ma l'attività antitossica è conservata.

Che questa attività consista in una lisi della sostanza proteica lo prova il fatto che le reazioni delle proteine (xantoproteica - biureto - reaz. di Millon, di Acree, di Arnold) visibili sia pur debolmente nelle soluzioni di tossina adoperate riescono del tutto negative in un liquido tossico sul quale per sette giorni abbiano rigogliosamente germogliato dei semi di lupino.

Un altro interessante problema è quello di vedere se i semi di lupino siano capaci di provocare la lisi non solo delle batteriotossine, ma anche di altre tossine vegetali simili alle tossine batteriche.

Tale è ad esempio la ricina poichè, come l'Erlich ha dimostrato, iniettata a dosi crescenti nell'organismo, conduce alla formazione nel sangue di un anticorpo.

Ho sperimentato determinando la dose minima mortale per il topolino bianco di un'emulsione fatta con pochi semi freschi di ricino e diluita con una determinata quantità d'acqua distillata e cloruro di sodio. Ponendo su quest'emulsione a germogliare dei semi di lupino o anche l'alga Spirogyra si può dimostrare che l'emulsione stessa è diventata dopo alcuni giorni, a differenza del liquido di controllo, innocua per l'animale.

Altre esperienze sono in corso con ricina più pura e con altre tossine vegetali pure.

Altrimenti sembra vadano le cose per i veleni proteici animali.

Le esperienze fatte col veleno dei serpenti e completate con altre fatte con semplice albumina d'uovo non hanno dato per ora risultati così chiari come per le tossine vegetali.

Anche su quest'argomento come sull'azione delle piante superiori ho in corso altre esperienze che potranno formare oggetto di un'altra Nota. In questa Nota, *del tutto preliminare*, io non ho dato alcun particolare sulle esperienze, ma mi sono limitato a raccontare i risultati a cui sono giunto, tuttavia da quanto qui è detto si può concludere che:

(4) ZENGER, « Archiv d. Pharmazie », 1875 (3), 137.

(5) BURGI, *Das chlorophyll als pharmakon*, 1932.

1° Non solo le piante tallofite (alghe - funghi...) sono dotate della proprietà di distruggere le tossine batteriche e le tossine vegetali in genere colle quali siano poste in contatto, ma ciò si verifica anche per le piante superiori fanerogame.

2° Che siccome nella pianta tallofita il potere di distruggere le tossine nel liquido di cultura appare spesso collegato ad un potere antibiotico si potrebbe forse dai batteriologi ricercare se questo accada per caso anche per i liquidi di cultura delle piante superiori.

3° Che in questa proprietà di distruzione, come il nostro Maestro ci ha fatto notare, sembra appaia una delle tante armonie della natura, perchè se le piante non distruggessero nel terreno ed in qualche caso nel loro stesso corpo, quelle tossine che sono veleni così energici per gli animali, mentre sono innocue per loro, le piante maneggiate dall'uomo, brucate dagli animali, potrebbero anche in piccola dose divenire pericolose.

È un segno di quell'ordine supremo che regola tutto nella natura e che il grande fisiologo Cl. Bernard aveva già così chiaramente compreso e dimostrato.

Biologia — *Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di «Amaurobius erberi» Kys (*)*. Nota di ALFRED GLÄSSER, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Partendo dal lavoro di Cotronei (1910⁽¹⁾, 1911⁽²⁾) sulla fascia vitellogena di *Antedon rosacea*, formazione citoplasmatica nella quale questo A. aveva riconosciuto l'espressione di scambi di sostanza tra nucleo e citoplasma ed una particolare attività nella preparazione dei fenomeni di vitellogenesi, Urbani ha dimostrato (1949)⁽³⁾ in questa formazione la presenza di acido ribonucleico associato a determinate proteine, dando così una convalida citochimica alla funzione vitellogena della fascia.

Le ricerche estese ad altri nuclei vitellini di oociti di diverse specie animali (Urbani 1949)⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾, (Rognone 1949)⁽⁷⁾ hanno mostrato le analogie citochimiche esistenti tra i vari nuclei di vitellini, o solamente tra determinate zone di questi e tali zone sono state considerate come indicatori particolari di un fenomeno di portata generale nell'accrescimento degli oociti: la vitellogenesi.

Allo scopo di apportare un contributo alle numerose osservazioni già compiute e alle altre in corso rientranti in un quadro morfologico e zoologico comparativo

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) G. COTRONEI, «Boll. Soc. Nat. Napoli», 24, 155 (1910).

(2) G. COTRONEI, «Monit. Zool.», 23, 11 (1911).

(3) E. URBANI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», 6, 131 (1949).

(4) E. URBANI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», 6, 526 (1949).

(5) E. URBANI, «Riv. di Biologia», 41, 63 (1949).

(6) E. URBANI, «Riv. di Biologia», 41, 331 (1949).

(7) L. ROGNONE, «Rend. Acc. Naz. Lincei», 7, 164 (1949).

ho studiato, riferendomi alla localizzazione dell'acido ribonucleico, il nucleo vitellino dell'aracnide *Amaurobius erberi* Kys⁽⁸⁾.

Una estesa ricerca sui nuclei vitellini degli Aracnidi e sui corpi di Balbiani è stata condotta da Jacquiart (1936)⁽⁹⁾ il quale ha descritto numerose varianti dei nuclei vitellini di queste forme e tali varianti sono, secondo questo A., in rapporto ai fenomeni di pachinesi (seguendo la terminologia dell'A.) del condrioma. Soprattutto per ciò che riguarda il nucleo vitellino di *Tegenaria* questo A. lo riconosce come un centro generatore di vitello e come centro di attività dell'oocite in crescita.

Mezincesco (1941)⁽¹⁰⁾ ha studiato la evoluzione dei costituenti citoplasmatici nella oogenesi e nella vitellogenesi di *Amaurobius ferox*, forma vicina a quella che è oggetto della presente Nota. Questo A. riconosce nei giovani oociti una zona nella quale si addensano lipidi, condrioma, e corpi di Golgi (dittosomi) a formare quella che l'A. ritiene una sfera di attrazione. Attorno a questi si forma un anello di protoplasma basofilo ed esternamente a quest'ultimo si ha la zona vitellogena o zona palliale. In un secondo tempo alla superficie del nucleo centrale si forma una prima lamella alla quale concentricamente se ne aggiungono altre. Secondo l'A. il nucleo vitellino serve alla formazione del materiale di riserva dell'oocite e la parte lamellare, data la sua grande superficie avrebbe funzione di catalizzatore nei fenomeni di vitellogenesi. Per ciò che riguarda la topografia dell'acido ribonucleico nei nuclei vitellini di Aracnidi sono recentissime le osservazioni di Bradfield (1949)⁽¹¹⁾. Questo A. avendo studiato il ruolo degli acidi nucleici e delle fosfatasi nei *seriteri* della *Tegenaria* ha visto anche che il nucleo vitellino degli oociti presenta acido ribonucleico ma non ha fatto un esame delle varie zone di questa formazione che, come Urbani ha dimostrato in *Tegenaria tridentina*, hanno un diverso valore morfologico, citochimico e funzionale.

Le osservazioni da me compiute su oociti di *Amaurobius erberi*⁽¹²⁾, materiale trattato colle stesse modalità indicate da Urbani nei suoi lavori, hanno mostrato in questa specie l'esistenza di un nucleo vitellino che modifica la sua morfologia durante l'accrescimento dell'oocite. Nei piccoli oociti l'acido ribonucleico è presente nel nucleolo, in un sottile reticolo della vescicola germinativa e nell'ooplasma sotto forma di granuli (fig. 1). In alcuni oociti più accresciuti prima che sia evidente il nucleo vitellino l'acido ribonucleico citoplasmatico può trovarsi più addensato in un settore della cellula. Ciò lascia pensare ad una specie di precipitazione simile a quella messa in evidenza da Cotronei in *Antedon* che prelude alla comparsa del nucleo vitellino. Difatti in uno stadio seguente di accrescimento il nucleo vitellino è evidente come una masserella basofila che può apparire circondata da un anello più o meno intensamente basofilo (figg. 2 e 3); il controllo con la ribonucleasi, secondo il metodo di Brachet, ha mostrato la presenza in queste formazioni di acido ribonucleico. Il nucleo vitellino in uno stadio ulteriore di

(8) Ringrazio il dott. E. Urbani che mi ha guidato nella presente ricerca.

(9) CL. JACQUIERT, *Recherches sur l'oogenèse des Araignées et les corps vitellins de Balbiani*. Paris, Le François, 1936.

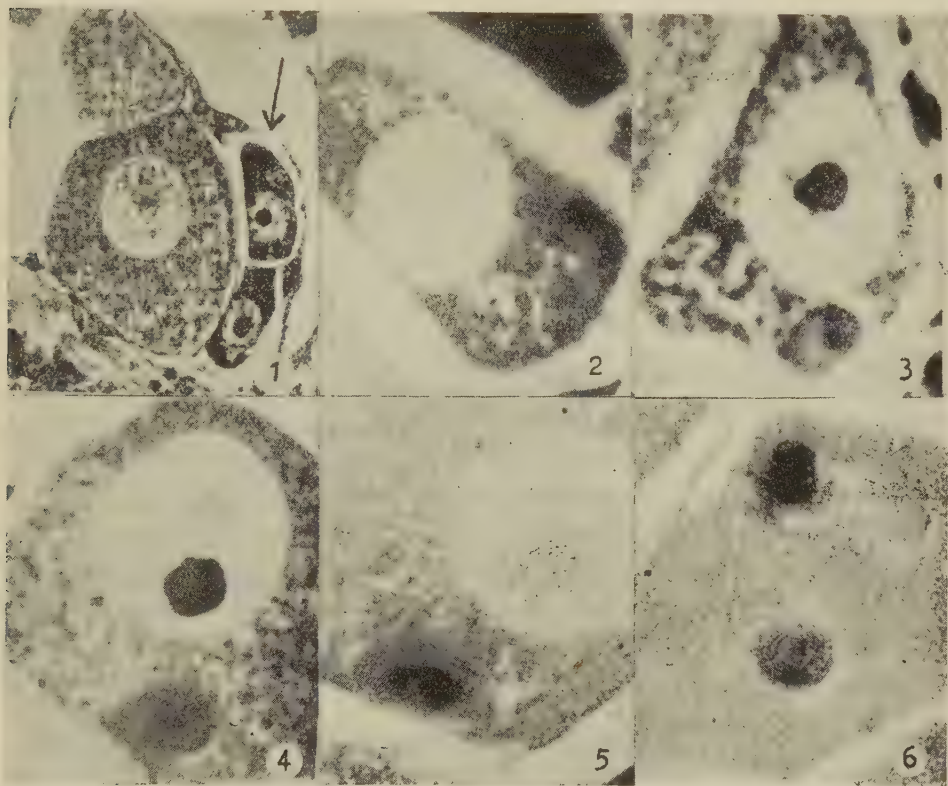
(10) F. MEZINCESCO, « *Berichte Wissensch. Biol.* », 60, p. 139 (1942).

(11) J. R. G. BRADFIELD, « *Exp. Cell. Res. Suppl.* », 1, 338 (1949).

(12) Ringrazio il prof. L. Di Caporiacco per la determinazione sistematica delle specie.

accrescimento dell'oocite è circondato da un alone basofilo di intensità variabile (figg. 4 e 5) da interpretarsi come la zona palliale del nucleo vitellino di *Tege-naria tridentina* (Urbani).

Nei grandi oociti il nucleo vitellino nel suo insieme ha assunto un aspetto a lamelle concentriche con al centro un corpo basofilo e che presentano esse stesse basofilia (fig. 6). A questo stadio l'acido ribonucleico è quasi completamente



Oociti di *Amaurobius erberi* colorati con verde di metile pironina (2, 3, 4, 5) o fotografati in luce U. V. su 2750 \AA (1, 6). Nella fig. 1 sono indicati dalla freccia due piccoli oociti carichi di acido ribonucleico senza nucleo vitellino. Nelle altre figure vari stadi di sviluppo del nucleo vitellino in rapporto all'accrescimento dell'oocite (vedi spiegazione nel testo e tabella).

scomparso dal restante ooplasma e sono visibili le prime sferule di tuorlo. Il materiale da me esaminato non ha permesso di seguire ulteriormente il destino della formazione lamellare per vedere se essa scompaia alla fine della vitellogenesi o se invece rimanga anche nell'uovo maturo e deposto come è stato dimostrato per altre specie di Aracnidi da Koch (1929)⁽¹³⁾ e da Jacquiert (1936). Fotografie di sezioni di oociti eseguite in luce ultravioletta su 2750 \AA prima e dopo azione della ribonucleasi hanno confermato i risultati ottenuti col metodo di Brachet ed hanno permesso di vedere che la parte lamellare del nucleo vitellino è di natura proteica con associato acido ribonucleico.

(13) A. KOCH, «Zeit. Zell. u. Mikr. Anat.» 8, 296 (1929).

Allo scopo di seguire l'evoluzione del nucleo vitellino in rapporto ai vari stadi di accrescimento dell'oocite ho eseguito le misurazioni del diametro massimo e minimo di tutti gli oociti di un esemplare dividendoli in categorie ognuna rappresentata da un particolare aspetto del nucleo vitellino quale risulta dalle fotografie riportate nel presente lavoro. Dalla consultazione della tabella appresso riportata appare perciò quale sia l'evoluzione della formazione in questione in rapporto all'accrescimento dell'oocite, questo è perciò il valore da attribuirsi a questa tabella e non un significato statistico dato che si tratta degli oociti di un solo esemplare e che presentato il vantaggio di essere comparabili tra di loro in quanto hanno subito gli stessi processi di fissazione disidratazione e inclusione per la stessa durata di tempo.

TABELLA.

Fot. 1		Fot. 2		Fot. 3	
Oociti n. 35		Oociti n. 16		Oociti n. 4	
Lunghezza max	μ 63	Lunghezza max	μ 105	Lunghezza max	μ 87,5
Lunghezza min.	μ 28	Lunghezza min.	μ 63	Lunghezza min.	μ 63
Larghezza max	μ 52,5	Larghezza max	μ 94,5	Larghezza max	μ 52,5
Larghezza min.	μ 17,5	Larghezza min.	μ 35	Larghezza min.	μ 45,5
Lunghezza media	μ 51,5	Lunghezza media	μ 80	Lunghezza media	μ 78
Larghezza media	μ 34,5	Larghezza media	μ 61,5	Larghezza media	μ 50,7

Fot. 4 e 5		Foto 6	
Oociti n. 35		Oociti n. 87	
Lunghezza max	μ 122,5	Lunghezza max	μ 189
Lunghezza min.	μ 63	Lunghezza min.	μ 105
Larghezza max	μ 105	Larghezza max	μ 140
Larghezza min.	μ 35	Larghezza min.	μ 70
Lunghezza media	μ 104	Lunghezza media	μ 150,5
Larghezza media	μ 65	Larghezza media	μ 117,5

CONCLUDENDO: gli oociti in crescita di *Amaurobius erberi* Kys. presentano un nucleo vitellino nel quale è presente acido ribonucleico. L'acido ribonucleico si esaurisce colla comparsa del tuorlo. Negli oociti nei vari stadi di accrescimento da me considerati si nota una graduale diminuzione dell'acido ribonucleico ooplasmatico, ne rimane soltanto nella parte lamellare del nucleo vitellino. Ciò costituisce un carattere differenziale dalla parte lamellare di *Tegenaria tridentina* che invece è sprovvista di questa sostanza. Date queste differenze nella topografia dell'acido ribonucleico nelle zone lamellari di *Amaurobius* e di *Tegenaria* si prospetta il valore citochimico di una comparazione sistematica tra le diverse forme di Aracnidi.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica che è presente alla seduta il Socio Straniero Joseph Pérès della Facoltà di Scienze di Parigi e membro dell'Accademia delle Scienze di Francia e porge all'illustre ospite il cordiale saluto dell'Accademia.

Informa quindi i Colleghi che è pervenuta indirettamente all'Accademia la dolorosa notizia della morte del prof. CLIFFORD DOBELL, Socio Straniero della Categoria V.

Il prof. Dobell, Socio dal 1924, era un valente zoologo specializzato nello studio dei protozoi e in particolare dei protozoi parassiti degli animali e dell'uomo, specialmente competente nel campo delle amebe e dei protozoi intestinali dell'uomo. Su questi argomenti ha pubblicato due libri che sono consultati con frutto dagli zoologi e dai clinici.

Il Presidente comunica poi che anche un altro Socio Straniero, il prof. V. M. GOLDSCHMIDT è deceduto; la sua morte risale al 20 marzo 1947, ma la notizia è venuta a conoscenza dell'Accademia solo nella mattinata di oggi 11 marzo 1950, e cioè a circa tre anni di distanza. Il prof. Goldschmidt era Socio dal 1929 e apparteneva alla Categoria IV.

Il Socio Bianchi ricorda brevemente che il compianto prof. Goldschmidt fu uno dei più autorevoli cultori di geochimica e di cristallografica ed è, in particolar modo, noto per i suoi importanti studi di chimica sulla struttura dei cristalli.

Il Presidente invia alla memoria dei due illustri Studiosi scomparsi il reverente saluto dell'Accademia.

COMUNICAZIONI VARIE

Presenta quindi il fascicolo dei « Rendiconti » del mese di gennaio e le bozze già impaginate di quello di febbraio che uscirà fra pochissimi giorni, manifestando la sua soddisfazione che sia stato possibile realizzare quanto egli da tempo si era proposto, di poter cioè presentare in ogni seduta il fascicolo della seduta precedente.

Il Presidente informa la Classe che l'organizzazione del Convegno sul metano che doveva tenersi nel prossimo mese di maggio, ha incontrato numerose difficoltà e che la Presidenza ha ritenuto pertanto opportuno variarne il tema, in un primo tempo stabilito, in modo da dare al Convegno stesso un carattere anche giuridico; infatti il nuovo tema si riferisce appunto, oltre che al metano, agli aspetti giuridici delle ricerche minerarie in Italia. Tale diverso carattere del Convegno implica però un periodo di tempo notevolmente lungo per la preparazione e la raccolta dei materiali e si è giudicato pertanto conveniente, in conformità della proposta del Socio Redenti, che tratterà la parte giuridica, e dei Soci Gortani e Dore che da tempo si

sono occupati dell'organizzazione dei lavori, di rimandare il Convegno stesso al prossimo anno accademico.

Il Presidente conclude preannunciando per il mese di aprile una seduta a Classi riunite nella quale il Socio Papi, della Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche, terrà una conferenza sul seguente importante tema: « La situazione alimentare mondiale e gli squilibri internazionali ».

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta due plichi suggellati: l'uno è stato consegnato all'Accademia dal sig. Giuseppe Tupone, l'altro contiene un manoscritto italiano inedito del prof. Andrea Levaldi, già pubblicato in lingua spagnuola nel 1948 a Buenos Ayres ed è stato consegnato dal Socio Nazionale prof. Giovanni Giorgi con la clausola che il plico stesso dovrà essere riconsegnato a richiesta del predetto prof. Levaldi o del Socio Giorgi o di loro mandatarî.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, dispone che i plichi di cui trattasi siano conservati nell'archivio accademico a disposizione degli interessati.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci Abetti, Carnera, d'Ancona, Cotronei, Bompiani, Crocco, Picone, Giorgi, Signorini, Cassinis e Califano.

Il Socio Armellini presenta una Memoria di G. Rabbeno dal titolo: « Sulla proprietà dello spazio fisico »; per l'esame di detta Memoria viene nominata una Commissione composta dallo stesso Socio Armellini e dal Collega Perucca.

Il Segretario Accademico legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CROCCO G. A., Confronto sintetico fra turboelica e turbogetto.

SIGNORINI A., Un semplice esempio di « incompatibilità » tra la Elastostatica classica e la teoria delle deformazioni elastiche finite.

BAFFONI G. M., Fenomeni reattivi e degenerativi delle cellule nervose nei processi di cicatrizzazione del moncone caudale di Sauri (pres. dal Socio G. COTRONEI).

BARBATELLI R., Determinazione del passo e degli errori progressivi del micrometro in A. R. del cerchio meridiano Repsold mediante stelle circumpolari e zenitali (pres. dal Socio L. CARNERA).

BERTOLINI F., Sugli integrali di una equazione differenziale ordinaria (pres. dal Socio M. PICONE).

CAVALLO G., Sulla localizzazione citologica della catalasi in *Micrococcus Lysodeidicus* (pres. dal Corrisp. L. CALIFANO).

DACHA U. e MARTINI V., Sulla sopravvivenza e motilità di segmenti isolati di intestino grasso e stomaco umano (pres. dal Socio U. LOMBROSO).

DALLA VOLTA V., Sulla isometria di calotte superficiali nello spazio euclideo (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

DEMICHELIS F., Polverizzazione catodica dei metalli e struttura cristallina (pres. dal Socio E. PERUCCA).

GARAVALDI O., Sul problema del « fioretto di perforazione » trattato col metodo operativo (pres. dal Socio G. GIORGI).

LEJA F., Une méthode d'approximation des fonctions réelles d'une variable complexe par des fonctions harmoniques (pres. dal Socio M. PICONE).

LONGO C., Trasformazioni puntuali nell'intorno di un punto unito (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

MARTINI V., Ricerche sull'attività contrattile dei muscoli lisci intestinali: Nota I. Potenzamento dell'azione dell'acetilcolina per opera del 933 F (pres. dal Socio U. LOMBROSO).

MARTINI V., Ricerche sull'attività contrattile dei muscoli lisci intestinali. Nota II. Potenzamento dell'azione dell'acetilcolina per opera dell'ergotamina e dei sali di bario (pres. dal Socio U. LOMBROSO).

MARUSSI A., Sviluppi di Legendre generalizzati per una curva qualunque tracciata su di una superficie pure qualunque (pres. dal Socio G. CASSINIS).

MARUSSI A., Sviluppi di Legendre generalizzati nello spazio (pres. dal Socio G. CASSINIS).

PERRI T., La determinazione di arti soprannumerari in *Bufo vulgaris*. Natura dello stimolo e valore della « competenza » (pres. dal Socio G. CO-TRONEI).

RIGHINI G., Sulle fluttuazioni di intensità dei brillamenti solari (pres. dal Socio G. ABETTI).

SABBADIN A., Comportamento delle cellule somatiche e germinali nello sviluppo e nel differenziamento delle gonadi in una razza differenziata di *Rana esculenta* (pres. dal Corrisp. U. D'ANCONA).

SACCONI L., Un metodo spettrofotometrico indiretto per lo studio degli equilibri chimici (pres. dal Socio L. ROLLA).

SOBRERO L., Di una elementare proprietà cinematica analoga al principio di Fermat (pres. dal Socio A. SIGNORINI).

SOBRERO L., Sui « meccanismi calcolatori » di Svoboda (pres. dal Socio A. SIGNORINI).

STORCHI E., Integrazione delle equazioni indefinite della statica dei veli tesi su una generica superficie (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario illustra le pubblicazioni pervenute in omaggio all'Accademia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

Presentate nella seduta dell'11 marzo 1950

- BAGCHI Haridas. — « *Bilinear transformation of a bicircular quartic* ». Calcutta, Dwijen-dranath Dhur, ser. a.
- *Circles of double contact of bicircular quartic*. Estr. da « *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society* », vol. XL, 1948, n. 4.
- *Cylindroid and kindred surfaces*. Estr. da « *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society* », vol. XXXIII, 1941, n. 3.
- *Geometrical note on van der Waal's equation*. Estr. da « *Indian Journal of Physics* », vol. XIV, 1940.
- *The method of difference equations applied to the summation of certain series involving Legendre and Bessel functions*. Estr. da « *Journal of the Indian Mathematical Society* », n. s., vol. IV, n. 1.
- *Normal Complex of a rigid body*. Estr. da « *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society* », vol. XXXI, 1939, n. 2.
- *Note on a class of infinite Riemannian integrals*. Estr. da « *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society* », vol. XLI, 1949, n. 2.
- *Note on the common tangents of a cubic and one of its sextactic conics*. Estr. da « *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society* », vol. XI, 1948, n. 3.
- *Note on critic centres and coincidence points of cubic curve*. Estr. da « *Journal of the Indian Mathematical Society* », vol. IV, n. 1.
- *A note on cyclides*. Estr. da « *Journal of the Indian Mathematical Society* », n. s., vol. IV, n. 3.
- *Note on the sextatic points of a cubic and its Hessian*. Estr. da « *Journal of the Royal Asiatic Society of Bengal* », vol. XV, 1949, n. 2.
- BAGCHI Haridas. — *Note on the two congruences*. Estr. da « *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* », 1949.
- *On bicircular quartics*. S. n. t. Pp. 2, in-8°.
- *On a class of functional equations*. Estr. da « *Sankhyā: the Indian Journal of Statistics* », vol. V, part. 1^a, 1940.
- *Some novel properties of cyclides and hyper-cyclides*. Estr. da « *Journal of the Royal Asiatic Society of Bengal* », vol. XV, 1949, n. 2.
- *Vector theory of non-coplanar forces*. Estr. da « *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society* », vol. XXX, 1938.
- CAMBI Livio. — *Ricerca scientifica e funzione degli Istituti di ricerca*. Relazione alla XLII Riunione della S.I.P.S. Roma, 1949. Pp. 14, in-8°.
- CANDIOLI Primo. — *La peschicoltura veronese nei suoi aspetti tecnici, economici, commerciali e industriali*. Verona, Bettinelli, 1950. Pp. 96, con figg.
- D'ERASMO Geremia. — *Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli durante gli anni 1943 a 1949*. Estr. da: « *Rend. dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche della Soc. di Scienze, Lettere ed Arti (già Società Reale di Napoli)* », ser. 4^a, vol. XVII, 1950.
- FISHER Douglas A. — *Steel making in America*. United States Steel Corporation, 1949. Pp. 101, in-8°, con figg.
- GRANDI Guido. — *Gli insetti sociali e le loro comunità*. Estr. da « *Bollettino dell'Istituto di Entomologia dell'Università di Bologna* », vol. XVII, 1948-49.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 15 aprile 1950

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Geometria. — *Topologia differenziale.* — V. *Geometria delle superficie in uno spazio proiettivo curvo a tre dimensioni.* Nota (*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

1. PREMessa. — Dirò per brevità *spazio proiettivo curvo* uno spazio numerico X_n in cui siano assegnate le traiettorie (o autoparallele; *paths*) di una connessione affine (o proiettiva). Com'è notissimo⁽¹⁾ se L_{hk}^i sono i coefficienti della connessione, le autoparallele dipendono soltanto dalle loro componenti simmetriche $\Gamma_{hk}^i = 1/2 (L_{hk}^i + L_{kh}^i)$ e non mutano se a queste si sostituiscono le $\Gamma_{hk}^i + \delta_h^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_h$ ove le φ_h sono componenti di un vettore covariante arbitrario e δ_h^i i simboli di Kronecker ($= 0$ per $i \neq h$; $= 1$ per $i = h$). Le equazioni differenziali delle autoparallele sono

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = - (\Gamma_{hk}^i + \delta_h^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_h) \frac{dx^h}{dt} \frac{dx^k}{dt}$$

ove t è un qualsiasi parametro affine su di esse.

Mi propongo di mostrare in questa Nota come si estenda alle superficie appartenenti ad una X_3 dotata di autoparallele l'ordinaria geometria proiettiva differenziale giovandosi delle nozioni topologiche introdotte nelle Note precedenti⁽²⁾; e in particolare come vada estesa la teoria delle applicabilità proiettive di Fubini⁽³⁾.

(*) Presentata nella seduta del 15 aprile 1950.

(1) Per le nozioni qui occorrenti si veda per esempio L. P. EISENHART, *Non-Riemannian Geometry*, « Amer. Math. Soc., Colloquium Publications », vol. VIII, New York, 1927; in particolare Cap. II, n. 22.

(2) E. BOMPIANI, *Topologia differenziale*, I, II, III, IV in questi « Rendiconti »; le citerò con T I o T II ecc.

(3) Si veda per esempio G. FUBINI-E. ČEČH, *Geometria proiettiva differenziale*, 2 vol. (Bologna, Zanichelli, 1926).

Si vedrà per esempio come questa riposi sulla considerazione di due forme *elementari* del tutto analoghe a quelle da me introdotte ⁽⁴⁾ nel caso dell'ordinario spazio proiettivo.

2. ASINTOTICHE DI UNA SUPERFICIE. — Sia data nella X_3 la superficie

$$(2.1) \quad x^i = x^i(u^1, u^2) = x^i(u, v).$$

Per un E_2 della superficie di centro (u^1, u^2) è

$$(2.2) \quad \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{\partial x^i}{\partial u^r} \frac{du^r}{d\tau} \quad (i = 1, 2, 3; r, s = 1, 2)$$

$$(2.3) \quad \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \partial_{rs} x^i \frac{du^r}{d\tau} \frac{du^s}{d\tau} + \partial_r x^i \frac{d^2 u^r}{d\tau^2}$$

ove τ è un parametro qualsiasi e si è posto

$$(2.4) \quad \partial_r x^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^r}, \quad \partial_{rs} x^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^r \partial u^s}.$$

Per l' E_2 di autoparallela con la stessa tangente

$$(2.5) \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -(\Gamma_{hk}^i + \delta_h^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_h) \partial_r x^h \partial_s x^k \frac{du^r}{dt} \frac{du^s}{dt}.$$

Se i parametri t e τ sono raccordati ⁽⁵⁾ nel punto è $du^r/dt = du^r/d\tau$ (non così per le derivate seconde).

Cerchiamo ora di determinare i due E_2 in modo che la *giacitura principale* da essi definita ⁽⁶⁾ sia proprio quella tangente. Dovrà aversi

$$(2.6) \quad \left| \partial_1 x^i, \partial_2 x^i, \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} - \frac{d^2 x^i}{dt^2} \right| = 0$$

ove il simbolo a primo membro indica il determinante che si ha scrivendo le righe per $i = 1, 2, 3$.

La condizione precedente vale l'altra

$$(2.7) \quad \left| \partial_1 x^i, \partial_2 x^i, (\partial_{rs} x^i + \Gamma_{hk}^i \partial_r x^h \partial_s x^k) \frac{du^r}{dt} \frac{du^s}{dt} \right| = 0$$

(ove, com'era da attendersi, non c'è più traccia delle φ_h , cioè la condizione dipende effettivamente dalle sole autoparallele e non dalla connessione).

La (2.7) definisce in generale due elementi E_1 , nel punto fissato, che per evidente analogia si diranno E_1 *asintotici*: da essi per integrazione si ottengono le *linee asintotiche*.

3. EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI DELLA SUPERFICIE. — In una regione nei cui punti la (2.7) abbia radici du^1/du^2 distinte (e diremo i suoi punti *non-parambolici*) si possono prendere le linee asintotiche come linee parametriche ($du_1 = 0$ per un sistema, $du^2 = 0$ per l'altro).

(4) E. BOMPIANI, *Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie*, « Boll. Un. Mat. It. », 1926.

(5) T I, n. 5.

(6) T II, n. 6.

Ciò fatto la (2. 7) dà

$$(3.1) \quad \begin{cases} \partial_{11} x^i = -\Gamma_{hk}^i \partial_1 x^h \partial_1 x^k + \lambda_1^r \partial_r x^i & i, h, k = 1, 2, 3 \\ \partial_{22} x^i = -\Gamma_{hk}^i \partial_2 x^h \partial_2 x^k + \lambda_2^r \partial_r x^i & r = 1, 2. \end{cases}$$

Si osserverà che queste differiscono dalle classiche equazioni valide per una superficie di S_3 proiettivo per la presenza dei termini nelle Γ_{hk}^i ; e infatti sono le $\Gamma_{hk}^i = 0$ per la connessione assoluta determinata in S_3 proiettivo da una scelta di coordinate non-omogenee (affini) quali sono le x^i .

Se si alterano i parametri senza alterare le linee coordinate, cioè si pone

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u' &= u'(u), \quad v' = v'(v) \quad \text{o} \quad u^{r'} = u^{r'}(u^r) \quad \text{con} \quad r' = r \\ \frac{du'}{du} &= \varphi_1^{r'} \quad , \quad \frac{d^2 u'}{du^2} = \varphi_{11}^{r'} \quad , \quad \frac{dv'}{dv} = \varphi_2^{r'} \quad , \quad \frac{d^2 v'}{dv^2} = \varphi_{22}^{r'} \end{aligned}$$

e si cambiano le coordinate x^i in $x^{i'}$ ponendo

$$(3.3) \quad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = \vartheta_i^{i'} \quad , \quad \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^k} = \vartheta_{ik}^{i'} \quad , \quad \text{Det.} (\vartheta_i^{i'}) \neq 0$$

e si tiene conto delle equazioni fondamentali per i coefficienti di una connessione

$$(3.4) \quad \Gamma_{hk}^i = \Gamma_{h'k'}^{i'} \vartheta_{i'}^i \vartheta_h^{h'} \vartheta_k^{k'} + \vartheta_{h'k'}^i \vartheta_h^{h'} \vartheta_k^{k'}$$

si trova che le equazioni trasformate delle (3. 1) sono esattamente dello stesso tipo, scritte con gli apici accentati i', r' e

$$(3.5) \quad \lambda_{r'}^{r'} = \frac{\lambda_r^r \varphi_r^{r'} - \varphi_{rr}^{r'}}{(\varphi_r^{r'})^2} \quad , \quad \lambda_{s'}^{r'} = \lambda_s^r \frac{\varphi_r^{r'}}{(\varphi_s^{r'})^2} \quad r' \neq s'$$

(non si sommi rispetto agli indici ripetuti; i valori numerici di r' ed r e così di s' ed s sono uguali).

Le relazioni del secondo gruppo (3. 5) si scrivono più esplicitamente

$$(3.6) \quad \lambda_1^{2'} \frac{du'^2}{dv'} = \lambda_1^2 \frac{du^2}{dv} \quad , \quad \lambda_2^{1'} \frac{dv'^2}{du'} = \lambda_2^1 \frac{dv^2}{du}.$$

Le (3. 6) ora scritte sono le *forme elementari invarianti* nella teoria proiettiva delle superficie.

La loro invarianza, e di più il loro significato geometrico (topologico) risulta da quanto già sappiamo: sappiamo infatti ⁽⁷⁾ che due E_2 tangenti e due E_1 appartenenti alla loro giacitura principale hanno un invariante topologico infinitesimo. Se ora si considera un E_2 di asintotica e l' E_2 di linea autoparallela tangente, la cui giacitura principale è, per definizione, quella tangente alla superficie e poi l'altro E_1 asintotico e una tangente o E_1 definito da du/dv si hanno appunto i due invarianti (3. 6).

4. SISTEMI ASSIALI. -- Estendiamo ora alle superficie in uno spazio proiettivo curvo la nozione di *sistema assiale di curve*: essa ci darà poi modo di definire le applicabilità proiettive ⁽⁸⁾.

(7) T II, n. 6.

(8) Per l'analogo problema dell'ordinario spazio proiettivo vedasi E. BOMPIANI, *Proprietà generali della rappresentazione puntuale fra due superficie*, « Ann. di Matem. », ser. IV, to. I, 1923-24.

Si consideri allo scopo una direzione, definita dalle δx^i , uscente da un punto x^i della superficie e *non* appartenente alla giacitura ivi tangente.

Considerata in x^i una direzione tangente qualsiasi cerchiamo di determinare per essa un E_2 della superficie tale che la giacitura principale di questo E_2 e dell' E_2 di autoparallela ad esso tangente contenga la δx^i . Per un tale E_2 si avrà

$$|\delta x^i \partial_i x^j \partial_2 x^j| \{ du^1 d^2 u^2 - du^2 d^2 u^1 + \lambda_1^2 (du^1)^3 - \lambda_1^1 (du^1)^2 du^2 + \lambda_2^2 du^1 (du^2)^2 - \\ - \lambda_2^1 (du^2)^3 \} + |\delta x^i \partial_r x^i \partial_{12} x^i + \Gamma_{hk}^i \partial_i x^h \partial_2 x^k| du^1 du^2 du^r = 0$$

cioè, tenuto conto che $|\delta x^i \partial_i x^j \partial_2 x^j| \neq 0$,

$$(4.1) \quad du^1 d^2 u^2 - du^2 d^2 u^1 + \lambda_1^2 (du^1)^3 - \lambda_2^1 (du^2)^3 + du^1 du^2 \theta_r du^r = 0$$

ove

$$(4.2) \quad \theta_r = \frac{|\delta x^i \partial_r x^i \partial_{12} x^i + \Gamma_{hk}^i \partial_i x^h \partial_2 x^k|}{|\delta x^i \partial_i x^j \partial_2 x^j|} + (-1)^r \lambda_r^r$$

(non si sommi rispetto ad r).

Se in ogni punto x^i della superficie si assegna una direzione δx^i non tangente ad essa, cioè una congruenza di direzioni, la (4.1) è un'equazione differenziale del 2° ordine che definisce un sistema ∞^2 di linee sulla superficie: un E_2 appartenente ad una di esse e l' E_2 di autoparallela tangente hanno la giacitura principale passante per la direzione della congruenza uscente dal centro di E_2 . Un tale sistema di linee si dirà *assiale* (e la direzione δx^i in ogni punto si dirà l'*asse* relativo al punto).

5. APPLICABILITÀ PROIETTIVE. - Supponiamo ora data una corrispondenza puntuale fra due superficie che faccia corrispondere le loro asintotiche (*corrispondenza asintotica*): si potrà sempre supporre che punti corrispondenti siano individuati dagli *stessi* parametri u^1, u^2 .

È possibile che ad *un* sistema assiale dell'una corrisponda un sistema assiale dell'altra?

Data la forma (4.1) dell'equazione differenziale dei sistemi assiali basta l'esistenza di *un* sistema assiale cui corrisponda un altro tale sistema perchè debba aversi (indicate le grandezze relative alla seconda superficie con una soprilineatura)

$$(5.1) \quad \bar{\lambda}_1^2 = \lambda_1^2, \quad \bar{\lambda}_2^1 = \lambda_2^1.$$

Se la corrispondenza non è individuata dagli stessi valori dei parametri, ma le superficie sono sempre riferite a parametri asintotici, le condizioni precedenti si esprimono in forma più generale dicendo che la corrispondenza è tale che in punti corrispondenti le forme elementari hanno gli stessi valori per le due superficie.

Dopo ciò scritto come si può

$$(5.2) \quad \theta_r = \frac{\theta_{ri} \delta x^i}{\theta_i \delta x^i} + (-1)^r \lambda_r^r \quad (\text{non si sommi risp. ad } r)$$

e similmente per la seconda superficie, deve aversi

$$(5.3) \quad \frac{\theta_{ri} \delta x^i}{\theta_i \delta x^i} + (-1)^r \lambda_r^r = \frac{\bar{\theta}_{ri} \bar{\delta x}^i}{\bar{\theta}_i \bar{\delta x}^i} + (-1)^r \bar{\lambda}_r^r.$$

Queste due condizioni non impongono alcun legame alle $\lambda_r^r, \bar{\lambda}_r^r$ e comunque siano date le δx^i determinano i rapporti delle $\bar{\delta x}^i$; cioè a qualunque sistema assiale corrisponde un sistema assiale.

Dunque:

L'uguaglianza delle forme elementari in punti corrispondenti di due superficie è condizione necessaria e sufficiente affinché la corrispondenza sia asintotica e conservi i sistemi assiali.

Per una tale corrispondenza (applicabilità proiettiva) la corrispondenza subordinata (dalle (5.3)) fra gli assi, in punti corrispondenti, è una proiettività.

Nella stessa proiettività si corrispondono la giacitura principale relativa ad un E_2 di una superficie e all' E_2 di autoparallela ad esso tangente e la giacitura principale relativa agli elementi corrispondenti.

Come si vede si estendono le proprietà note delle applicabilità proiettive relative a superficie in uno S_3 proiettivo. Bisognerebbe, per completezza, esaminare le condizioni d'integrabilità del sistema (3.1); ma queste (già molto complicate nel caso ordinario) sono troppo complicate per cavarne qualche conseguenza interessante (9).

6. CALOTTE INFLESSIONALI. - Esaminiamo piuttosto il caso in cui gli E_i asintotici definiti dalla (2.7) divengano indeterminati.

Intanto per la calotta σ_2^2 dovranno valere tre equazioni del tipo

$$\partial_{pq} x^i = -\Gamma_{hk}^i \partial_p x^h \partial_q x^k + \lambda_{pq}^r \partial_r x^i$$

con, $i, h, k = 1, 2, 3$; $p, q, r = 1, 2$.

Perchè sia possibile prolungare questa σ_2 in una σ_3 di cui pure gli elementi asintotici in ogni punto siano indeterminati (σ_3^3 inflessionali) occorre che siano soddisfatte le condizioni d'integrabilità; per esempio $\partial_2 (\partial_{11} x^i) = \partial_1 (\partial_{12} x^i)$. Non c'è difficoltà a scrivere queste condizioni; e si possono semplificare scegliendo, com'è possibile, nel punto centro della calotta le $\Gamma_{hk}^i = 0$.

Se si fa questo si trovano le condizioni

$$\partial_2 \Gamma_{hk}^i = 0, \quad \partial_1 \Gamma_{hk}^i = 0$$

$$\partial_2 \lambda_{11}^r + \lambda_{11}^s \lambda_{s2}^r = \partial_1 \lambda_{12}^r + \lambda_{12}^s \lambda_{s1}^r, \quad \partial_1 \lambda_{22}^r + \lambda_{22}^s \lambda_{s1}^r = \partial_2 \lambda_{s2}^r + \lambda_{12}^s \lambda_{s2}^r.$$

Le ultime condizioni si possono sempre soddisfare in un punto. Non così le prime che esigono la stazionarietà delle Γ_{hk}^i su tutte le direzioni della faccetta tangente. Infatti, com'è noto per un teorema di Fermi-Eisenhart (10) si può fare $d\Gamma_{hk}^i = \partial_j \Gamma_{hk}^i dx^j = 0$ per una direzione ma non per tutte le direzioni della giacitura.

Nell'impossibilità di costruire σ_3 inflessionali (in generale) si manifesta la differenza con l'ordinario spazio proiettivo.

(9) Una (analoga a quella che si ha nel caso ordinario) è tuttavia molto semplice: esiste una $\theta(u^1, u^2)$ per cui $\lambda_1^1 = \partial_1 \theta$, $\lambda_2^2 = \partial_2 \theta$.

(10) Loc. cit. (1), p. 64.

Fisica matematica. — *Un semplice esempio di « incompatibilità » tra la Elastostatica classica e la teoria delle deformazioni elastiche finite.* Nota (*) del Socio ANTONIO SIGNORINI.

1. INTRODUZIONE. — Pensiamo a uno stato di equilibrio di un solido elastico libero soggetto a forze tutte quante assegnate. La Elastostatica classica tacitamente ma sistematicamente presuppone per le componenti dello spostamento elastico certi sviluppi in serie col proposito di conservarne solo i primi termini. La teoria delle deformazioni elastiche finite fornisce per i termini successivi sistemi di equazioni differenziali di un tipo che resta soggetto a certe condizioni di integrabilità.

Queste condizioni di integrabilità generalmente vengono a essere propizie alla teoria classica, in quanto si limitano a domandare una conveniente scelta della rotazione d'insieme concomitante alla deformazione del solido, *eliminando così una indeterminazione tradizionale*. Ma ci sono anche dei casi di « incompatibilità » in cui tali condizioni fin dai secondi termini non possono essere soddisfatte e gli sviluppi in serie tacitamente presupposti dalla teoria classica *non esistono*, indipendentemente da ogni questione di convergenza.

Ho potuto accertare tale fatto fin dal 1935⁽¹⁾, anzi fin dal 1942 la mia ricerca è stata assai approfondita dal prof. C. Tolotti⁽²⁾. Torno ora sull'argomento perchè di recente mi è capitato di constatare un esempio di « incompatibilità » assai più semplice ed espressivo di quelli che avevo accertati in precedenza, esempio che forse giustifica pure un avvertimento di carattere generale: *la linearizzazione di un problema fisico può anche dare luogo ad anomalie non banali*.

Per ridurre al minimo gli indispensabili richiami, fin dal principio mi riferirò alla sola Elastostatica isoterma, per un solido libero che ammetta uno stato naturale, c_* . Anzi sottintenderò pure che il solido sia omogeneo in c_* .

2. NOTAZIONI. — Siano: c la configurazione attuale del solido; P il punto generico di c e P_* il punto corrispondente di c_* ; y_r e $x_r = y_r + u_r$ ($r = 1, 2, 3$) le coordinate di P_* e di P rispetto a una stessa terna cartesiana trirettangola \mathcal{T} ; $s = P_*P \equiv (u_1, u_2, u_3)$ lo spostamento elastico di P_* ; σ_* e σ i contorni completi di c_* e c ; Q_* il punto generico di σ_* ; n_* la normale esterna a c_* in Q_* ; Q il punto corrispondente a Q_* su σ ; $d\sigma_*$ e dc_* gli elementi di σ_* e c_* rispettivamente circostanti a Q_* e P_* ; $d\sigma$ e dc i corrispondenti elementi di σ e c .

(*) Presentata nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) V. *Trasformazioni termoelastiche finite, ecc.* [« Atti della XXIV Riunione della S.I.P.S. », vol. 3^o], pp. 17-18 e più completamente *Trasformazioni termoelastiche finite*, Mem. 2^a [« Annali di Matematica », tomo XXX (1949), pp. 1-72], cap. I, § 3.

(2) C. TOLOTTI, *Orientamenti principali di un corpo elastico rispetto alla sua sollecitazione totale*. [« Mem. dell'Accademia d'Italia », ser. VII, vol. XIII], pp. 1139-62. Però anche nel caso di incompatibilità indicato in questa Nota non esiste alcun orientamento principale.

Converrà indicare il valore attuale della forza di massa relativa a dc con $\mathbf{F} dc_*$, cioè indicare con \mathbf{F} la forza di massa riportata all'unità di volume dello stato naturale del solido. Analogamente converrà indicare il valore attuale della forza superficiale esterna agente su $d\sigma$ con $\mathbf{f} d\sigma_*$. Converrà anche — sempre per motivo di semplicità — intendere prefissati ambedue i vettori \mathbf{F} ed \mathbf{f} , il primo come funzione del solo P_* , $\mathbf{F}(P_*)$, e il secondo come funzione del solo Q_* , $\mathbf{f}(Q_*)$.

Nelle condizioni da me presupposte [esistenza di uno stato naturale, omogeneità] il potenziale elastico W si presenta come una funzione delle sei caratteristiche di deformazione

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial y_r} + \frac{1}{2} \sum_i^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_r} \right)^2 \\ \varepsilon_{r+1, r+2} = \varepsilon_{r+2, r+1} = \frac{\partial u_{r+1}}{\partial y_{r+2}} + \frac{\partial u_{r+2}}{\partial y_{r+1}} + \sum_i^3 \frac{\partial u_i}{\partial y_{r+1}} \frac{\partial u_i}{\partial y_{r+2}} \end{array} \right. \quad (r = 1, 2, 3)$$

a priori soggetta alla sola restrizione di essere positiva ogniquale volta non si annullino tutte le ε e altrimenti nulla.

3. EQUAZIONI FONDAMENTALI. — Posso ormai specificare, almeno nelle condizioni da me presupposte, le equazioni della Elastostatica per deformazioni finite. Esse sono

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \sum_s^3 \frac{\partial}{\partial y_s} \left(\sum_i^3 \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{is}} \right) = F_r(P_*) \cdots C_*, \\ \sum_i^3 \cos \widehat{n_* y_s} \sum_i^3 \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{is}} = f_r(Q_*) \cdots \sigma_*. \end{array} \right.$$

Si tratta di un sistema non lineare alle derivate parziali, del secondo ordine, costituito da tre equazioni indefinite e da altrettante condizioni al contorno. Fanno da termini noti, rispettivamente, le componenti di $\mathbf{F}(P_*)$ e $\mathbf{f}(Q_*)$. Dentro i primi membri, quando si pensi assegnata la forma effettiva del potenziale elastico, figurano in sostanza come incognite solo le tre componenti dello spostamento $\mathbf{s}(P_*)$.

Le (I) certo riescono indifferenti a un'arbitraria traslazione di c o c_* . Per liberare la $\mathbf{s}(P_*)$ da tale indeterminazione inessenziale basterà intendere nullo lo spostamento elastico di un punto O comunque scelto in c_* ,

$$(I') \quad \mathbf{s}(O) = 0,$$

ciò che ormai rimarrà sottinteso, insieme alla coincidenza dell'origine della \mathcal{C} con O . È inutile aggiungere che questa convenzione lascia ancora completamente arbitrario l'orientamento di c_* attorno a O .

Naturalmente le (I) implicano le equazioni cardinali della Statica,

$$(2) \quad \int_{\sigma_*} \mathbf{f} d\sigma_* + \int_{c_*} \mathbf{F} dc_* = 0 \quad , \quad \int_{\sigma_*} OQ \wedge \mathbf{f} d\sigma_* + \int_{c_*} OP \wedge \mathbf{F} dc_* = 0;$$

la prima costituisce una restrizione essenziale per i prefissati valori attuali di \mathbf{F} ed \mathbf{f} , mentre la seconda viene a corrispondere a una proprietà globale degli incogniti spostamenti elastici $\mathbf{s}(\mathbf{P}_*)$.

Convorrà d'ora innanzi intendere, che accanto a $(2)_1$ si abbia anche

$$(3) \quad \int_{\sigma_*} \mathbf{OQ}_* \wedge \mathbf{f} d\sigma_* + \int_{c_*} \mathbf{OP}_* \wedge \mathbf{F} dc_* = 0,$$

cioè che sia equilibrato anche l'insieme \mathcal{S}_* delle forze in superficie e delle forze di massa riportate allo stato naturale del solido, $(Q_*, \mathbf{f} d\sigma_*)$ e $(P_*, \mathbf{F} dc_*)$. In base a un teorema stabilito verso il 1850 da DA SILVA⁽³⁾, perchè siano soddisfatte anche le (3) al più occorre specializzare l'orientamento di c_* attorno ad O, finora del tutto indeterminato: ci sono sempre almeno quattro orientamenti di c_* che rendono soddisfatta la (3).

4. ASSI DI EQUILIBRIO. - Passando dalla teoria classica alla teoria delle deformazioni finite vanno presi in speciale considerazione i cosiddetti assi di equilibrio di \mathcal{S}_* . Una retta u per O è asse di equilibrio di \mathcal{S}_* se l'equilibrio di \mathcal{S}_* non resta distrutto quando, mantenendo invariate le singole sue forze, si assoggetti c_* a una rotazione di asse u e ampiezza⁽⁴⁾ non multipla di π .

Se si pone, per ciascun valore di r da 1 a 3,

$$(4) \quad \begin{cases} a_{rr} = - \int_{\sigma_*} (y_{r+1} f_{r+1} + y_{r+2} f_{r+2}) d\sigma_* - \int_{c_*} (y_{r+1} F_{r+1} + y_{r+2} F_{r+2}) dc_*, \\ a_{r+1, r+2} = a_{r+2, r+1} = \int_{\sigma_*} y_{r+1} f_{r+2} d\sigma_* + \int_{c_*} y_{r+1} F_{r+2} dc_*, \end{cases}$$

come condizione necessaria e sufficiente affinchè \mathcal{S}_* ammetta almeno un asse di equilibrio si trova

$$(5) \quad \Delta \equiv \| a_{rs} \| = 0.$$

Se poi si annullano i singoli a_{rs} , ogni u è asse di equilibrio, cioè si ha il cosiddetto *equilibrio astatico*.

5. CONVENIENZA DI UNA MODIFICA DI CERTE VEDUTE TRADIZIONALI. - Se si vuole affrontare il sistema non lineare (1)-(1') prima di una qualsiasi specificazione del potenziale elastico, ovviamente si presenta l'idea di ricorrere a un metodo d'integrazione per serie di potenze, facendo intervenire un comune parametro moltiplicativo λ per tutte le F_r ed f_r e presupponendo per $\mathbf{s}(\mathbf{P}_*, \lambda)$ uno sviluppo del tipo

$$\mathbf{s}(\mathbf{P}_*, \lambda) = \lambda \mathbf{s}^{(1)}(\mathbf{P}_*) + \frac{\lambda^2}{2} \mathbf{s}^{(2)}(\mathbf{P}_*) + \dots$$

(3) V. ad esempio *Sollecitazioni iperstatiche*. [« Rend. Istituto Lombardo », ser. II, vol. LXV, fasc. XIX-XX (1932)], n. 4.

(4) V. loc. cit. nella nota precedente, n. 5.

Il sistema linearizzato che così si viene a ottenere per le tre componenti $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}$ di $\mathbf{s}^{(1)}$ è quello della teoria classica. Lo accenno scrivendo

$$(L') \quad \mathcal{L}_r[u^{(1)}] = F_r \cdots c_* \quad , \quad \mathcal{L}_r[u^{(1)}] = f_r \cdots \sigma_* \quad (r = 1, 2, 3).$$

In più, per effetto della (1'), $\mathbf{s}^{(1)}$ viene a essere soggetto alla condizione $\mathbf{s}^{(1)}(O) = 0$. Quindi in complesso $\mathbf{s}^{(1)}$ resta individuato solo a meno di una rotazione infinitesima. Precisamente, se $\mathbf{s}_0^{(1)}(P_*)$ è la soluzione del sistema (L') che in O si annulla insieme al suo rotore, fin qui si può dire solo che $\mathbf{s}^{(1)}$ deve essere del tipo

$$(6) \quad \mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{s}_0^{(1)} + \boldsymbol{\omega}^{(1)} \wedge OP_*$$

con $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ vettore costante indeterminato.

Viceversa la struttura effettiva dei primi membri di (L') è tale che anche un sistema linearizzato di questo tipo resta soggetto a certe condizioni di integrabilità: ammette soluzioni solo se i suoi secondi membri rendono soddisfatte certe sei uguaglianze di carattere globale.

Tradizionalmente si ritiene definitiva l'indeterminazione del vettore $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ e neppure si fissa l'attenzione sulle condizioni di integrabilità del sistema linearizzato, perchè se si vuole riferirle proprio al sistema fondamentale della Elastostatica classica esse si limitano a richiedere che \mathcal{S}_* sia equilibrato.

Ma pensiamo invece di volere andare oltre la teoria classica, procedendo almeno al calcolo di $\mathbf{s}^{(2)}$. Per le componenti $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}$ di $\mathbf{s}^{(2)}$ si viene ancora ad avere un sistema lineare del tipo di (L'),

$$(L'') \quad \mathcal{L}_r[u^{(2)}] = \mathcal{H}_r[u^{(1)}] \cdots c_* \quad , \quad \mathcal{L}_r[u^{(2)}] = \mathcal{H}_r[u^{(1)}] \cdots \sigma_* \quad (r = 1, 2, 3),$$

ma i secondi membri non sono più direttamente forniti da \mathcal{S}_* . Vanno invece formati con le $u^{(1)}$ e le loro derivate in base alla preventiva integrazione del sistema (L'). Quindi non è affatto detto che anche per il nuovo sistema le condizioni di integrabilità vengano a essere automaticamente verificate.

Poniamo

$$(7) \quad \mathbf{M} = \int_{\mathcal{S}_*} \mathbf{s}_0^{(1)} \wedge \mathbf{f} d\sigma_* + \int_{\mathcal{S}_*} \mathbf{s}_0^{(1)} \wedge \mathbf{F} dc_*.$$

A calcoli fatti si trova che le condizioni di integrabilità relative al sistema (L'') si traducono — con l'intervento della (6) — in tre equazioni lineari per le componenti di $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ e precisamente, adoperando anche le notazioni (4), nelle equazioni

$$(8) \quad \sum_1^3 a_{rs} \omega_s^{(1)} = -M_r \quad (r = 1, 2, 3).$$

Già a questo punto resta assodata la necessità di una prima modifica alle vedute tradizionali: *in genere l'indeterminazione di $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ non è definitiva e va tolta tenendo il dovuto conto delle condizioni di integrabilità del sistema (L'').*

Ho detto «in genere» perchè può anche darsi che Δ si annulli. Nella (5) è già scritto che questo si verifica ogniqualevolta \mathcal{S}_* ammette un asse di equilibrio; in particolare, nel caso dell'equilibrio astatico. Anzi in questo caso insieme a tutti gli a_{rs} necessariamente si annulla anche il primo membro di ciascuna delle (8), in modo che tali equazioni per $\mathbf{M} = 0$ lasciano completamente indeterminato $\omega^{(1)}$ e invece non ammettono alcuna soluzione per $\mathbf{M} \neq 0$. Si avrà dunque un caso di netta incompatibilità tutte le volte che l'equilibrio di \mathcal{S}_* sia astatico, ma \mathbf{M} non si annulli.

Il calcolo effettivo delle singole M_r non è che una questione di Elastostatica classica. Però, stante la dipendenza della $\mathbf{s}_0^{(1)}(P_*)$ da \mathcal{S}_* , la struttura di \mathbf{M} non è di tipo *lineare*.

6. ESEMPIO SEMPLICE DI INCOMPATIBILITÀ. - Pongo la restrizione che il nostro solido omogeneo sia pure isotropo in c_* e chiamo E e ν i corrispondenti valori⁽⁵⁾ del modulo di Young e del rapporto di Poisson. Al tempo stesso specializzo c_* in un parallelepipedo retto rettangolo [piastra].

Intendendo ormai che O sia il centro del parallelepipedo e gli assi coordinati 1, 2, 3 abbiano le direzioni dei suoi spigoli, accennerò con σ_i, σ'_i le facce che rispettivamente vengono a essere normali al semiasse positivo e al semiasse negativo i ($i = 1, 2, 3$).

In più suppongo che siano trascurabili tanto le forze di massa, quanto le forze agenti su σ_3 e σ'_3 , mentre assumo: 1° $f_2 = f_3 = 0$ su σ_1 e σ'_1 , ma $f_1 = ay_2$, con a costante non nulla, su σ_1 ed $f_1 = -ay_2$ su σ'_1 ; 2° $f_3 = f_1 = 0$ su σ_2 e σ'_2 , ma $f_2 = by_3$, con b costante non nulla, su σ_2 ed $f_2 = -by_3$ sulla faccia opposta.

Si tratta - almeno in riguardo alla Elastostatica linearizzata - della sollecitazione $\mathcal{S}'_* + \mathcal{S}''_*$ risultante da due sollecitazioni a flessione semplice; l'una, \mathcal{S}'_* , costituita da forze dirette come l'asse 1 e avente quale piano neutro il piano degli assi 3 ed 1; l'altra, \mathcal{S}''_* , costituita da forze dirette come l'asse 2 e avente quale piano neutro il piano degli assi 2 e 1, ortogonale al precedente.

In corrispondenza all'intera $\mathcal{S}'_* + \mathcal{S}''_*$ siano $X_{rs}^{(1)} = X_{sr}^{(1)}$ ($r, s = 1, 2, 3$) i valori delle caratteristiche dello *stress* da abbinarsi al sistema (L'), cioè i valori inerenti alla Elastostatica classica. Ciascun $X_{rs}^{(1)}$ non potrà differire dalla somma dei due valori che esso rispettivamente assumerebbe in corrispondenza alla sola \mathcal{S}'_* e alla sola \mathcal{S}''_* , cioè dovrà aversi, in tutto c_* ,

$$(9) \quad X_{11}^{(1)} = ay_2, \quad X_{22}^{(1)} = by_3, \quad X_{33}^{(1)} = X_{12}^{(1)} = X_{23}^{(1)} = X_{31}^{(1)} = 0.$$

Parallelamente ogni componente $u_r^{(1)}$ di $\mathbf{s}^{(1)}$ dovrà rientrare tra le funzioni di secondo grado delle y , tutte le derivate parziali seconde delle $u^{(1)}$ rispetto alle y dovranno essere delle costanti.

(5) Proprio quelli che possono misurarsi sperimentando su deformazioni piccolissime del solido.

Potrei aggiungere tutte sei le relazioni fra *stress* e *strain* proprie della Elastostatica classica di corpi isotropi, ma per il mio scopo basterà rilevare che come allungamento lineare nella direzione dell'asse 3 si avrà

$$(10) \quad \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_3} = \frac{1}{E} \{X_{33}^{(1)} - \kappa (X_{11}^{(1)} + X_{22}^{(1)})\} = -\frac{\kappa}{E} \{ay_2 + by_3\}.$$

L'attuale specificazione di \mathcal{S}_* equivale ad assumere, insieme a $\mathbf{F} \equiv 0$,

$$(11) \quad f_1 = ay_2 \cos \widehat{n_* y_1}, \quad f_2 = by_3 \cos \widehat{n_* y_2}, \quad f_3 = 0$$

su tutte le sei facce del parallelepipedo, onde il lemma di Green dà subito luogo ⁽⁶⁾ all'annullarsi di tutti gli a_{rs} .

Si tratta di una sollecitazione astatica, ma, come subito farò vedere, per essa \mathbf{M} generalmente non si annulla. Precisamente si trova

$$(12) \quad M_1 = \frac{\kappa}{E} ab \int_{c_*} y_3^2 dc_*, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = 0,$$

restando così ben messo in evidenza che di regola si ha netta incompatibilità. Perchè si annulli anche M_1 e all'incompatibilità subentri la completa indeterminazione di $\omega^{(1)}$, occorre e basta che sia zero il rapporto di Poisson ⁽⁷⁾.

Le (11) evidentemente implicano

$$M_1 = - \int_{\sigma_*} u_3^{(1)} f_2 d\sigma_* = -b \int_{\sigma_*} u_3^{(1)} y_3 \cos \widehat{n_* y_2} d\sigma = -b \int_{c_*} y_3 \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2} dc_*,$$

ma si può in più profittare della linearità di $\partial u_3^{(1)} / \partial y_2$ nelle y e pure del fatto che l'attuale \mathcal{T} è terna centrale d'inerzia per c_* .

Si ottiene così

$$M_1 = -b \left\{ \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2} \right)_0 \int_{c_*} y_3 dc_* + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial y_2 \partial y_i} \int_{c_*} y_3 y_i dc_* \right\} = -b \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial y_2 \partial y_3} \int_{c_*} y_3^2 dc_*,$$

dopodichè il semplice richiamo della (10) rende evidente la (12)₁.

In modo analogo si possono dimostrare le (12)₂ e (12)₃, ma questo neppure occorre per lo scopo che mi ero prefisso.

(6) Cfr. (4), tenendo presente la coincidenza del baricentro di c_* con l'origine della \mathcal{T} .

(7) Oppure si riduca a zero una delle costanti a e b , cioè \mathcal{S}_* si riduca a una singola sollecitazione a flessione semplice.

Geochimica. — *Osservazioni geochimiche sul nichelio presente nelle masse peridotitico-serpentinose delle Alpi piemontesi*^(*). Nota^(**) del Corrisp. MASSIMO FENOGLIO.

In un mio studio ormai ultimato sulla presenza e diffusione del nichelio nelle imponenti masse peridotitico-serpentinose delle Alpi piemontesi, affioranti nel tratto Monte Viso-Monte Rosa, che verrà pubblicato prossimamente, è stato fra l'altro affrontato il problema geochimico dell'elemento in questione quale costituente minore di rocce eruttive femiche e ultrafemiche (noriti e peridotiti), con particolare riguardo alle peridotiti ed alle rocce serpentinose (serpentine e serpentinoscisti) dalle stesse derivate. Per ragioni di proporzione rispetto all'impostazione generale dello studio in parola, la parte geochimica fu in esso contenuta entro limiti piuttosto modesti, e perciò mi è parso opportuno di svilupparla un po' più adeguatamente nella presente Nota.

Dal punto di vista geochimico le conoscenze a tutt'oggi acquisite relative al nichelio contenuto nelle noriti e peridotiti sono piuttosto scarse e sono essenzialmente dovute al Vogt⁽¹⁾; studiosi⁽²⁾, che posteriormente ebbero occasione di occuparsi del problema, ribadirono in argomento i risultati cui giunse il suddetto Autore. Responsabili della presenza del nichelio nelle noriti e peridotiti dovrebbero essere alcuni dei componenti mineralogici che le costituiscono. Fra questi è da annoverarsi innanzi tutto, come unico minerale vero e proprio del nichelio, la pentlandite, che sovente è intimamente associata ad altri solfuri, principalmente a pirrotite. Il contenuto poi in nichelio di tali intime associazioni varierebbe generalmente da 3,5 % a 4 %, di guisa che sovente già dal tenore in solfo rivelato dall'analisi della roccia si dovrebbe potere, con buona approssimazione, risalire alla percentuale in nichelio posseduto dalla roccia stessa, qualora anche tutti i silicati di magnesio che accompagnano tali solfuri non possedessero un sensibile contenuto in ossido di nichelio, rappresentato da 0,15 % - 1 % dell'ossido di magnesio presente, cui andrebbe aggiunto l'ossido ferroso eventualmente presente nei silicati stessi. In questi la percentuale massima di ossido di nichelio spetterebbe all'olivina (0,1 % - 0,5 %) e quantità minori varianti da 0,01 % a 0,5 % spetterebbero ai pirosseni, all'orneblenda e alla mica. In conclusione, la presenza del nichelio nelle rocce suddette sarebbe imputabile in parte ad alcuni componenti essenziali (olivina, pirosseni, orneblenda, mica) ed in parte a taluni componenti accessori od accidentali (pentlandite, spesso intimamente associata ad altri solfuri, specialmente a pirrotite) delle rocce stesse.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Torino con un contributo straordinario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Presentata nella seduta del 15 aprile 1950.

(1) J. H. L. VOGT, «Zeit. prakt. Geol.», 225, 314 (1898); «Econom. Geol.», 18, 307 (1923).

(2) Si veda ad esempio: E. TRÖGER, «Chem. d. Erde», 9, 297 (1934-35); R. PIERUCCINI, «Per. Min.», 15, 195 (1946).

Accennate queste brevi notizie di carattere cronologico generale sulla geochimica del nichelio presente nelle noriti e peridotiti, rocce eruttive in cui questo elemento fu riscontrato in tenori più sensibili, anticipiamo subito che la distribuzione abbastanza uniforme del nichelio risultò estensiva a tutte le masse peridotitico-serpentinose da me studiate (con un tenore medio del 0,22 % ca. in ossido di nichelio), indipendentemente dai tipi litologici che le costituiscono – varianti da peridotiti vere e proprie a serpentine, a serpentinoscisti – e dalla loro pertinenza ad una piuttosto che ad un'altra formazione geologica di diversa età e di differente costituzione. Tenendo poi conto di queste premesse e anticipazioni, colla scorta dei risultati di osservazioni dirette e di ricerche sperimentali laboriose e delicate condotte dallo scrivente per oltre un triennio, accingiamoci a dare una configurazione concreta al problema geochimico del nichelio relativamente alle masse peridotitico-serpentinose delle Alpi piemontesi.

Dal punto di vista genetico, i tipi petrografici costituenti le masse peridotitico-serpentinose in questione possono essere ricondotti ad un magma unico ultrafemico peridotitico, come stanno a documentare i non rari nuclei di peridotite, che si rinvencono nelle serpentine vere e proprie e talvolta persino nei serpentinoscisti ad esse intimamente legati. Stabilita quindi tale unità magmatica, appare logico cominciare ad indagare come si presenta il nichelio nei prodotti della consolidazione del magma originario peridotitico, cioè nelle peridotiti.

A tale scopo venne eseguita la ricerca del nichelio nei singoli componenti mineralogici, previa separazione dalle peridotiti studiate, di tipo essenzialmente lherzolitico. E precisamente le determinazioni fatte sui componenti della lherzolite freschissima di Baldissero Canavese – rivelante all'analisi un contenuto in ossido di nichelio del 0,26 % e costituita da olivina e pirosseni (enstatite e diopside), con spinelli accessori (picotite e magnetite) e qualche raro grano di pirite – diedero i seguenti risultati:

0,20 % di NiO nell'olivina;
0,05 % » » nei pirosseni;
0,01 % » » nella picotite.

Per la magnetite e la pirite, data l'estrema scarsità dei due minerali, e per di più in granuli minutissimi, la ricerca del nichelio fu eseguita per via microchimica: con esito positivo per la magnetite, e negativo per la pirite⁽³⁾.

I risultati di queste ricerche consentono di ritenere che il nichelio, contenuto in massima parte nell'olivina, è vicariante del magnesio ed eventualmente del ferro bivalente; solamente in quantità molto esigua sostituisce questi stessi elementi nei pirosseni, nella picotite, e il ferro ferroso nella magnetite. E ciò

(3) Ricerche sistematiche, chimiche, microchimiche – integrate dov'era possibile da ricerche micrografiche – sui componenti accessori, tendenti a mettere in evidenza l'eventuale presenza di minerali veri e propri di nichelio (pentlandite, awaruite), hanno dato esito negativo non solo per la lherzolite di Baldissero Canavese, ma altresì per quella di altre località, non che per le serpentine ed i serpentinoscisti studiati. Nella serpentina di Selva (Poschiavo), invece, fu possibile recentemente identificare, per via calcografica, la pentlandite e l'awaruite, quali componenti accessori normali della roccia (F. DE QUERVAIN, «Schw. Min. Petr. Mitt.», 25, 305 (1945)).

non deve sorprendere, poichè i raggi degli ioni⁽⁴⁾ del nichelio e del magnesio sono identici: $\text{Ni}^{2+} = 0,78 \text{ \AA}$, $\text{Mg}^{2+} = 0,78 \text{ \AA}$; ed i valori dei raggi del nichelio e del ferro bivalente sono abbastanza prossimi: $\text{Ni}^{2+} = 0,78 \text{ \AA}$, $\text{Fe}^{2+} = 0,83 \text{ \AA}$. Del resto questa conclusione va perfettamente d'accordo con i principii informativi di Vogt, sopra accennati, e anche con i criterii cui sono ispirati i sistemi cristallografici degli ioni⁽⁵⁾, proposti recentemente da Carobbi e da Ventriglia.

Durante i fenomeni di serpentinizzazione delle masse peridotitiche, che interessano non soltanto l'olivina, ma anche i pirosseni, specialmente quelli rombici, il nichelio contenuto in detti minerali passerà nel serpentino, ancora come viceriante del magnesio ed eventualmente del ferro ferroso - che non si sia separato sotto forma di magnetite - assicurandone in tal modo la diffusione piuttosto omogenea e relativamente abbastanza costante, riscontrata nelle masse serpentinose studiate.

Infatti in alcuni casi di rocce serpentinose costituite essenzialmente da serpentino associato a poca magnetite, isolata quest'ultima e determinato in essa il nichelio, risultò che questo era presente in tenori molto esigui. E precisamente in due serpentine: una di San Vittore (Balangero) e l'altra di Bec Barmasse (Champorcher), in cui l'analisi aveva dato un contenuto in ossido di nichelio del 0,24 % per la prima e del 0,19 % per la seconda, l'apporto di questo ossido dovuto alla magnetite corrispondeva appena a 0,03 % e 0,01 % rispettivamente.

L'esperienza insegna che questi tenori in ossido di nichelio relativamente notevoli - ma tuttavia sempre modesti in modo assoluto - riscontrati nel serpentino, possono talora divenire gradatamente più elevati e dare origine ad idrosilicati di magnesio più o meno ricchi in nichelio, i quali, anche senza raggiungere la composizione della garnierite vera e propria, contengono tuttavia delle percentuali di ossido di nichelio varianti da 0,3 % a 5 % circa. Intendo alludere agli idrosilicati di magnesio nicheliferi, di composizione assai variabile e tuttora incerta, che si notano talvolta sotto forma di crosticine spugnose, di colore bianco-verdognolo, nei litoclasti delle serpentine delle Alpi piemontesi (Piosasco, Val d'Ala); i risultati del loro studio consentirono alla Gennaro⁽⁶⁾ di ravvicinarli ad alcune numeaiti poco nichelifere⁽⁷⁾.

Potremo infine aggiungere che parte del nichelio contenuto nelle rocce peridotitico-serpentinose, in condizioni peculiari di superficie, può passare in soluzione, dando origine alla formazione di prodotti secondari recenti o recentissimi: solfato di nichelio eptaidrato (morenosite) e carbonato basico di nichelio tetraidrato (zaraitite), che, in incrostazioni concrezionate, generalmente di tenue spessore, di colore verde, si notano talvolta nelle masse peridotitico-serpentinose delle Alpi

(4) I raggi degli ioni sono quelli riportati da W. KLEBER (*Angewandte Gitterphysik*, 1949).

(5) G. CAROBBI, «Atti e Mem. Acc. Sc. Let. e Ar. di Modena», 7 (1947); U. VENTRIGLIA, «Per. Min.», 18, 41 (1949).

(6) V. GENNARO, «Atti Acc. Sc. di Torino», 66, 433 (1931).

(7) A conclusioni analoghe a quelle della Gennaro condussero i risultati delle ricerche chimiche eseguite da RONDOLINO («Per. Min.», 9, 141 (1938)) sulla gavitte delle serpentine di Val della Gava nel Gruppo di Voltri, che lo autorizzarono a «considerare detto minerale come appartenente al gruppo delle nichelgimniti e numeaiti poco nichelifere».

piemontesi. Basterebbe appena ricordare: la morenosite⁽⁸⁾ di Comba Robert (Avigliana), di Alagna (Val Sesia) e di Nôtre Dame de la Garde (Valtournanche); la zaratite di Cogne⁽⁹⁾. Geneticamente questi minerali si ricollegano a fenomeni di ossidazione di solfuri, segregatisi dal magma originario peridotitico, rappresentati verosimilmente da pirite, che figura costantemente presente quale componente accessorio delle rocce peridotitico-serpentinose studiate. Sarebbero appunto le soluzioni solforiche originatesi dall'ossidazione della pirite che, esercitando azione solvente specialmente sull'olivina e sul serpentino, farebbero passare il nichelio in essi presente in soluzione sotto forma di solfato di nichelio. Un'origine diretta di quest'ultimo da ossidazione di solfuri nicheliferi tipo pentlandite è da considerarsi, nel caso nostro, più l'espressione di una possibilità che non quella di una probabilità, poichè ricerche sistematiche, intese a mettere in evidenza i solfuri in parola, come sopra è stato accennato, hanno dato esito negativo. Tale possibilità, ad ogni modo, implicherebbe di ipotizzare che i solfuri nicheliferi nelle rocce peridotitico-serpentinose esaminate si trovino diffusi sì tenuamente da sfuggire ad una pratica identificazione. Ricorderemo ancora che, nel caso della formazione della zaratite, all'azione ossidante si aggiunge l'azione di soluzioni solfatiche nichelifere diluitissime su carbonati di magnesio, come fu dallo scrivente, anni addietro, documentato sperimentalmente⁽¹⁰⁾.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sugli integrali di una equazione differenziale ordinaria*^(*). Nota di FERNANDO BERTOLINI, presentata^(**) dal Socio M. PICONE.

Prendendo le mosse da un lavoro del prof. M. Picone⁽¹⁾, determino un intervallo aperto in cui non si annulla la soluzione di una equazione differenziale omogenea, soddisfacente prescritte condizioni iniziali. L'intervallo così determinato dipendendo da una funzione in larga misura arbitraria, mostro (con esempi) come disponendo di questa si possano ottenere risultati più soddisfacenti.

1. Siano: A , un intervallo aperto (limitato o no) dell'asse reale, di punti estremi rispettivamente x' ed x'' ;

$g_s(x)$ [per $s = 0, 1, \dots, n-1$], n funzioni reali quasi-continue in A e sommabili in ogni intervallo chiuso e finito ad esso interno⁽²⁾;

(8) A. CAVINATO, «Per. Min.», 9, 141 (1938).

(9) A. PELLOUX, «Per. Min.», 2, 44 (1931); M. FENOGLIO, «Per. Min.», 5, 33 (1934).

(10) M. FENOGLIO, «Per. Min.», 5, 265 (1934).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) M. PICONE, *Nuova analisi esistenziale e quantitativa delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie*. «Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa», ser. II, vol. X, fasc. I (1941), pp. 13-36.

(2) O, come dirò d'ora in poi, nell'interno di A .

$z_0^{(s)}$ [per $s = 0, 1, \dots, n-1$], n valori reali arbitrari, il primo non nullo; x_0 , un punto di A .

È notissimo che esiste ed è unica una funzione $z(x)$ reale, la quale sia in un intorno di x_0 continua con le prime $n-1$ derivate, abbia la derivata $(n-1)$ -esima assolutamente continua e verifichi le

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^n}{dx^n} z(x) = \sum_{s=0}^{n-1} g_s(x) \frac{d^s}{dx^s} z(x) \quad (\text{quasi-ovunque}), \\ \frac{d^s}{dx^s} z(x_0) = z_0^{(s)} \quad (s = 0, 1, \dots, n-1) \quad (3). \end{array} \right.$$

La funzione $z(x)$ è certo diversa da zero in un intorno di x_0 , che mi propongo di determinare.

A questo scopo, opero il cambiamento di variabili ⁽⁴⁾

$$\left. \begin{array}{ll} (2') & z(x) = e^{y(x)}, \quad \text{se } z_0^{(0)} > 0 \\ (2'') & z(x) = -e^{y(x)}, \quad \text{se } z_0^{(0)} < 0 \end{array} \right\} y(x) = \log |z(x)|,$$

trasformando così le (1) nelle

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^n}{dx^n} y(x) = \sum_{s=0}^{n-1} g_s(x) \sum_{k_1, k_2, \dots, k_s} a_{k_1, k_2, \dots, k_s} \left[\frac{dy}{dx} \right]^{k_1} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]^{k_2} \dots \left[\frac{d^s y}{dx^s} \right]^{k_s} - \\ - \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}}^* a_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, 0} \left[\frac{dy}{dx} \right]^{k_1} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]^{k_2} \dots \left[\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right]^{k_{n-1}}, \\ \frac{d^s}{dx^s} y(x_0) = \frac{d^s}{dx^s} \log |z(x_0)|, \quad \frac{d^s}{dx^s} z(x_0) = z_0^{(s)} \quad [s = 0, 1, \dots, n-1], \end{array} \right.$$

avendo posto

$$(4) \quad \frac{d^s}{dx^s} e^{y(x)} = e^{y(x)} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_s} a_{k_1, k_2, \dots, k_s} \left[\frac{dy}{dx} \right]^{k_1} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]^{k_2} \dots \left[\frac{d^s y}{dx^s} \right]^{k_s};$$

la somma indicata nei secondi membri della (3) e della (4) con il segno $\sum_{k_1, k_2, \dots, k_s}$ si intende estesa a tutte le disposizioni con ripetizione di classe s dei numeri $0, 1, \dots, s$, tali che sia $\sum_{r=1}^s r \cdot k_r = s$; la somma indicata col segno $\sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}}^*$ si intende estesa a tutte le disposizioni con ripetizione di classe $n-1$ dei numeri $0, 1, \dots, n-1$, tali che sia $\sum_{r=1}^{n-1} r \cdot k_r = n$; a_{k_1, k_2, \dots, k_s} è una costante facilmente ricavata dalla (4).

(3) Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*. (Zanichelli, Bologna 1949), capo VIII, § 8, n. 1, pp. 140 ÷ 145 (vol. II).

(4) Per questa trasformazione, cfr. M. PICONE, *Ulteriore analisi quantitativa delle soluzioni di talune equazioni differenziali ordinarie*. « Annali di Matematica Pura ed Applicata », vol. I, ser. IV, to. XXVIII, Bologna 1949.

Infine, con le posizioni $y(x) \equiv y_1(x)$, $(d^k/dx^k)y(x) \equiv y_{k+1}(x)$, $[k = 1, 2, \dots, n-1]$ trasformo la (3) nel sistema equivalente del primo ordine

$$(5_s) \quad \frac{d}{dx} y_s(x) = y_{s+1}(x) \quad [s = 1, 2, \dots, n-1],$$

$$(5_n) \quad \frac{d}{dx} y_n(x) = \sum_{s=0}^{n-1} g_s(x) \sum_{k_1, k_2, \dots, k_s} a_{k_1, k_2, \dots, k_s} \left[\frac{dy_2}{dx} \right]^{k_1} \cdot \left[\frac{dy_3}{dx} \right]^{k_2} \cdot \dots \cdot \left[\frac{dy_{s+1}}{dx} \right]^{k_s} - \\ - \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}}^* a_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, 0} \left[\frac{dy_2}{dx} \right]^{k_1} \cdot \left[\frac{dy_3}{dx} \right]^{k_2} \cdot \dots \cdot \left[\frac{dy_n}{dx} \right]^{k_{n-1}},$$

$$(6_{s+1}) \quad y_{s+1}(x_0) = \frac{d^s}{dx^s} \log |z(x_0)|^{(s)} \quad , \quad \frac{d^s}{dx^s} z(x_0) = z_0^{(s)} \quad [s = 0, 1, \dots, n-1].$$

La nostra ricerca è ora ridotta alla determinazione di un intervallo di esistenza (che contenga x_0) della soluzione del sistema (5) verificante le (6): ci serviremo a questo fine del teorema I della citata Nota di M. Picone (6).

2. Siano: $u_s(x)$ $[s=1, 2, \dots, n]$, n funzioni reali di x , assolutamente continue all'interno di A ; b , una quantità positiva maggior di $\sum_{s=1}^n |u_s(x_0) - \alpha_s|$.

Prima di enunciare il teorema generale, facciamo le posizioni seguenti:

$$7_1) \quad A_k = \sum_{i=0}^{k-1} [|u(x)| + b]^i \cdot |u(x)|^{k-1-i}, \quad \text{se } n=1;$$

$$7_2) \quad A_{0k} = \sum_{i=0}^{k-1} [|u_2(x)| + b]^i \cdot |u_2(x)|^{k-1-i}, \quad A_{k0} = \sum_{i=0}^{k-1} [|u_1(x)| + b]^i \cdot |u_1(x)|^{k-1-i},$$

$$7_2') \quad A_{hk} = \text{al minore dei due numeri seguenti: } [|u_2(x)| + b]^k \cdot A_{h0} + |u_1(x)|^k \cdot A_{0k}, \\ [|u_1(x)| + b]^k \cdot A_{0k} + |u_2(x)|^k \cdot A_{h0}, \quad \text{se } n=2;$$

$$7_n) \quad A_{k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, 0, k_{i+1}, \dots, k_n} = A_{k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n}$$

$$7_n') \quad A_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \text{al minore dei numeri seguenti: } A_{k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, 0, k_{i+1}, \dots, k_n} [|u_i(x)| + b]^{k_i} + \\ + |u_1(x)|^{k_1} \cdot |u_2(x)|^{k_2} \cdot \dots \cdot |u_{i-1}(x)|^{k_{i-1}} \cdot |u_{i+1}(x)|^{k_{i+1}} \cdot \dots \cdot |u_n(x)|^{k_n} \cdot A_{0, 0, 0, \dots, 0, k_i, 0, \dots, 0}$$

$i = 1, 2, \dots, n]$, se n è un qualunque numero naturale maggior di uno;

$$(8) \quad P(x, b) \equiv \sum_{s=0}^{n-1} |g_s(x)| \sum_{k_1, k_2, \dots, k_s} a_{k_1, k_2, \dots, k_s} \cdot A_{k_1, k_2, \dots, k_s}(x, b) + \\ + \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}}^* a_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, 0} A_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, 0}(x, b) + 1.$$

(5) Questa quantità chiameremo d'ora innanzi α_{s+1} .

(6) Pp. 15 e sgg.

Veniamo ora al teorema generale:

I. *Comunque si prendano* $x_0, z_0^{(i)}, b$ *ed* $u_s(x)$, *purché* $b > \sum_{s=1}^n u_s(x_0) - \alpha_s$, *nell'intorno* $I(x_0, b, z_0^{(0)}, z_0^{(1)}, \dots, z_0^{(n-1)})$ *di* x_0 , *luogo dei punti di* A *per cui*

$$(9) \quad \omega(x) \equiv \Omega(x) \cdot e^{\int_{x_0}^x P(t, b) dt} \equiv \{ |\alpha_1 - u_1(x_0)| + |\alpha_2 - u_2(x_0)| + \dots + \\ + |\alpha_n - u_n(x_0)| + \int_{(x_0, x)} \left| \left[\frac{du_1}{dt} - u_2(t) \right] + \dots + \left[\frac{du_{n-1}}{dt} - u_n(t) \right] + \right. \\ \left. + \left| \frac{du_n}{dt} - \sum_{s=0}^{n-1} g_s(t) \sum_{k_1, k_2, \dots, k_s} a_{k_1, k_2, \dots, k_s} u_2^{k_1} u_3^{k_2} \dots u_{s+1}^{k_s} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}}^* a_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, 0} u_2^{k_1} u_3^{k_2} \dots u_n^{k_{n-1}} \right| \right] dt \cdot e^{\int_{x_0}^x P(t, b) dt} < b,$$

esiste ed è unica una soluzione delle (5) verificante le (6), quindi non si annulla la soluzione della (1), ivi certo esistente; di più $\sum_{s=1}^n |y_s(x) - u_s(x)| < \omega(x)$.

Osservando le ipotesi del teorema citato, ci si avvede che il teorema ora enunciato ne è un corollario: l'unica proposizione che richieda dimostrazione esplicita è la

$$(10) \quad \sum_{s=2}^n |y_s(x) - u_s(x)| + \\ + \left| \sum_{s=0}^{n-1} g_s(x) \sum_{k_1, k_2, \dots, k_s} a_{k_1, k_2, \dots, k_s} (y_2^{k_1} y_3^{k_2} \dots y_{s+1}^{k_s} - u_2^{k_1} u_3^{k_2} \dots u_{s+1}^{k_s}) + \right. \\ \left. + \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}}^* a_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, 0} (u_2^{k_1} u_3^{k_2} \dots u_n^{k_{n-1}} - y_2^{k_1} y_3^{k_2} \dots y_n^{k_{n-1}}) \right| \leq \\ \leq \sum_{s=1}^n |y_s(x) - u_s(x)| \cdot P(x, b),$$

come conseguenza della disuguaglianza $b > \sum_{s=1}^n |y_s(x) - u_s(x)|$ [che corrisponde alla ipotesi (2) del teorema citato; l'altra ipotesi (3) si dimostra, nel nostro caso, in modo analogo].

Intanto, dalla $|y_s(x) - u_s(x)| < b$ segue la $|y_s(x)| < |u_s(x)| + b$, e quindi

$$|y_s^{k_s}(x) - u_s^{k_s}(x)| \leq |y_s(x) - u_s(x)| \sum_{i=0}^{k_s-1} |y_s^i \cdot u_s^{k_s-1-i}| \leq |y_s - u_s| \cdot A_{0,0,\dots,0,k_s,0,\dots,0};$$

in secondo luogo,

$$|y_r^{k_r} \cdot y_s^{k_s} - u_r^{k_r} \cdot u_s^{k_s}| \leq |y_r^{k_r} - u_r^{k_r}| \cdot |y_s^{k_s}| + |y_s^{k_s} - u_s^{k_s}| \cdot |u_r^{k_r}| \leq \\ \leq \{ (|u_s| + b)^{k_s} \cdot A_{0,0,\dots,0,k_s,0,\dots,0} + |u_s^{k_s}| \cdot A_{0,0,\dots,0,k_s,0,\dots,0} \} \cdot [|y_r - u_r| + |y_s - u_s|] \leq \\ \leq A_{0,0,\dots,0,k_r,0,\dots,0,k_s,0,\dots,0} [|y_r - u_r| + |y_s - u_s|];$$

in generale, per induzione, si vede che

$$|y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_n^{k_n} - u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n}| \leq A_{k_1, \dots, k_n} \sum_{i=1}^n |y_i - u_i|.$$

Quest'ultima relazione, confrontata con la (8), dimostra la (10).

3. Mi propongo ora di stabilire, tra gli infiniti valori di b , cui fa cenno il teorema I, se ve n'è uno che convenga scegliere, in modo da render massima l'ampiezza dell'intervallo $I(x_0, b, z_0^{(0)}, z_0^{(1)}, \dots, z_0^{(n-1)})$. Esamino in primo luogo il problema per l'estremo destro.

La funzione $\omega(x) \cdot b^{-1}$ è crescente rispetto ad x nell'intervallo (x_0, x'') dal valore $\sum_{i=1}^n |\alpha_i - u_i(x_0)| \cdot b^{-1}$ ad un valor limite eventualmente infinito che chiamo $\omega(x'') \cdot b^{-1}$, è derivabile rispetto ad x , e questa derivata è continua in A .

Se accade che, per un certo valore di b , è $\omega(x'') \cdot b^{-1} \leq 1$, per quel valore di b l'estremo destro di $I(x_0, b, z_0^{(0)}, z_0^{(1)}, \dots, z_0^{(n-1)})$ è proprio x'' .

Se invece per ogni valore di b [maggiore di $\sum_{i=1}^n |\alpha_i - u(x_0)|$] riesce $\omega(x'') \cdot b^{-1} > 1$, allora l'estremo destro ξ di $I(x_0, b, z_0^{(0)}, z_0^{(1)}, \dots, z_0^{(n-1)})$ è implicitamente definito dalla

$$(11) \quad \omega(\xi) \cdot b^{-1} \equiv \Omega(\xi) \cdot b^{-1} \cdot e^{x_0} = 1 \quad (\xi \geq x_0),$$

come funzione di b [che denoteremo con $\xi(b)$] nell'intervallo aperto

$$\left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i - u_i(x_0)|, x'' \right).$$

Si noti che $\xi(b) = x_0$ per $b = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - u_i(x_0)|$.

Poichè la funzione $P(x, b)$ è continua rispetto a b , ed inoltre derivabile quante volte si vuole, con derivata seconda non negativa, posso derivare $\xi(b)$:

$\xi'(b)$ ha lo stesso segno dell'espressione $1 - \int_{x_0}^{\xi} P_b(t, b) dt$. Si ha quindi il teorema:

II. Se l'estremo destro dell'intervallo $I(x_0, b, z_0^{(0)}, z_0^{(1)}, \dots, z_0^{(n-1)})$ non coincide (per alcun valore di b) con x'' , il suo massimo valore m al variar di b soddisfa le equazioni

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega(m) \cdot b^{-1} \cdot e^{x_0} = 1 \\ b \cdot \int_{x_0}^m P_b(t, b) dt = 1 \end{array} \right. \quad (m > x_0)$$

che valgono a determinarlo completamente.

La seconda delle (12) definisce l'estremo superiore dell'integrale implicitamente come funzione di b [che denoteremo con $\eta(b)$] nell'intervallo $(0, +\infty)$: $\eta(b)$ ha sempre derivata negativa, ed inoltre $\eta(0^+) = +\infty$, $\eta(+\infty) = x_0$.

Poichè $\xi'(b)$ ha lo stesso segno di $1 - \int_{x_0}^{\xi} P_b(t, b) dt$, posso dire che:

la funzione $\xi(b)$ è crescente o decrescente secondochè sia $\xi(b) < \eta(b)$ ovvero $\xi(b) > \eta(b)$;

nei punti in cui è $\xi(b) = \eta(b)$ si ha $\xi'(b) = 0$, ed anzi [essendo sempre $\eta'(b) < 0$] $\xi(b)$ interseca⁽⁷⁾ $\eta(b)$ e vi ha un massimo relativo;

conseguentemente, non può essere $\eta(b) = \xi(b)$ più di una volta, ed in questo caso $\xi(b)$ ha in quel punto il massimo assoluto, essendo crescente per valori di b minori, decrescente per valori maggiori.

Ma nelle nostre ipotesi, certamente è $\xi(b) = \eta(b)$ una volta almeno; se la differenza $\eta(b) - \xi(b)$ non fosse mai nulla, siccome per $b = \sum_{s=1}^n |\alpha_s - u_s(x_0)|$ è positiva, essa si manterrebbe tale per ogni valor di b ; ma allora $\xi(b)$ crescerebbe dal valore x_0 ad un altro maggiore, mentre sappiamo che $\eta(b)$ tende ad x_0 , per b divergente: si avrebbe quindi $\lim_{b \rightarrow \infty} (\eta(b) - \xi(b)) < 0$, che è assurdo.

Il teorema II è completamente dimostrato.

Analogamente si trova:

II'. Se l'estremo sinistro dell'intervallo $I(x_0, b, z_0^{(0)}, z_0^{(1)}, \dots, z_0^{(n-1)})$ non coincide (per alcun valore di b) con x' , il suo minimo valore m al variar di b soddisfa le equazioni

$$(12') \quad \begin{cases} \Omega(m) \cdot b^{-1} \cdot e^m = 1 \\ b \cdot \int_m^{x_0} P_b(t, b) dt = 1 \end{cases} \quad (m < x_0)$$

che valgono a determinarlo completamente.

4. Esamino il caso particolare $u_s(x) \equiv 0$ [$s = 1, 2, \dots, n$].

Se pongo: $C_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}} = g_s(x) \cdot a_{k_1, k_2, \dots, k_s}$ quando $\sum_{r=1}^s r \cdot k_r = s$ e $k_r = 0$ per $r = s+1, s+2, \dots, n-1$; $C_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}} = -a_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, 0}$ quando $\sum_{r=1}^{n-1} r \cdot k_r = n$; $C_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}} = 0$ in tutti gli altri casi, la (5_n) può scriversi

$$(5'_n) \quad \frac{d}{dx} y_n(x) = g_0(x) + \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}}^{0, \infty} C_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}} \left[\frac{dy_2}{dx} \right]^{k_1} \cdot \left[\frac{dy_3}{dx} \right]^{k_2} \cdot \dots \cdot \left[\frac{dy_n}{dx} \right]^{k_{n-1}};$$

(7) Intendo: la funzione $\xi(b) - \eta(b)$ è ivi nulla e cambia di segno.

adottando allora per $P(x, b)$ la definizione seguente ⁽⁸⁾

$$P(x, b) = \sum_{s=1}^n \Phi_s(x) \cdot b^{s-1}, \text{ dove è}$$

$$\Phi_s(x) = (n-1) + \sum_{k_1+k_2+\dots+s} |C_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}}| \frac{k_1^{k_1} k_2^{k_2} \dots k_{n-1}^{k_{n-1}}}{s^s}, \text{ per } s=1,$$

$$\Phi_s(x) = \sum_{k_1+k_2+\dots+s} |C_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}}| \frac{k_1^{k_1} k_2^{k_2} \dots k_{n-1}^{k_{n-1}}}{s^s}, \text{ per } s \neq 1,$$

e ponendo $\int_{(x_0, x)} \Phi_s(t) dt = c_s(x)$ [$s=1, 2, \dots, n$], le equazioni (12) si scrivono:

$$(12'') \quad \begin{cases} \left[|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| + \int_{x_0}^m |g_0(t)| dt \right] \cdot b^{-1} \cdot e^{\sum_{s=1}^n c_s(m) b^{s-1}} = 1, \\ \sum_{s=1}^n s \cdot c_{s+1}(m) \cdot b^s = 1; \end{cases} \quad m \geq x_0.$$

5. Espongo ora in particolare il caso delle equazioni del secondo ordine. Riscrivo l'equazione

$$(1') \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} z(x) = g_0(x) \cdot z(x) + g_1(x) \frac{d}{dx} z(x) & [\text{quasi ovunque in } A] \\ z(x_0) = z_0^{(0)}, \quad z'(x_0) = z_0^{(1)}, & \text{supponendo } z_0^{(0)} > 0. \end{cases}$$

La equazione in m seguente

$$(13) \quad \left\{ |u_1(x_0) - \log z_0^{(0)}| + \left| u_2(x_0) - \frac{z_0^{(1)}}{z_0^{(0)}} \right| + \int_{x_0}^m \left[\left| \frac{du_1}{dt} - u_2(t) \right| + \right. \right. \\ \left. \left. \left| \frac{du_2}{dt} + g_1(t) \cdot u_2(t) + u_2^2(t) - g_0(t) \right| \right] dt \right\} \cdot (m - x_0) \cdot e^{\sum_{s=1}^m \int_{x_0}^s [|g_1(t)| + 2|u_2(t)| dt + (m - x_0) + 1]} = 1$$

equivale, in questo caso, al sistema (12), da cui si ottiene ponendo $P(t, b) \equiv$
 $\equiv 1 + b + |g_1(t)| + 2|u_2(t)|.$

Il numero m trovato con l'equazione (13) dipende dalle funzioni $u_1(x)$ ed $u_2(x)$: interessa notare che al variar di queste ultime, l'estremo superiore di m è proprio il primo zero maggior di x_0 della soluzione della (1'), o l'estremo destro dell'intervallo d'esistenza di essa; quindi con scelta felice delle u_1, u_2 , si possono ottenere risultati più soddisfacenti. Infatti nella (13) sarà necessariamente $m > x_2$ se pongo

$$u_1(x) \equiv \log z(x) \text{ per } x_0 \leq x \leq x_2, \quad u_1(x) \equiv u_1(x_2) + u_1'(x_2) \cdot [x - x_2] \text{ per } x \geq x_2 \\ u_2(x) \equiv u_1'(x),$$

(8) Cfr. op. cit., pp. 27 e sgg.: convenzionalmente, $0^0 = 1$.

avendo chiamato $z(x)$ la soluzione della (1'), x_1 il primo zero di essa maggior di x_0 o, in mancanza, l'estremo destro del suo intervallo di esistenza, ed essendo $x_0 < x_2 < x_1$.

ESEMPIO. - Consideriamo la equazione

$$(14) \quad z'' + x^2 \cdot z = 0 \quad , \quad z(0) = 1 \quad , \quad z'(0) = 0 ,$$

per la quale la (13) si scrive

$$\left\{ |u_1(0)| + |u_2(0)| + \int_0^m [|u'_1 - u_2| + |u'_2 + u_2 + t^2|] dt \right\} \cdot m \cdot e^{1+m+2 \int_0^m |u_2| dt} = 1 ,$$

ottenendo così

$$m = 0,78 \quad , \quad \text{per} \quad u_1 \equiv u_2 \equiv 0 ;$$

$$m = 1,384 \quad , \quad \text{per} \quad u_1 = -\frac{x^4}{12} - \frac{x^8}{504}, \quad u_2 \equiv u'_1 ;$$

$$m = 1,468 \quad , \quad \text{per} \quad u_1 = -\frac{x^4}{12} - \frac{x^8}{504} - \frac{x^{12}}{12 \cdot 474}, \quad u_2 \equiv u'_1 .$$

Il valore effettivo del primo zero positivo di $z(x)$ è 2,003 calcolato con funzioni di Bessel.

Le funzioni u_1 , ed u_2 scelte sono gli sviluppi di Mc Laurin, arrestati ai primi termini, della soluzione del sistema ottenuto dell'equazione (14) con le trasformazioni indicate al n. 1.

È interessante confrontare questi risultati con gli analoghi che si possono ottenere utilizzando i teoremi V e VI del lavoro del prof. M. Picone citato nella nota (4). In base a questi teoremi si può affermare che la soluzione della equazione (14) non si annulla nell'intervallo $(0, 1/\sqrt{2})$; si noti che $1/\sqrt{2} = 0,707$ circa.

Analisi matematica. — *Une méthode d'approximation des fonctions réelles d'une variable complexe par des fonctions harmoniques.*

Nota di FRANÇOIS LEJA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

I. NOTATIONS ET CERTAINES FONCTIONS LIMITES. — Soit F la frontière d'un domaine plan quelconque D contenant le point $z = \infty$ dans son intérieur et

$$f(z)$$

une fonction réelle définie sur F. Supposons que le diamètre transfini $d(F)$ de l'ensemble F soit positif et que la fonction frontière $f(z)$ soit bornée sur F. Soient m et M les bornes de $f(z)$

$$m \leq f(z) \leq M ,$$

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

n un nombre naturel fixe quelconque et $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ un système de $n+1$ points différents quelconques de F . Ce système sera désigné plus brièvement par $\zeta^{(n)}$

$$(1) \quad \zeta^{(n)} = \{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n\}.$$

Formons les polynomes de Lagrange correspondant au système (1)

$$\varrho^{(j)}(z, \zeta^{(n)}) = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^n \frac{z - \zeta_k}{\zeta_j - \zeta_k}, \quad (j = 0, 1, \dots, n),$$

et soit λ un paramètre réel nonnégatif. La fonction du point z définie par la formule

$$(2) \quad F(z, \lambda, \zeta^{(n)}) = \sum_{j=0}^n |\varrho^{(j)}(z, \zeta^{(n)})| e^{n\lambda f(\zeta_j)}$$

admet dans le plan entier des valeurs positives se réduisant à $e^{n\lambda f(z)}$ aux points du système (1).

Faisons varier les points (1) dans F et désignons par $F_n(z, \lambda)$ la borne inférieure

$$(3) \quad F_n(z, \lambda) = \inf_{\zeta^{(n)} \in F} \{F(z, \lambda, \zeta^{(n)})\}$$

lorsque z, λ et n sont fixes quelconques. Puisque $\lambda f(z) \geq \lambda m$ et que

$$F(z, \lambda, \zeta^{(n)}) \geq \left(\sum_{j=0}^n |\varrho^{(j)}(z, \zeta^{(n)})| \right) e^{n\lambda m} \geq e^{n\lambda m}$$

on a $F_n(z, \lambda) \geq e^{n\lambda m}$, donc les fonctions du point z

$$(4) \quad f_n(z, \lambda) = \log \sqrt[n]{F_n(z, \lambda)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

sont définies dans le plan entier et satisfont à l'inégalité

$$(5) \quad f_n(z, \lambda) \geq \lambda m \quad \text{quel que soit } z \text{ et } \lambda.$$

D'autre part, on a

$$(6) \quad f_n(z, \lambda) \leq \lambda \cdot f(z) \quad \text{pour } z \in F$$

car, si z_0 est un point de F et le système (1) est tel qu'on ait $\zeta_0 = z_0$, alors

$$F(z_0, \lambda, \zeta^{(n)}) = e^{n\lambda f(z_0)},$$

donc $F_n(z_0, \lambda) \leq e^{n\lambda f(z_0)}$, ce qui entraîne l'inégalité (6).

Les fonctions extrémales (4) jouissent de la propriété suivante:

THÉOREME I. — *Quels que soient z et λ , il existe la limite*

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z, \lambda) = f(z, \lambda).$$

Pour chaque $\lambda \geq 0$ fixe, $f(z, \lambda)$ est une fonction harmonique du point z dans le plan entier en dehors de F et satisfait aux inégalités

$$(8) \quad \lambda m \leq f(z, \lambda) \leq \lambda f(z) \quad \text{pour } z \in F.$$

Démonstration. - Désignons par $\Phi^{(j)}(z, \lambda, \zeta^{(n)})$ le polynome suivant

$$(9) \quad \Phi^{(j)}(z, \lambda, \zeta^{(n)}) = \zeta^{(j)}(z, \zeta^{(n)}) \cdot e^{n\lambda f(\zeta_j)}$$

et par $\Phi_n(z, \lambda)$ la borne inférieure du plus grand des modules $|\Phi^{(j)}(z, \lambda, \zeta^{(n)})|$, $j=0, 1, \dots, n$, lorsque, n étant fixe, le système $\zeta^{(n)}$ varie arbitrairement dans F

$$(10) \quad \Phi_n(z, \lambda) = \inf_{\zeta^{(n)} \in F} \{ \max_{(j)} |\Phi^{(j)}(z, \lambda, \zeta^{(n)})| \}.$$

Il suit immédiatement de la formule (2) que

$$\max_{(j)} |\Phi^{(j)}(z, \lambda, \zeta^{(n)})| \leq F(z, \lambda, \zeta^{(n)}) \leq (n+1) \cdot \max_{(j)} |\Phi^{(j)}(z, \lambda, \zeta^{(n)})|$$

donc, quels que soient z, λ et n , on a

$$(11) \quad \Phi_n(z, \lambda) \leq F_n(z, \lambda) \leq (n+1) \Phi_n(z, \lambda).$$

J'ai démontré ailleurs ⁽¹⁾ que:

1° Les fonctions extrémales (10) satisfont, quels que soient z et λ , aux inégalités

$$(12) \quad \Phi_{\mu+\nu}(z, \lambda) \geq \Phi_{\mu}(z, \lambda) \cdot \Phi_{\nu}(z, \lambda), \quad \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \dots,$$

ce qui entraîne l'existence de la limite

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\Phi_n(z, \lambda)} = \Phi(z, \lambda).$$

2° La fonction $\log \Phi(z, \lambda)$ du point z est harmonique en dehors de F pour chaque λ fixe.

Or, il résulte de (13) et des inégalités (11) que

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{F_n(z, \lambda)} = \Phi(z, \lambda)$$

donc la limite (7) existe quels que soient z et λ . D'autre part, on a

$$(15) \quad f(z, \lambda) = \log \Phi(z, \lambda),$$

donc la fonction $f(z, \lambda)$ est harmonique en dehors de F , quel que soit λ .

Il est clair que la fonction limite $f(z, \lambda)$ dépend de l'ensemble F et de la fonction frontière $f(z)$. Pour marquer la dépendance de F , $f(z, \lambda)$ sera désigné aussi par $f(z, \lambda; F)$.

2. APPROXIMATION DE LA FONCTION FRONTIÈRE. - Désignons par Δ l'ensemble complémentaire à la somme $D + F$ par rapport au plan. Il est clair que Δ est un ensemble borné ouvert ou vide. Lorsque Δ est vide, l'ensemble F ne partage pas le plan et dans le cas, où Δ n'est pas vide, F partage le plan en un nombre fini ou dénombrable de domaines disjoints D, D_1, D_2, \dots

(1) « Bull. Acad. Polon. des Sc. et des Lettres » (Série A), Kraków, pp. 79-92 (1936).

Remarquons que l'expression (2) ne dépend pas de la fonction frontière $f(z)$ lorsque $\lambda = 0$, donc la fonction limite $f(z, 0)$ ne dépend pas de $f(z)$. Dans ce cas particulier on sait ⁽²⁾ que

$$(16) \quad f(z, 0) = \begin{cases} G(z) & \text{dans le domaine } D, \\ 0 & \text{dans } \Delta + F, \end{cases}$$

où $G(z)$ est la fonction de Green du domaine D ayant son pôle à l'infini.

Supposons maintenant que $\lambda > 0$ et considérons la famille de fonctions de z

$$(17) \quad \frac{1}{\lambda} \cdot f(z, \lambda), \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Toutes ces fonctions sont définies dans le plan entier et harmoniques en dehors de l'ensemble F . Nous allons examiner le comportement de cette famille lorsque $\lambda \rightarrow 0$.

Observons d'abord que, si $f(z)$ est une constante, il suit de (8) que chacune des fonctions (17) est sur F constamment égale à $f(z)$ donc la famille (17) tend sur F vers $f(z)$. Cette propriété simple de la famille (17) peut être généralisée comme il suit:

THÉORÈME II. — *Lorsque la fonction $f(z)$ est continue sur F et F ne partage pas le plan, la famille (17) tend sur F vers $f(z)$*

$$(18) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\lambda} f(z, \lambda) \right] = f(z), \quad z \in F,$$

la convergence étant uniforme sur F .

Démonstration. — Nous nous appuyerons sur le théorème suivant dû à M. Lavrentieff ⁽³⁾: Chaque fonction $f(z)$ définie et continue dans un ensemble plan fermé et borné E , ne possédant pas des points intérieurs et ne partageant pas le plan, admet une approximation uniforme dans E par des polynômes.

Il s'ensuit que la fonction $e^{f(z)}$ admet sur F une approximation uniforme par des polynômes, c'est-à-dire à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un polynôme $P_k(z)$ tel que

$$(19) \quad e^{f(z)} - \varepsilon < |P_k(z)| < e^{f(z)} + \varepsilon \quad \text{pour } z \in F.$$

On en déduit facilement la conclusion qu'à chaque $\eta > 0$ on peut faire correspondre un polynôme $P_k(z)$ et un nombre $\delta = \delta(\eta) > 0$ tels que, quel que soit ρ contenu dans l'intervalle $[1, 1 + \delta]$, on ait

$$(20) \quad e^{[f(z) - \eta]} < |P_k(z)| < e^{[f(z) + \eta]} \quad \text{pour } 1 \leq \rho \leq 1 + \delta, z \in F.$$

Soit ε un nombre positif quelconque. Je dis qu'on peut lui faire correspondre un nombre positif $\lambda(\varepsilon)$ tel que la fonction limite (14) satisfasse à l'inégalité

$$(21) \quad \Phi(z, \lambda) \geq e^{\lambda[f(z) - \varepsilon]} \quad \text{lorsque } 0 < \lambda < \lambda(\varepsilon), z \in F.$$

(2) « Ann. Soc. Polon. de Math. », t. 12, pp. 57-71 (1934).

(3) Voir J. L. WALSH, *Interpolation et Approximation*, New York 1935, p. 48.

En effet, soit k le degré du polynome $P_k(z)$ remplissant la condition (20), où $\eta = \varepsilon/2$. Posons $\lambda(\varepsilon) = 1/k$ et soit λ un nombre fixe quelconque appartenant à l'intervalle

$$0 < \lambda < \lambda(\varepsilon) = \frac{1}{k}.$$

Faisons correspondre à ce λ deux nombres naturels $p = p(\lambda)$ et $q = q(\lambda)$ tels qu'on ait

$$(22) \quad 1 \leq \frac{q}{p} \lambda \leq 1 + \delta, \quad \text{où } \delta = \delta(\eta),$$

et soit z un point quelconque de F et n un nombre naturel de la forme

$$(23) \quad n = \frac{q}{p} \nu, \quad \nu = p, 2p, 3p, \dots$$

Au point donné z , aux nombres donnés λ et n et à chaque nombre $\mu > 0$ correspond manifestement un système de $n + 1$ points de F , soit

$$(24) \quad \xi^{(n)} = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\},$$

tel qu'on ait

$$(25) \quad F_n(z, \lambda) > \left(\sum_{j=0}^n |\Omega^{(j)}(z, \xi^{(n)})| e^{n\lambda f(\xi_j)} \right) - \mu.$$

Puisque $k < 1/\lambda \leq q/p$ on a $k\nu \leq \nu q/p = n$ donc le degré du polynome $[P_k(z)]^\nu$ est plus petit que le nombre des points du système (24). Par suite, d'après la formule d'interpolation de Lagrange, on a quel que soit z

$$[P_k(z)]^\nu = \sum_{j=0}^n [P_k(\xi_j)]^\nu \cdot \Omega^{(j)}(z, \xi^{(n)}),$$

donc d'après les inégalités (20)

$$e^{\nu \varrho [f(z) - \eta]} \leq \sum_{j=0}^n e^{\nu \varrho [f(\xi_j) + \eta]} \cdot |\Omega^{(j)}(z, \xi^{(n)})|,$$

où ϱ est un nombre quelconque de l'intervalle fermé $[1, 1 + \delta]$. En tenant compte de (22) on peut poser $\varrho = \lambda q/p$ donc $\nu \varrho = \lambda \nu q/p = \lambda n$ et par suite

$$e^{n\lambda [f(z) - \eta]} \leq e^{n\lambda \eta} \cdot \sum_{j=0}^n |\Omega^{(j)}(z, \xi^{(n)})| e^{n\lambda f(\xi_j)}.$$

En appliquant maintenant l'inégalité (25) on obtient

$$e^{n\lambda [f(z) - \varepsilon]} \leq F_n(z, \lambda) + \mu$$

où l'on peut poser $\mu = 0$, car μ est arbitrairement petit, donc

$$e^{\lambda [f(z) - \varepsilon]} \leq \sqrt[n]{F_n(z, \lambda)},$$

d'où l'on déduit l'inégalité (21).

Observons maintenant que, d'après (8) et (21), on a

$$f(z) - \varepsilon \leq \frac{1}{\lambda} \cdot f(z, \lambda) \leq f(z) \quad \text{pour } 0 < \lambda < \lambda(\varepsilon), z \in F,$$

donc la limite (18) existe et la convergence est uniforme sur F .

Dans le théorème précédant nous avons supposé que l'ensemble F ne partage pas le plan pour pouvoir appliquer le théorème de Lavrentieff et d'en déduire les inégalités (19) qui constituent la base de la démonstration. Mais la condition (19) peut être remplie sans aucune hypothèse concernant F .

Admettons que l'ensemble F soit quelconque ⁽⁴⁾ et supposons que la fonction frontière $f(z)$ soit telle que la fonction $e^{f(z)}$ admette dans F une approximation uniforme par les modules des polynômes, c'est-à-dire qu'à chaque $\varepsilon > 0$ on puisse faire correspondre un polynôme $P_k(z)$ tel que les inégalités (19) soient satisfaites dans F . Alors la démonstration précédente reste valable et par suite le théorème II peut être généralisé comme il suit :

THÉORÈME III. — *Lorsque la fonction $e^{f(z)}$ admet sur F une approximation uniforme par les modules des polynômes, il existe la limite (18) aux points de F et la convergence est uniforme sur F ⁽⁵⁾.*

3. PROPOSITIONS AUXILIAIRES. — Supposons maintenant que l'ensemble F partage le plan. Alors l'ensemble Δ n'est pas vide et il est une somme finie ou dénombrable des domaines disjoints simplement connexes

$$\Delta = D_1 + D_2 + \dots$$

Désignons par Γ la frontière de Δ . Il est clair que $\Gamma \subset F$ et que chaque point de Γ est situé sur un continu appartenant à F . Les fonctions (17) sont harmoniques dans les domaines D et Δ .

THÉORÈME IV. — *Quelle que soit la fonction frontière $f(z)$, les fonctions (17) forment une famille normale dans Δ et satisfont, quel que soit λ , aux inégalités*

$$(26) \quad m \leq \frac{1}{\lambda} \cdot f(z, \lambda) \leq M, \quad z \in \Delta + F.$$

Démonstration. — Soit $\zeta^{(n)} = \{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ un système de $n + 1$ points quelconques de F . Désignons par $\mathfrak{W}(\zeta^{(n)})$ le produit de toutes les distances mutuelles de ces points

$$(27) \quad \mathfrak{W}(\zeta^{(n)}) = \prod_{0 \leq j < k \leq n} |\zeta_j - \zeta_k|$$

et soit $\eta^{(n)} = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n\}$ un système de points de F en lequel $\mathfrak{W}(\zeta^{(n)})$ atteint son maximum; on a donc quel que soit $\zeta^{(n)}$ dans F

$$(28) \quad \mathfrak{W}(\eta^{(n)}) \geq \mathfrak{W}(\zeta^{(n)}).$$

Je dis que les polynômes de Lagrange $\mathfrak{L}^{(j)}(z, \eta^{(n)})$ satisfont sur F aux inégalités

$$(29) \quad |\mathfrak{L}^{(j)}(z, \eta^{(n)})| \leq 1 \quad z \in F, j = 0, 1, \dots, n.$$

(4) On suppose toujours que F soit la frontière d'un domaine infini contenant le point $z = \infty$ et que le diamètre transfini de F soit positif.

(5) Il est probable que la seule continuité de la fonction $f(z)$ sur F est suffisante pour l'existence de la limite (17) sur F .

En effet, si l'on avait $|\mathcal{L}^{(j)}(z, \eta^{(n)})| > 1$ en un point $z = \eta'_j$ de F , on aurait

$$\prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^n |\eta'_j - \eta_k| > \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^n |\eta_j - \eta_k|$$

et cette inégalité multipliée membre à membre par le produit $\mathcal{V}(\eta_0, \dots, \eta_{j-1}, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n)$ entraînerait l'inégalité

$$\mathcal{V}(\eta_0, \dots, \eta_{j-1}, \eta'_j, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n) > \mathcal{V}(\eta_0, \eta_j, \dots, \eta_n)$$

incompatible avec l'hypothèse (28).

Observons que, d'après le principe de maximum, les inégalités (29) ont lieu dans l'ensemble $\Delta + F$ et que d'après (3)

$$F_n(z, \lambda) \leq \sum_{j=0}^n |\mathcal{L}^{(j)}(z, \eta^{(n)})| e^{n\lambda f(\eta_j)}$$

donc, étant $f(\eta_j) \leq M$ pour $j = 0, 1, \dots, n$, on a d'après (29)

$$F_n(z, \lambda) \leq (n+1) e^{n\lambda M} \quad \text{pour } z \in \Delta + F$$

et par suite

$$f(z, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\log \sqrt[n]{F_n(z, \lambda)}\} \leq \lambda M \quad \text{pour } z \in \Delta + F.$$

D'autre part, il suit de (5) que $f(z, \lambda) \geq \lambda m$ quel que soit z , donc les inégalités (26) sont établies et par suite la famille (17) est normale dans Δ .

Désignons par $\mathcal{M}(\zeta^{(n)}) = \mathcal{M}(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ l'expression

$$(30) \quad \mathcal{M}(\zeta^{(n)}) = \frac{\mathcal{V}(\zeta^{(n)})}{e^{n\lambda [f(\zeta_0) + \dots + f(\zeta_n)]}}$$

et supposons que la fonction frontière $f(z)$ soit continue sur F . Alors la fonction (30) est aussi continue aux points $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ variant sur F et par suite il existe un système de $n+1$ points de F , soit

$$(31) \quad x^{(n)} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

en lequel $\mathcal{M}(\zeta^{(n)})$ atteint son maximum. On a donc, quel que soit $\zeta^{(n)}$ sur F ,

$$(32) \quad \mathcal{M}(x^{(n)}) \geq \mathcal{M}(\zeta^{(n)}).$$

Chaque système (31) remplissant la condition (32) sera dit *système extrémal* du rang n correspondant à l'ensemble F et à la fonction $\lambda f(z)$. Observons que les polynômes

$$(33) \quad \Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)}) = \mathcal{L}^{(j)}(z, x^{(n)}) e^{n\lambda f(x_j)}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

satisfont sur F à l'inégalité

$$(34) \quad |\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)})| \leq e^{n\lambda f(z)}, \quad z \in F, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

car, si l'on avait en un point $z = x'$ de F l'inégalité $|\Phi^{(j)}(x'_j, \lambda, x^{(n)})| > e^{n\lambda f(x'_j)}$, on aurait

$$\frac{1}{e^{n\lambda f(x'_j)}} \cdot \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^n |x'_j - x_k| > \frac{1}{e^{n\lambda f(x_j)}} \cdot \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^n |x_j - x_k|$$

et cette inégalité, multipliée par $\mathfrak{M}(x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$, entraînerait l'inégalité

$$\mathfrak{M}(x_0, \dots, x_{j-1}, x'_j, x_{j+1}, \dots, x_n) > \mathfrak{M}(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

incompatible avec l'hypothèse (32).

Je dis que la somme $F(z, \lambda, x^{(n)})$ des modules des polynomes (33) satisfait, quels que soient z, λ et n , aux inégalités

$$(35) \quad F_n(z, \lambda) \leq F(z, \lambda, x^{(n)}) \leq (n+1) F_n(z, \lambda).$$

En effet, d'après (3) on a $F_n(z, \lambda) \leq F(z, \lambda, x^{(n)})$. Supposons que le système (24) remplisse la condition (25). Étant en vertu de la formule d'interpolation de Lagrange

$$\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)}) = \sum_{k=0}^n \Phi^{(j)}(\xi_k, \lambda, x^{(n)}) \cdot \varrho^{(k)}(z, \xi^{(n)}),$$

on a d'après (25) et (34)

$$|\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)})| \leq \sum_{k=0}^n |\varrho^{(k)}(z, \xi^{(n)})| e^{n\lambda f(\xi_k)} \leq F_n(z, \lambda) + \mu$$

donc, comme μ est arbitrairement petit,

$$F(z, \lambda, x^{(n)}) = \sum_{j=0}^n |\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)})| \leq (n+1) F_n(z, \lambda).$$

Les inégalités (35) sont donc démontrées.

Il résulte immédiatement de (14) et (35) que, quels que soient z et λ , la suite $\{\sqrt[n]{F(z, \lambda, x^{(n)})}\}$ est convergente et qu'on a

$$(36) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt[n]{F(z, \lambda, x^{(n)})}\} = \Phi(z, \lambda) = e^{f(z, \lambda)}.$$

4. CONTINUITÉ DES FONCTIONS LIMITES. — Il est clair que les fonctions de la famille

$$(37) \quad \frac{1}{\lambda} \cdot f(z, \lambda), \quad 0 < \lambda < \infty,$$

sont continues en chaque point du plan non situé sur la frontière F du domaine D. La formule (36) donne le moyen d'étudier la continuité sur F.

THÉORÈME V. — 1° Toute fonction de la famille (37) est semi-continue inférieurement en chaque point z_0 de F;

2° si z_0 est un point d'un continu quelconque γ contenu dans F et si la fonction frontière $f(z)$ est continue en z_0 , toute fonction (37) est semi-continue supérieurement en ce point.

Démonstration. - 1° Soit λ un nombre positif fixe quelconque et $k = 1, 2, \dots$. D'après (12) on a $\Phi_{kn}(z, \lambda) \cong [\Phi_n(z, \lambda)]^k$ donc

$$\sqrt[kn]{\Phi_{kn}(z, \lambda)} \cong \sqrt[n]{\Phi_n(z, \lambda)}.$$

En faisant tendre k vers l'infini, on en déduit l'inégalité $\Phi(z, \lambda) \cong \sqrt[n]{\Phi_n(z, \lambda)}$, où $n = 1, 2, \dots$. D'autre part, on a d'après (11) et (35)

$$\Phi_n(z, \lambda) \cong \frac{1}{n+1} F_n(z, \lambda) \cong \frac{1}{(n+1)^2} F(z, \lambda, x^{(n)})$$

donc

$$\Phi(z, \lambda) \cong c_n \sqrt[n]{F(z, \lambda, x^{(n)})}, \quad \text{où } c_n = \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)^2}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

et par suite

$$\Phi(z, \lambda) \cong c_n \sqrt[n]{F(z_0, \lambda, x^{(n)})} + c_n \left[\sqrt[n]{F(z, \lambda, x^{(n)})} - \sqrt[n]{F(z_0, \lambda, x^{(n)})} \right].$$

Désignons par u_n le premier et par $v_n(z)$ le second terme du second membre de cette inégalité. Puisque $c_n \rightarrow 1$, il suit de (36) que $u_n \rightarrow \Phi(z_0, \lambda)$, donc à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un indice $N = N(\varepsilon)$ tel qu'on ait $u_n > \Phi(z_0, \lambda) - \varepsilon/2$ pour $n \geq N$. Par suite

$$\Phi(z, \lambda) \geq \Phi(z_0, \lambda) - \frac{\varepsilon}{2} + v_n(z).$$

Mais, $v_n(z)$ est une fonction continue du point z s'annulant au point z_0 , donc $v_n(z) > -\varepsilon/2$ dans un voisinage $|z - z_0| < r$, où $r > 0$ dépend de ε , et par suite

$$(38) \quad \Phi(z, \lambda) \geq \Phi(z_0, \lambda) - \varepsilon \quad \text{lorsque } |z - z_0| < r,$$

ce qui prouve que la fonction $f(z, \lambda) = \log \Phi(z, \lambda)$ est semi-continue inférieurement au point z_0 ;

2° d'après (8) on a, quel que soit λ , $f(z_0, \lambda) \leq \lambda \cdot f(z_0)$. Supposons d'abord qu'on ait

$$(39) \quad f(z_0, \lambda) = \lambda \cdot f(z_0)$$

et soit $r = r(\varepsilon)$ un nombre positif tel que

$$(40) \quad f(z) < f(z_0) + \varepsilon \quad \text{lorsque } z \in F \text{ et } |z - z_0| \leq r.$$

D'autre part, soit γ un continu passant par z_0 , situé en même temps sur F et dans le cercle $|z - z_0| \leq r$, et soit

$$\zeta^{(n)} = \{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n\}$$

un système de points différents quelconques de γ .

D'après (34) et (40) on a

$$|\Phi^{(j)}(\zeta_k, \lambda, x^{(n)})| \leq e^{n\lambda f(\zeta_k)} < e^{n\lambda[f(z_0) + \varepsilon]}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

donc, étant identiquement d'après la formule d'interpolation de Lagrange,

$$\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)}) = \sum_{k=0}^n \Phi^{(j)}(\zeta_k, \lambda, x^{(n)}) \cdot \varrho^{(k)}(z, \zeta^{(n)}),$$

on a quel que soit z

$$|\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)})| \leq e^{n\lambda[f(z_0) + \varepsilon]} \cdot \sum_{k=0}^n |\varrho^{(k)}(z, \zeta^{(n)})|$$

pour $j = 0, 1, \dots, n$, et par suite

$$(41) \quad F(z, \lambda, x^{(n)}) \leq e^{n\lambda[f(z_0) + \varepsilon]} \cdot (n+1) \cdot F(z, 0, \zeta^{(n)}).$$

Désignons par $F_n(z, 0; \gamma)$ la borne inférieure de la fonction $F(z, 0, \zeta^{(n)})$ lorsque z étant fixe quelconque le système $\zeta^{(n)}$ varie sur γ , par D_γ le domaine infini complémentaire à γ et par $G(z; \gamma)$ la fonction de Green de ce domaine ayant son pôle à l'infini. D'après (39) et (41) on a

$$\log \sqrt[n]{F(z, \lambda, x^{(n)})} \leq f(z_0, \lambda) + \lambda \cdot \varepsilon + \log \sqrt[n]{n+1} + \log \sqrt[n]{F_n(z, 0; \gamma)},$$

d'où l'on déduit, en tenant compte des formules (36) et (16), l'inégalité

$$(42) \quad f(z, \lambda) \leq f(z_0, \lambda) + \lambda \varepsilon + G(z; \gamma),$$

donc $f(z, \lambda)$ est semi-continu supérieurement au point z_0 , car la fonction de Green $G(z; \gamma)$ est continue en ce point.

Supposons maintenant qu'on ait

$$(43) \quad f(z_0, \lambda) < \lambda \cdot f(z_0)$$

et observons que cette inégalité ne peut pas avoir lieu lorsque z_0 est un des points du système extrémal (31) pour une infinité des valeurs n_1, n_2, \dots de n , car alors on aurait

$$F(z_0, \lambda, x^{(n)}) = e^{n\lambda f(z_0)} \quad \text{pour } n = n_1, n_2, \dots$$

d'où il suivrait l'égalité $f(z_0, \lambda) = \lambda f(z_0)$. Plus généralement, l'inégalité (43) ne peut pas avoir lieu lorsque chaque voisinage du point z_0 contient au moins un point du système extrémal (31) pour une infinité des valeurs de n ⁽⁶⁾.

Par conséquent, il existe un cercle $|z - z_0| < r$ de centre z_0 et un indice N tels que tous les points des systèmes extrémaux

$$(44) \quad x^{(n)} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad \text{où } n \geq N,$$

sont situés sur la partie F' de F non contenue dans le cercle $|z - z_0| < r$. Il en résulte que les systèmes extrémaux (44), qui correspondent à F et à $\lambda f(z)$, sont en même temps des systèmes extrémaux correspondant à la partie F' de F et à $\lambda f(z)$, et ceci implique l'identité

$$(45) \quad f(z, \lambda; F) = f(z, \lambda; F')$$

où $f(z, \lambda; F)$ et $f(z, \lambda; F')$ sont des fonctions limités (7) correspondant à F et à F' respectivement.

Observons maintenant que la fonction $f(z, \lambda; F')$ est harmonique en dehors de F' et par suite continue au point z_0 , car z_0 reste en dehors de F' , donc dans le cas (43) la partie 2° de notre théorème résulte de l'identité (45).

(6) « Ann. Soc. Polon. de Math. », t. 21, pp. 80-89 (1948).

5. APPLICATION AU PROBLÈME DE DIRICHLET. — Supposons, comme dans le numéro 3, que la frontière F du domaine D partage le plan en les domaines D, D_1, D_2, \dots et soit Δ la somme $D_1 + D_2 + \dots$ et Γ la frontière de Δ . Supposons encore que la fonction $f(z)$ soit continue sur F .

Puisque Γ est une somme de continus il suit du théorème V que toutes les fonctions (37), harmoniques dans Δ , sont continues dans $\Delta + \Gamma$. Par suite, si la famille (37) converge sur F vers $f(z)$ lorsque λ tend vers zéro, elle converge aussi dans l'ensemble Δ . La fonction limite

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\lambda} f(z, \lambda) \right] = F(z) \quad \text{pour } z \in \Delta + F$$

est harmonique dans Δ , continue dans $\Delta + F$ et se réduit à $f(z)$ sur F , donc elle constitue la solution du problème de Dirichlet pour tous les domaines D_1, D_2, \dots en même temps et pour la fonction frontière $f(z)$.

Remarque. — La méthode d'approximation exposée dans ce travail est appuyée au fond sur la considération de certains polynômes liés à la fonction $f(z)$ définie sur la frontière d'un domaine quelconque contenant le point à l'infini, ou sur les frontières des domaines bornés simplement connexes.

On peut étendre cette méthode aux fonctions définies sur les frontières des domaines bornés à connexion quelconque, en remplaçant les polynômes par les fonctions rationnelles convenablement choisies. Une telle extension sera donnée ailleurs.

Analisi matematica. — *Costruzione di un elemento di compattezza per una successione di un certo spazio metrico* (*). Nota di ENNIO DE GIORGI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Consideriamo uno spazio metrico S e indichiamo con $I_\rho(C)$ l'intorno e con $H_\rho(C)$ l'involucro di raggio ρ di un insieme C di S . Consideriamo la classe degli insiemi chiusi e limitati di S . Diciamo *distanza* di 2 insiemi chiusi e limitati C_1, C_2 l'estremo inferiore dei numeri ρ per cui risulta

$$C_1 + C_2 \leq I_\rho(C_1) \cdot I_\rho(C_2).$$

Veniamo a costruire così un nuovo spazio metrico Σ . Indichiamo con $J_\rho(C)$ l'intorno di raggio ρ di un insieme chiuso e limitato C considerato come elemento di Σ .

È noto il seguente criterio sufficiente di compattezza per gli insiemi di Σ :

Dato un insieme compatto e chiuso L di S , l'insieme Λ formato dagli insiemi chiusi e limitati contenuti in L è compatto in Σ ().*

(*) Adotto le motivate nuove denominazioni e notazioni introdotte dal prof. M. PICONE nel suo *Lezioni di Analisi funzionale* del corrente anno.

(**) Nella seduta del 15 aprile 1950.

(1) Cfr. per esempio ALEXANDROFF, und HOPF, *Topologie*. [Springer, Berlin (1935), pp. 115-118].

Scopo della presente Nota è di dare l'effettiva costruzione di un elemento di compattezza per una qualsivoglia successione di insiemi contenuti in Λ .

1. Dato un numero intero n grande quanto si vuole possiamo, per la compattezza di L , trovare un numero finito di punti di L

$$(1) \quad P_1^n, P_2^n, \dots, P_{d(n)}^n$$

tali che, preso comunque un punto P in L , esso sia contenuto nell'intorno di raggio $1/2^n$ di uno di essi.

Poniamo

$$(2) \quad B^n = \sum_{i=1}^{d(n)} P_i^n$$

e consideriamo le totalità degli insiemi contenuti in B^n ; essi evidentemente sono tutti chiusi e sono in numero finito $s(n) = 2^{d(n)} - 1$. Indichiamoli con

$$(3) \quad E_1^n, E_2^n, \dots, E_{s(n)}^n.$$

Preso comunque un insieme C contenuto in L indichiamo con

$$(4) \quad P_{i_1}^n \dots P_{i_k}^n$$

i punti di B^n contenuti in $I_{1/2^n}(C)$. Sia E la loro somma; evidentemente

$$(5) \quad E \subset I_{1/2^n}(C).$$

D'altra parte ogni punto di C è contenuto nell'intorno di raggio $1/2^n$ di qualche punto di E , quindi

$$(6) \quad C \subset I_{1/2^n}(E).$$

Dalle (6), (5) segue

$$(7) \quad C \subset J_{1/2^n}(E).$$

In conclusione preso comunque un insieme C contenuto in L si può trovare un intero i compreso fra 1 e $s(n)$ tale che C , considerato come elemento di Σ , sia contenuto in $J_{1/2^n}(E_i^n)$.

2. Sia ora

$$(1) \quad \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \dots \mathfrak{D}_n \dots$$

una successione di insiemi di Σ contenuti in Λ e non vuoti. Da quanto si è visto risulta che dato un n intero qualunque esiste qualche l compreso fra 1 e $s(n)$ tale che

$$(2) \quad \mathfrak{D}_v \cdot J_{1/2^n}(E_l^n)$$

risulti non vuoto per infiniti valori di v . Sia $k(n)$ il più piccolo di questi l . Analogamente si trova $k(n+1)$ che è il più piccolo degli l per cui

$$(3) \quad \mathfrak{D}_v \cdot J_{1/2^{n+1}}(E_l^{n+1}) \cdot J_{1/2^n}(E_{k(n)}^n),$$

risulti non vuoto per infiniti valori di ν . Proseguendo si costituisce la successione

$$(4) \quad E_{k(n)}^n, E_{k(n+1)}^{n+1}, \dots, E_{k(s)}^s \dots$$

Per la (3) e per la relazione triangolare risulta

$$(5) \quad E_{k(n+1)}^{n+1} < J_{3/2^{n+1}}(E_{k(n)}^n).$$

Consideriamo ora l'insieme

$$(6) \quad C = \prod_{i=n}^{\infty} H_{3/2^i}(E_{k(i)}^i)$$

e mostriamo che $E_{k(i)}^i$ è contenuto in $J_{4/2^i}(C)$.

Intanto certamente:

$$(7) \quad C < I_{4/2^i}(E_{k(i)}^i).$$

D'altra parte preso un punto qualunque P_i di $E_{k(i)}^i$ per la (5) possiamo prendere un punto P_{i+1} di $E_{k(i+1)}^{i+1}$ avente da P_i distanza minore di $3/2^{i+1}$ poi un punto P_{i+2} di $E_{k(i+2)}^{i+2}$ avente da P_{i+1} distanza minore di $3/2^{i+2}$ e così di seguito. Consideriamo la successione

$$(8) \quad L \cdot H_{3/2^i}(P_i) \supseteq L \cdot H_{3/2^{i+1}}(P_{i+1}) \supseteq \dots \supseteq L \cdot H_{3/2^s}(P_s) \supseteq \dots$$

Il prodotto di questi insiemi per la compattezza e chiusura di L è certamente non vuoto. Sia Q un punto di tale prodotto. Esso ha evidentemente da P_i distanza minore di $4/2^i$. Ma essendo

$$(9) \quad H_{3/2^i}(P_s) \subseteq H_{3/2^i}E_{k(i)}^i$$

Q è contenuto in C e quindi P_i è contenuto in $I_{4/2^i}(C)$; ma P_i è un punto qualunque di $E_{k(i)}^i$ quindi

$$(10) \quad E_{k(i)}^i < I_{4/2^i}(C)$$

dalle (10) (7) segue

$$(11) \quad E_{k(i)}^i < J_{4/2^i}(C).$$

Dimostriamo che C è elemento di compattezza per la successione (1). Preso un σ positivo piccolo a piacere possiamo prendere un intero t tale che

$$(12) \quad \sigma > \frac{5}{2^t}.$$

Esistono infiniti valori di ν per cui

$$(13) \quad \vartheta_\nu \cdot J_{1/2^t}(E_{k(t)}^t)$$

non è vuoto. Allora per le (11) (12) (13) e per la relazione triangolare esistono infiniti valori di ν per cui non è vuoto

$$\vartheta_\nu \cdot J_\sigma.$$

Analisi. — *Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata.* Nota I di FEDERICO CAFIERO, presentata (*) dal Corrisp. R. CACCIOPPOLI.

In un lavoro ⁽¹⁾ alquanto recente, J. W. Calkin ha introdotto, per le funzioni di n variabili reali, i concetti di continuità assoluta essenziale e lineare ⁽²⁾ rispetto ad una variabile ed ha stabilito, per le funzioni essenzialmente e linearmente assolutamente continue, proprietà utili in questioni di Calcolo delle variazioni.

Riprendendo le considerazioni del citato Autore, C. B. Morrey Jr. ⁽³⁾ ha dimostrato fra l'altro, per le funzioni essenzialmente assolutamente continue, un criterio di compattezza rispetto alla convergenza in media di ordine $1 + \alpha$ ($\alpha \geq 0$).

In questa Nota I do un analogo criterio di compattezza, rispetto alla convergenza in media del primo ordine, per successioni di funzioni appartenenti alla classe più ampia delle funzioni quasi continue e generalmente a variazione limitata ⁽⁴⁾.

Precisamente stabilisco il seguente:

TEOREMA. — Sia $\{f_n(x, y)\}$ una successione di funzioni quasi continue, generalmente a variazione limitata nel quadrato $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ed esista un numero positivo k tale che per ogni n si abbia:

$$(1) \quad \int_0^1 V_y^{(n)}(x) dx + \int_0^1 V_x^{(n)}(y) dy < k$$

$$(2) \quad \iint_D |f_n(x, y)| dx dy < k.$$

Allora dalla successione data se ne può estrarre una convergente in media del primo ordine in D verso una funzione generalmente a variazione limitata.

(*) Nella seduta del 15 aprile 1950.

(1) J. W. CALKIN, *Functions of several variables and absolute continuity*. I. «Mathematical Journal», vol. 6, n. 1, pp. 170-186 (1940). Cfr. anche G. C. EVANS, *Fundamental points of potential theory*. «Rice Institute Pamphlets», vol. 7, n. 4, pp. 252-329 (1920).

(2) Una funzione delle variabili reali $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$, definita in un campo aperto G dello spazio ad n dimensioni, dicesi *linearmente assolutamente continua* in G rispetto ad x_k , se in ogni dominio rettangolare $R: a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_k \leq x_k \leq b_k, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n$ di G risulta assolutamente continua rispetto ad x_k per quasi tutti i punti del dominio $[a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_k - 1 \leq x_k - 1 \leq b_k - 1, a_k + 1 \leq x_k + 1 \leq b_k + 1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n]$ e se è in R sommabile insieme alla sua derivata parziale rispetto ad x_k .

Per la definizione di funzioni *essenzialmente assolutamente continue* rimandiamo al lavoro citato di J. W. CALKIN, limitandoci qui a dire che queste, come il citato Autore ha dimostrato, sono equivalenti alle funzioni linearmente assolutamente continue.

(3) G. B. MORREY, *Functions of several variables and absolute continuity*. II. «Mathematical Journal», vol. 6, n. 1, pp. 187-215 (1940).

(4) L. CESARI, *Sulle funzioni a variazione limitata*. «Annali della Scuola Normale di Pisa», ser. II, vol. V, fasc. III-IV, pp. 299-313 (1936). L. TONELLI, *Sulle funzioni di due variabili generalmente a variazione limitata*. Ibidem, pp. 315-320.

Si dice che la funzione $f(x, y)$, definita in $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, è *generalmente a variazione limitata* in D se esiste un insieme I , di punti di D , di misura superficiale nulla, tale che,

Nella Nota II dimostrerò l'invarianza della condizione (1) rispetto ad una qualunque rotazione degli assi coordinati, e, come meglio sarà specificato nella relativa prefazione, riferendomi ad una recente Nota⁽⁵⁾ di G. Stampacchia, darò un criterio di compattezza, rispetto alla convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare, per successioni di funzioni generalmente a variazione limitata ed assolutamente continue rispetto ad una variabile.

Ringrazio vivamente il prof. Caccioppoli per l'indicazione di questa ricerca e per i consigli con i quali mi ha assistito.

1. Per la dimostrazione del teorema enunciato in prefazione basta far vedere che, nelle ipotesi ivi poste, le funzioni della successione $\{f_n(x, y)\}$ sono uniformemente sommabili in D e che dalla stessa successione se ne può estrarre una quasi ovunque convergente in D verso una funzione generalmente a variazione limitata.

Dimostriamo dapprima l'uniforme sommabilità in D delle funzioni della data successione.

A tale scopo indichiamo con H_n ($n = 1, 2, \dots$) un insieme di punti di D , di misura superficiale nulla, tale che, trascurando i valori che la funzione $f_n(x, y)$ ($n = 1, 2, \dots$) assume in essi, le funzioni $V_y^{(n)}(x)$ e $V_x^{(n)}(y)$ ($n = 1, 2, \dots$) risultino quasi ovunque finite, quasi continue ed integrabili.

Ciò posto osserviamo che risulta:

$$(3) \quad \int_0^1 |f_n(x, y)| dy < 2k, \quad \int_0^1 |f_n(x, y)| dx < 2k$$

rispettivamente per quasi tutti gli x e quasi tutti gli y di $(0, 1)$.

Infatti dalla (2) segue che per ogni n esiste un insieme di punti $I_x^{(n)}$, di misura positiva, tale che per ogni x di esso risulti:

$$(4) \quad \int_0^1 |f_n(x, y)| dy < k.$$

Detto allora \bar{x}_n un punto di $I_x^{(n)}$ tale che la funzione della sola y , $f_n(\bar{x}_n, y)$, sia quasi continua ed integrabile e tale che l'intersezione $[H_n, \bar{x}_n]$ di H_n con la retta $x = \bar{x}_n$ sia di misura nulla, risulta ovviamente:

$$|f_n(x, y)| \leq |f_n(\bar{x}_n, y)| + V_x^{(n)}(y) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

indicate con $V_x(y)$ e $V_y(x)$ le variazioni totali nell'intervallo $(0, 1)$, della $f(x, y)$, considerata rispettivamente come funzione della sola x e della sola y - variazione calcolata senza tener conto dei valori assunti dalla $f(x, y)$ nei punti di I - le $V_x(y)$ e $V_y(x)$ risultino, come funzioni rispettivamente di y e di x nell'intervallo $(0, 1)$, quasi ovunque finite, quasi continue ed integrabili (nel senso di Lebesgue).

(5) G. STAMPACCHIA, *Criteri di compattezza per gli insiemi di funzioni continue rispetto alle variabili separatamente*. «Rendiconti del Seminario Matematico di Padova», anno XIX, pp. 201-213 (1950). Cfr. anche: G. STAMPACCHIA, *Sulle successioni di funzioni continue rispetto ad una variabile e misurabili rispetto ad un'altra*. «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. 8, vol. VI, fasc. 2, pp. 298-301 (1949).

per tutti i punti di D al di fuori di H_n e per y non appartenente all'intersezione $[H_n, \bar{x}_n]$.

Dall'ultima limitazione scritta, tenendo conto della (1) e della (4), si deduce immediatamente la prima delle (3).

Analogamente si dimostra la seconda delle (3).

Supponiamo ora, per assurdo, che le funzioni della successione $\{f_n(x, y)\}$ non siano uniformemente sommabili in D . Esiste allora un $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni numero positivo δ , si possono determinare in corrispondenza una funzione $f_v(x, y)$ della nostra successione ed un insieme misurabile I di D in modo tale che si abbia:

$$(5) \quad \iint_I |f_v(x, y)| dx dy > \varepsilon, \text{ mis } I < \delta.$$

Indichiamo con i_x la proiezione di I sull'asse delle x e con $s(x)$ l'insieme dei punti di I di ascissa x .

Per la prima delle (3) si ha ovviamente:

$$(6) \quad \int_{s(x)} |f_v(x, y)| dy < 2k$$

quasi ovunque in i_x .

Detto e_x l'insieme dei punti di i_x in cui:

$$(7) \quad \int_{s(x)} |f_v(x, y)| dy > \frac{\varepsilon}{2}$$

tenendo conto della (5) e della (6), si ha:

$$\frac{\varepsilon}{2} < \int_{e_x} dx \int_{s(x)} |f_v(x, y)| dy < 2k \text{ mis } e_x$$

e quindi anche:

$$(8) \quad \text{mis } e_x > \frac{\varepsilon}{4k}.$$

Sia h_x l'insieme dei punti di e_x in cui:

$$(9) \quad \text{mis } s(x) \leq \frac{8k}{\varepsilon} \delta.$$

Poichè nell'insieme complementare Ch_x di h_x su e_x risulta:

$$\text{mis } s(x) > \frac{8k}{\varepsilon} \delta,$$

ricordando che $\text{mis } I < \delta$, si ha:

$$\frac{8k}{\varepsilon} \delta \text{ mis } Ch_x < \delta$$

e quindi:

$$\text{mis } Ch_x < \frac{\varepsilon}{8k}.$$

Per la (8), da quest'ultima limitazione si trae:

$$(10) \quad \text{mis } h_x > \frac{\varepsilon}{8k}.$$

In definitiva, per la (7) e (9) possiamo affermare che per ogni punto di h_x esiste in $s(x)$ un insieme di valori di y , diciamolo $\bar{s}(x)$, di misura positiva, nei quali è verificata la limitazione:

$$(11) \quad |f_v(x, y)| > \frac{\varepsilon^2}{16k\delta}.$$

Ciò posto, sia \bar{y} un punto di $(0, 1)$ tale che per la funzione della sola x , $f_v(x, \bar{y})$, valga la seconda delle (3) e tale che la intersezione $[H_v, \bar{y}]$ di H_v con la retta $y = \bar{y}$ sia di misura nulla. Si ha allora ovviamente:

$$V_y^{(v)}(x) \equiv |f_v(x, y)| - |f_v(x, \bar{y})|$$

per tutti i punti di D fuori di H_v e per x non appartenente all'intersezione $[H_v, \bar{y}]$.

Dall'ultima limitazione, tenendo conto della (11), si trae:

$$V_y^{(v)}(x) \equiv \frac{\varepsilon^2}{16k\delta} - |f_v(x, \bar{y})|$$

per tutti gli x di h_x non appartenenti all'intersezione $[H_v, \bar{y}]$. Ma allora per la (10) e la seconda delle (3), risulta:

$$\int_{h_x} V_y^{(v)}(x) dx \equiv \frac{\varepsilon^2}{16k\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{8k} - 2k.$$

Limitazione, quest'ultima, in contraddizione con l'ipotesi (1), potendosi δ prendere piccolo quanto si vuole.

2. Dimostriamo ora che dalla successione $\{f_n(x, y)\}$ se ne può estrarre una convergente quasi ovunque in D .

A tale scopo basta far vedere che dalla detta successione se ne può estrarre una convergente in misura. Per un noto teorema⁽⁶⁾ di Fréchet ciò è assicurato

(6) M. FRÉCHET, *Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables*. «Fundamenta Mathematicae», IX, pp. 25-32 (1927). Cfr. anche B. PETTINEO, *Sulla convergenza puntuale delle successioni ecc.* «Rendiconti di Matematica dell'Università di Roma», ser. 5^a, vol. VI, pp. 478-503 (1947).

Le funzioni di una successione $\{f_n(x, y)\}$, misurabili in un insieme E , si dicono *egualmente quasi continue* quando, per ogni coppia di numeri positivi ε ed ω , è possibile decomporre E in un numero finito di insiemi parziali E_i in modo tale che l'oscillazione di ogni funzione della successione risulti minore di ω in ogni insieme parziale E_i , quando si prescinda dai valori assunti dalle funzioni della successione in un insieme e_n , eventualmente variabile con la funzione della successione, di misura superficiale minore di ε .

Le funzioni di una successione $\{f_n(x, y)\}$, misurabili in un insieme E , diconsi *egualmente quasi limitate* quando, per ogni numero positivo ε , è possibile determinare un numero positivo H in modo tale che si abbia $|f_n(x, y)| \leq H$, ($n = 1, 2, \dots$), in tutti i punti di E eccettuati quelli di un insieme h_n , eventualmente variabile con la funzione della successione, di misura superficiale minore di ε .

qualora le funzioni della nostra successione siano in D egualmente quasi continue ed egualmente quasi limitate.

Che le funzioni della successione siano egualmente quasi limitate è ovviamente assicurato dalla (2); passiamo quindi a dimostrare che esse sono anche egualmente quasi continue. A ciò basta far vedere che per ogni fissata coppia di numeri positivi ε ed ω è possibile decomporre il quadrato D in un numero finito di quadrati parziali, in modo tale che l'oscillazione di ogni funzione della successione risulti minore di ω in ogni quadrato della suddivisione, quando si prescinda dai punti di un insieme del quadrato D , eventualmente variabile con la funzione della successione, di misura superficiale minore di ε .

Dividiamo il quadrato D in m^2 quadrati parziali, ottenuti dividendo il lato di D sull'asse delle x e quello sull'asse delle y in m parti uguali rispettivamente mediante i punti:

$$0 \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_m \equiv 1$$

$$0 \equiv y_0 < y_1 < \dots < y_j < \dots < y_m \equiv 1$$

ed indichiamo con d_{ij} il quadrato:

$$[x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j].$$

Supponiamo, per assurdo, che la suddetta proprietà non sia verificata per le funzioni della nostra successione. Esisteranno allora due numeri positivi ε ed ω tali che, per ogni intero positivo m , esiste una funzione della successione, $f_v(x, y)$, che in qualche quadrato d_{ij} della suddivisione operata ha un'oscillazione maggiore od eguale ad ω , quando si prescinda da insiemi di punti di D di misura superficiale minore di ε .

Sia H_v il solito insieme di punti del quadrato D , di misura nulla, tale che, trascurando i valori che la funzione $f_v(x, y)$ assume in esso, le funzioni $V_y^{(v)}(x)$ e $V_x^{(v)}(y)$ risultano quasi ovunque finite, quasi continue ed integrabili.

Indichiamo con $E_{ij}^{(x)}$ l'insieme dei punti di (x_{i-1}, x_i) nei quali la funzione $f_v(x, y)$, prescindendo dai valori assunti in H_v , ha, per y variabile in (y_{j-1}, y_j) , un'oscillazione non minore di $\omega/2$ e diciamo E_{ij} l'insieme dei punti di d_{ij} non appartenenti ad H_v ed aventi l'ascissa in $E_{ij}^{(x)}$.

Analogamente indichiamo con $I_{ij}^{(y)}$ l'insieme dei punti dell'intervallo (y_{j-1}, y_j) nei quali la funzione $f_v(x, y)$, prescindendo dai valori assunti in H_v , ha, per x variabile in (x_{i-1}, x_i) , un'oscillazione non minore di $\omega/2$ e diciamo I_{ij} l'insieme dei punti di d_{ij} non appartenenti ad H_v ed aventi l'ordinata in $I_{ij}^{(y)}$.

Poniamo infine:

$$E_v = \sum_{ij} (E_{ij} + I_{ij}).$$

Poichè l'oscillazione di $f_v(x, y)$, quando si prescinda dai punti di $E_v + H_v$, è in ogni quadrato della suddivisione minore di ω , dovrà essere:

$$(12) \quad \text{mis } E_v > \varepsilon.$$

Si ha inoltre ovviamente:

$$\text{mis } E_v \leq \frac{1}{m} \sum_{ij}^m (\text{mis } E_{ij}^{(x)} + \text{mis } I_{ij}^{(y)})$$

e quindi, per la (12), anche:

$$(13) \quad \sum_{ij}^m (\text{mis } E_{ij}^{(x)} + \text{mis } I_{ij}^{(y)}) > m\varepsilon.$$

Detta $V_{y_j}^{(v)}(x) [V_{x_i}^{(v)}(y)]$ la variazione di $f_v(x, y)$, considerata come funzione della sola $y [x]$, nell'intervallo $(y_{j-1}, y_j) [(x_{i-1}, x_i)]$, variazione calcolata prescindendo dai valori assunti nell'insieme H_v , si ha:

$$\int_0^1 V_y^{(v)}(x) dx = \sum_{ij}^m \int_{x_{i-1}}^{x_j} V_{y_j}^{(v)}(x) dx \cong \sum_{ij}^m \int_{E_{ij}^{(x)}} V_{y_j}^{(v)}(x) dx \cong \frac{\omega}{2} \sum_{ij}^m \text{mis } E_{ij}^{(x)}$$

ed analogamente:

$$\int_0^1 V_x^{(v)}(y) dy = \sum_{ij}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} V_{x_i}^{(v)}(y) dy \cong \sum_{ij}^m \int_{I_{ij}^{(y)}} V_{x_i}^{(v)}(y) dy \cong \frac{\omega}{2} \sum_{ij}^m \text{mis } I_{ij}^{(y)}.$$

Dalle due ultime limitazioni, tenendo conto della (13), si deduce:

$$\int_0^1 V_y(x) dx + \int_0^1 V_x(y) dy > m \frac{\omega\varepsilon}{2},$$

limitazione, quest'ultima, che contraddice l'ipotesi (1), potendosi m pigliare grande a piacere.

3. Abbiamo finora dimostrato che dalla successione $\{f_n(x, y)\}$ se ne può estrarre una convergente in media di ordine uno. Per completare la dimostrazione del nostro teorema bisogna ancora far vedere che la funzione limite $f(x, y)$ di una tale successione estratta, che per semplicità indicheremo ancora con $\{f_n(x, y)\}$, è anch'essa a variazione generalmente limitata.

A tale scopo, detto E l'insieme dei punti di D , di misura superficiale nulla, nei punti del quale la successione non converge, indichiamo con E_n ($n = 1, 2, \dots$) un insieme di punti di D , di misura nulla, contenente E e tale che trascurando i valori che la funzione $f_n(x, y)$ assume in esso, le funzioni $V_y^{(n)}(x)$ e $V_x^{(n)}(y)$ risultino quasi ovunque finite, quasi continue ed integrabili in $(0, 1)$.

Ovviamente si ha:

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_x^{(n)}(y) \cong V_x(y) \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_y^{(n)}(x) \cong V_y(x),$$

dove le variazioni $V_y^{(n)}(\bar{x})$ e $V_x^{(n)}(\bar{y})$ e le variazioni $V_y(\bar{x})$ e $V_x(\bar{y})$ della funzione limite $f(x, y)$ sono calcolate, per ogni \bar{x} ed \bar{y} di $(0, 1)$, prescindendo dai valori

assunti da $f_n(x, y)$ e da $f(x, y)$ nei punti delle intersezioni delle rette $x = \bar{x}$ ed $y = \bar{y}$ con l'insieme di misura nulla $\sum_{i=1}^{\infty} E_n$.

Inoltre, essendo per un noto lemma di Fatou:

$$\int_0^1 \lim'_{n \rightarrow \infty} V_x^{(n)}(y) dy \leq \lim'_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 V_x^{(n)}(y) dy$$

$$\int_0^1 \lim'_{n \rightarrow \infty} V_y^{(n)}(x) dx \leq \lim'_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 V_y^{(n)}(x) dx,$$

le funzioni quasi continue:

$$\lim' V_y^{(n)}(x), \quad \lim' V_x^{(n)}(y)$$

risultano per la (1) sommabili in $(0, 1)$. Ma allora, per la (14), le funzioni $V_y(x)$ e $V_x(y)$, calcolate prescindendo dai valori che la funzione $f(x, y)$ assume nell'insieme $\sum_{i=1}^{\infty} E_n$, sono non maggiori di funzioni sommabili e ciò basta, in virtù di un noto teorema⁽⁷⁾ di Cesari, per dimostrare quanto asserito.

Geometria. — *Sulla isometria di calotte superficiali nello spazio euclideo.* Nota di VITTORIO DALLA VOLTA, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. In due recenti Note⁽¹⁾ M. Mineo ha messo in dubbio la validità di alcuni risultati da me ottenuti⁽²⁾ sull'isometria di calotte; e ritiene di provare ciò con sviluppi del tutto inadeguati allo scopo, che non traducono affatto il problema da me preso in esame.

Questo è stato nettamente posto (e risolto nei primi casi) da E. Bompiani in una Nota⁽³⁾, cui hanno fatto seguito i miei lavori. Da essa tolgo i preliminari che seguono, necessari a porre in evidenza il divario fra le trattazioni del Bompiani e mia, e quella del Mineo.

(7) Loc. cit. in nota (4).

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) M. MINEO, *Paragone metrico di intorni superficiali*. Questi «Rendiconti», vol. VII, 2° sem., 1949 (Tale fascicolo, benchè porti la data delle ferie estive 1949, è stato distribuito solo nel febbraio 1950); M. MINEO, *Sul confronto dal punto di vista metrico differenziale di due intorni superficiali*. «Atti Acc. Sc. Lett. e Arti di Palermo», ser. IV, vol. VIII, 1949. Questi due lavori saranno citati nel seguito rispettivamente con [1] e [2].

(2) V. DALLA VOLTA, *Sull'isometria di calotte superficiali*. Questi «Rendiconti», vol. V, 2° sem., 1948, fasc. 6. A tale Nota, di carattere preventivo, ha fatto seguito un lavoro più ampio, dallo stesso titolo, pubblicato nei «Rendiconti di Matem. e delle sue Appl.», ser. V, vol. 8, fasc. 1-2 pp. 212-227 (1949).

(3) E. BOMPIANI, *Isometria di calotte superficiali*. «Rend. Matem. e delle sue Appl.», fasc. I-II, pp. 275-294 (1948).

2. Prese le mosse da un'osservazione del Cartan⁽⁴⁾, secondo la quale ogni proiezione parallela di una superficie di S_3 euclideo sopra il piano ad essa tangente in un punto determina fra superficie e piano tangente una corrispondenza che è isometrica nel punto e nei punti situati nell'intorno del primo ordine di esso, il Bompiani si è posto il seguente problema:

Date due calotte superficiali di ordine $\geq k$ assegnato⁽⁵⁾, è possibile porre fra di esse una corrispondenza puntuale regolare in cui siano omologhi i centri (che si suppongono, ben inteso, regolari, e per due superficie contenenti le calotte, e per la particolare rappresentazione analitica di queste) e che sia un'isometria di ordine k ?

Come si vede, l'incognita del problema è la corrispondenza: questa non è data a priori, ma, se possibile, va trovata, e si devono assegnare le condizioni necessarie e sufficienti affinché una tale corrispondenza esista.

Contrariamente a quanto potrebbe attendersi (ma come può far sospettare l'osservazione del Cartan relativa al caso in cui una delle calotte sia sul piano tangente) due qualsiasi calotte del 2° ordine sono sempre isometriche (del 2° ordine).

(4) Anche il Mineo si riferisce a questo risultato del Cartan che è citato fin dall'inizio della sua Nota dal Bompiani. Il fatto che questa Nota non sia affatto citata dal Mineo, il quale pare anzi attribuirmi un risultato (l'eguaglianza della curvatura gaussiana nei centri di due calotte quale condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un'isometria del 3° ordine fra esse) che, come io facevo osservare a p. 382 della mia Nota Lincea, si trova già nel lavoro del Bompiani, fa supporre che il Mineo non abbia avuto la possibilità di consultarla; il che può spiegare la sua errata interpretazione del problema in esame; invero nel mio lavoro, che presupponeva quello del Bompiani, si rimandava a questo per molti particolari, e riguardanti la posizione del problema, e i risultati già acquisiti. Devo però precisare che, già a p. 382 del mio lavoro Linceo, come pure in seguito (p. 384) sono messe in evidenza le formule della corrispondenza che si sta studiando (v. appresso). Il risultato del CARTAN si trova nelle sue *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, a pp. 111-112 della prima edizione, e a p. 107 della seconda. In tale seconda edizione, uscita dopo la fine della guerra, il Cartan si occupa anch'egli del problema dell'applicabilità in piccolo di due superficie (e più in generale di due spazi di Riemann); la sua trattazione non presenta però alcun punto di contatto con quella del Bompiani (che ricerca la costruzione dell'isometria nell'ambiente euclideo in cui sono immerse le due calotte).

(5) La nozione di calotta (o elemento differenziale di qualsiasi ordine e dimensione, in un ambiente qualsiasi) è stata posta e più volte usata dal Bompiani stesso. La calotta è un ente geometrico nel senso ben preciso dato a questa espressione da O. VEULEN & J. H. C. WHITEHEAD (*The Foundations of Differential Geometry*, Cambridge University Press, London, 1932): cioè, date le sue componenti in un qualsiasi sistema di coordinate, e le formule di trasformazione di queste (invertibili nel punto centro della calotta, e di classe almeno uguale all'ordine della calotta) è possibile calcolarne le componenti in qualsiasi altro sistema.

Che la nozione di calotta sia opportuna è posto in evidenza (oltre che dai risultati già ottenuti per essi) dal fatto che le calotte aventi un determinato centro formano un ideale nel senso dell'Algebra Moderna, ciò che non si saprebbe dire degli intorni di un punto.

Fra i lavori del Bompiani relativi all'argomento è opportuno citare: *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero*. «Rendiconti del Sem. Mat. della R. Università di Roma», ser. IV, vol. II, fasc. 2 (1938). *Invarianti proiettivi e topologici di calotte di superficie e di ipersuperficie tangenti in un punto*, Ibid. ser. V, vol. II, fasc. III-IV, sett.-dic. 1941; *Geometria proiettiva di elementi differenziali*. «Ann. Mat. Pura e Appl.», ser. IV, to. XXII, 1943; *Elementi differenziali regolari e non regolari nel piano e loro applicazioni alle curve algebriche piane*. «Rend. Mat. e sue Appl.», 1946. Un'esposizione di insieme dell'argomento, alla quale rinvio anche per ulteriori indicazioni bibliografiche, si trova poi in un Corso Litografato: *Geometria degli Elementi Differenziali*, Roma 1941.

È questo un risultato del Bompiani (citato dal Mineo, prendendolo dalla mia Nota), il quale, però, non si limita a ciò, ma aggiunge la costruzione delle infinite isometrie possibili per proiezione da un punto qualsiasi della normale comune, quando le calotte si siano poste a contatto nei loro centri. E se queste si pongono in modo che coincidano le loro tangenti di curvatura, si può determinare sulla comune normale un centro di proiezione, dipendente dalle curvature media e gaussiana delle due calotte, per cui la corrispondenza isometrica gode di particolari ulteriori proprietà.

Per due calotte del 3° ordine, poi, il Bompiani ha dimostrato che *condizione necessaria e sufficiente* affinché si possa porre fra di esse una corrispondenza isometrica (del 3° ordine) è che siano uguali le curvature gaussiane delle loro calotte del 2° ordine (vale a dire che coincidano i valori delle curvature nei centri delle calotte); e se esiste una di tali isometrie, ne esistono ∞^1 ; e anche di esse è data la costruzione geometrica ⁽⁶⁾.

3. Riprenderò in seguito l'esame dei risultati relativi a calotte di ordine > 3 ; da quanto precede, però, è già possibile valutare l'inconsistenza delle critiche del Mineo ai risultati miei e, implicitamente, a quelli del Bompiani.

Il lettore non mancherà di stupirsi del procedimento impiegato dal Mineo nei primi nn. di [1] e [2] per risolvere il problema, che pure è da lui esattamente enunciato: se cioè sia possibile stabilire fra due calotte una corrispondenza puntuale regolare, tale che gli sviluppi dei coefficienti delle due prime forme fondamentali delle due calotte, aventi per origini i centri di queste, coincidano fino ai termini di ordine $k-1$ inclusi; s'intende che occorre aver preventivamente espresso le coordinate (curvilinee) di un punto della seconda calotta mediante le coordinate del punto omologo della prima. ✱

Il Mineo comincia anzitutto col supporre le due calotte già poste a contatto nei loro centri, e riferite a uno stesso sistema di coordinate cartesiane ortogonali, aventi come origine il centro comune delle due calotte, e come piano $z=0$ il piano tangente comune. Ciò era già stato fatto dal Bompiani, il quale, per altro, fa osservare come questa operazione, che si può realizzare, per esempio con un movimento, e che non altera evidentemente l'isometria eventualmente esistente fra le due calotte, presenti ancora un'arbitrarietà; in quanto si può ancora ruotare una delle due calotte intorno alla normale comune in ∞^1 modi; ed è dalla possibilità di queste rotazioni che si deduce che in ogni caso esistono ∞^1 isometrie del 2° ordine, e che ne esistono ∞^1 del 3° ordine, qualora ve ne sia una; la scelta di una particolare isometria equivale poi a fissare — mediante la scelta di una coppia di tangenti ortogonali (assi x, y del riferimento) su ciascuna calotta — fra i due fasci delle tangenti alle calotte una delle ∞^1 possibili uguaglianze.

(6) In un corso di Geometria Differenziale, tenuto all'Università di Roma nell'Anno Accademico 1944-45, il Bompiani ha dimostrato che le rette congiungenti punti corrispondenti in un'isometria fra due calotte isometriche del 3° ordine, poste già a contatto, si distribuiscono in ∞^1 paraboloidi per la normale comune nei loro centri.

Fatto questo, il Mineo scrive gli sviluppi delle due calotte nella forma (7)

$$(3.1) \quad \begin{cases} z = 1/2 \varphi_2 + 1/3! \varphi_3 + \dots \\ \bar{z} = 1/2 \bar{\varphi}_2 + 1/3! \bar{\varphi}_3 + \dots \end{cases}$$

con le $\varphi_i, \bar{\varphi}_i$, forme di grado i nelle stesse variabili x, y ; e afferma di poter prendere come corrispondenti punti aventi le stesse x, y . Ma con questa affermazione, arbitraria ed erronea (8), l'Autore ha già fissata fra le due calotte una corrispondenza, e molto particolare (quella precisamente che si attua proiettando l'una calotta sull'altra parallelamente alla normale comune), negandosi automaticamente la possibilità di indagare una qualsiasi corrispondenza e di vedere quando essa sia un'isometria; cioè la possibilità stessa di studiare il problema in esame, poichè la corrispondenza, che è l'incognita del problema, non ha più il diritto di entrare nelle sue formule.

Chè, se invece avesse posto $\bar{\varphi}_i = \bar{\varphi}_i(\bar{x}, \bar{y})$ e si fosse chiesto di determinare le funzioni incognite

$$(3.2) \quad \bar{x} = \bar{x}(x, y) \quad ; \quad \bar{y} = \bar{y}(x, y),$$

cosicchè la corrispondenza da esse rappresentata - e nella quale punti omologhi si hanno per gli stessi valori di x, y (9) - sia un'isometria, avrebbe ripercorso esattamente la via del Bompiani.

Nel n. 1 della sua Nota [1], il Mineo, con sviluppi molto semplici, trova che condizione necessaria e sufficiente per l'isometria di ordine k è che sia $\varphi_i = \pm \bar{\varphi}_i$ ($i = 1, \dots, k-1$) (prendendo insieme tutti i segni superiori o quelli inferiori), concludendone (10) che « questo risultato non coincide con quello del Dalla Volta, secondo il quale condizione necessaria e sufficiente perchè si abbia un'isometria dell'ordine k , sarebbe l'eguaglianza nei centri dei due intorni, della curvatura gaussiana e di tutte le sue derivate, rispetto ad x e ad y , sino all'ordine $k-3$ incluso; queste condizioni, come è manifesto... sono semplicemente necessarie, ma non sufficienti ».

Ed è ben naturale che sia così, dato che, come spero di aver messo in evidenza, il procedimento del Mineo è ben lungi dal rispondere a una soddisfacente trattazione del problema; e anzi, il risultato stesso del Mineo è ovviamente falso per corrispondenze che non siano quelle da lui adottate (ma in tal caso è pressochè banale), giacchè altrimenti due superficie applicabili sarebbero di necessità direttamente o inversamente uguali (11).

(7) Nelle formule del Mineo, in realtà il coefficiente $1/i!$ è conglobato nella relativa φ_i .

(8) Ad evitare l'equivoco, in cui pare caduto il Mineo, è bene ricordare, col Bompiani, come il concetto di *calotta* sia completamente indipendente da ogni rappresentazione analitica di questa, come pure da quello di *corrispondenza*. Per questo riguardo, cfr. le già citate Litografie del Bompiani (P. I, Cap. 1, § 1, nn. 1-2, pp. 1-3; P. II, Cap. II, § 1, n. 1, p. 194).

(9) E in ciò consiste il preventivo riferimento delle calotte l'una all'altra.

(10) Ved. il lavoro [2] del MINEO; dal quale prendo testualmente le frasi seguenti.

(11) È ovvio che, se due superficie sono applicabili, due loro calotte di uno stesso ordine, aventi centri in punti corrispondenti, lo sono pure.

4. Passo ora ad esporre i risultati — che mi riguardano più da vicino — relativi a calotte del 4° ordine, e che mi saranno del resto utili per ulteriori osservazioni ai risultati che il Mineo ritiene di aver ottenuto.

Per le isometrie del 4° ordine, il Bompiani aveva ottenuto, alla fine del lavoro più volte citato, un primo risultato: si è già ricordato che, supposte uguali le curvatures gaussiane nei centri delle due calotte, esistono fra queste ∞^1 isometrie del 3° ordine, e che il fissarne una corrisponde a determinare la posizione relativa di una calotta rispetto all'altra, portando a coincidere fra loro e con gli assi x, y due coppie di tangenti ortogonali prese arbitrariamente, una su ogni calotta, e che saranno omologhe nell'uguaglianza subordinata dall'isometria fra i fasci delle tangenti; allora, il risultato cui accennavo è il seguente: se la fissata isometria del 3° ordine è rappresentata da formule del tipo (3. 2), affinché essa possa estendersi fino al 4° ordine è necessario e sufficiente che nei centri delle calotte coincidano, oltre ai valori delle curvatures gaussiane, anche quelli delle loro derivate prime, calcolate naturalmente rispetto agli *stessi* parametri sulle due calotte; vale a dire, *dopo* aver espresso, mediante le (3. 2), le \bar{x}, \bar{y} di un punto della seconda calotta, in funzione delle x, y del suo omologo nella prima; soltanto che, essendo:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}\right)_0 = 1 \\ \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right)_0 = 0 \end{cases} \quad (12),$$

si ha, per le condizioni volute,

$$(4. 1') \quad (K)_0 = (\bar{K})_0$$

$$(4. 1'') \quad \begin{cases} (K_x)_0 = (\bar{K}_x)_0 = (\bar{K}_{\bar{x}})_0 \\ (K_y)_0 = (\bar{K}_y)_0 = (\bar{K}_{\bar{y}})_0 \end{cases}$$

ove K, \bar{K} sono le curvatures gaussiane delle due calotte.

A partire da tale risultato, io ho continuato la ricerca delle condizioni per l'esistenza di un'isometria di ordine qualsiasi, iniziando appunto da quella del 4° ordine.

Ma a questo punto si presentava per me una questione; fissate le posizioni relative delle due calotte, e scritte gli sviluppi:

$$(4. 2) \quad \begin{cases} z = 1/2 \varphi_2(x, y) + 1/3! \varphi_3(x, y) + \dots \\ \bar{z} = 1/2 \bar{\varphi}_2(\bar{x}, \bar{y}) + 1/3! \bar{\varphi}_3(\bar{x}, \bar{y}) + \dots \end{cases} \quad (13),$$

(12) Cfr. la formula (2. 4) della mia Nota Lincea.

(13) S'intende che x, y, z e $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sono coordinate in uno stesso riferimento; ho messo la sopralineatura appunto per mettere in evidenza che punti corrispondenti nell'isometria *non hanno necessariamente* le stesse x, y . Si noti anche che, per la medesima ragione, il Bompiani, da cui io ho preso le formule (2. 1) della mia Nota Lincea, poneva addirittura $x = u; y = v; z = z(u, v); \bar{x} = \bar{u}; \bar{y} = \bar{v}; \bar{z} = \bar{z}(\bar{u}, \bar{v})$, e cercava poi di determinare \bar{u}, \bar{v} , in funzione di u, v , sì da ottenere l'uguaglianza dei ds^2 .

(con il significato già indicato per le $\varphi_i, \bar{\varphi}_i$) volendo indagare l'esistenza o meno di un'isometria fra esse, dovevo anzitutto paragonare i valori delle curvature gaussiane nell'origine delle coordinate; perciò *non vi era alcun bisogno di preoccuparsi delle particolari rappresentazioni* (4. 2) *delle due calotte, data l'invarianza della curvatura gaussiana per trasformazioni di coordinate*; supposta allora valida la (4. 1'), esistono, come si è più volte detto, ∞^1 isometrie del 3° ordine fra le due calotte; ma la validità delle (4. 1'') mi assicurava la possibilità di estendere al 4° ordine *solo quella isometria che corrisponde alla particolare posizione relativa delle due calotte*; in altri termini, le (4. 1'') sarebbero *necessarie e sufficienti* per l'isometria del 4° ordine, soltanto qualora si sappia *a priori* che gli assi x e y sono uniti nell'uguaglianza subordinata sul piano tangente dall'isometria del 3° ordine; è per questa ragione che io ho dovuto indagare se fosse possibile fare assumere a una delle calotte rispetto all'altra una posizione tale che potessero valere le (4. 1''). In tale ricerca io ho ottenuto la condizione

$$(4. 3) \quad \Delta_1(K)_0 = \bar{\Delta}_1(\bar{K})_0^{(14)},$$

esprimente l'uguaglianza, nei centri delle due calotte, dei parametri differenziali del Beltrami.

Da quanto precede risulta chiaro – almeno spero – che la condizione (4. 3) doveva essere necessariamente presa in considerazione e, contrariamente a quanto pare affermare il Mineo nella nota ⁽⁴⁾ del suo lavoro [1] non è affatto il frutto di « uno sforzo di caratterizzare l'isometria di ordine 4 con l'uguaglianza, nel centro dell'intorni, della curvatura, dei parametri differenziali di Beltrami e di loro derivate; cioè con enti che sono caratteristici del caso dell'applicabilità ». Inoltre mi pare perfettamente giustificato – contrariamente all'opinione espressa nella stessa nota ⁽⁴⁾ – il nome di *isometria* dato alle corrispondenze in esame; se mai, è alla corrispondenza adottata dal Mineo che tale denominazione mi sembra poco adatta!

5. Nei successivi nn. dei suoi lavori (n. 2 della Nota [1] e n. 1 del lavoro [2]), il Mineo osserva poi che, riferita ognuna delle due calotte u, v a coordinate geodetiche polari aventi come poli i rispettivi centri delle due calotte ⁽¹⁵⁾ l'ordine dell'isometria può alterarsi e fa giustamente osservare come tale fatto dipenda dall'essere nullo in $O \equiv \bar{O}$ il jacobiano delle x, y rispetto alle u, v ; anzi come subito si vede, in tale punto le due prime forme quadratiche fondamentali cessano di essere definite positive – come forme di due variabili u, v – riducendosi entrambe a du^2 . Sulla base di tale corretta affermazione, l'Autore ne

(14) Il ragionamento ora fatto *non* era esposto nella Nota Lincea, di carattere preventivo ma bensì nel lavoro più ampio dei « Rendiconti di Mat., ecc. » Nel lavoro Linceo, invece, compare a p. 384 la frase « *Scelto il riferimento nella maniera precisata più sopra, si può effettivamente dire...* »; e questo può forse aver fatto credere al Mineo che il concetto di ordine di isometria dipendesse, anche secondo me, dalla scelta dei parametri; ma, in realtà, la frase suddetta si riferiva appunto alla possibilità di ruotare una superficie intorno alla normale, di modo che possano valere eventualmente, le (4. 1''), possibilità che è appunto espressa dalla (4. 3).

(15) Si noti anche qui l'errore di prendere, senz'altro, come omologhi, punti aventi le stesse u, v . In questo caso, però data la *speciale natura* delle coordinate scelte, tale assunzione è lecita (ved. appresso al n. 9).

conclude che l'ordine di un'isometria è dipendente dalla scelta dei parametri sulle due calotte; fatto che, se fosse vero incondizionatamente, toglierebbe, come è ovvio, gran parte dell'interesse al concetto di isometria di ordine k fra due calotte, che sarebbe non già un carattere intrinseco delle due calotte, ma alcunchè di estraneo, legato alla rappresentazione parametrica.

Senonchè, non appena, nell'ultimo n. di [2], il Mineo cerca rispetto a quali trasformazioni di variabili l'ordine di isometria sia invariante, egli trova, come è ben naturale, che, se in un determinato sistema di coordinate l'ordine di isometria è k , tutte e sole le trasformazioni di coordinate conservanti tale ordine sono quelle per cui il jacobiano è, nel centro della calotta, diverso da zero. E con ciò egli, in sostanza, non fa che provare che l'ordine di isometria è un concetto che vale nello stesso ambito in cui vale tutta la Geometria Differenziale!

6. Infatti, come è ben noto, la Geometria Differenziale prende in considerazione esclusivamente *trasformazioni di coordinate regolari e univocamente invertibili in tutto il dominio in cui si lavora*; senza tale ipotesi, invero, viene a cadere il concetto di (pezzo di) superficie, come l'insieme dei punti in corrispondenza *biunivoca* (e continua) con le coppie ordinate di numeri u, v ; perdono inoltre significato i concetti di densità scalare e — in generale — di ente geometrico, su cui è fondata la Geometria Differenziale; ciò non diminuisce affatto, naturalmente, l'importanza delle coordinate geodetiche polari, e il loro interesse in vari ordini di questioni; vuol dire che occorrerà sempre esaminare con particolare cautela ciò che accade nel polo. Tale ipotesi di regolarità per la rappresentazione parametrica è talmente ovvia, che va sempre sottintesa nella Geometria Differenziale.

E allora il risultato del Mineo è un caso particolare del fatto ben noto che l'ordine di infinitesimo delle componenti di un *tensore* è invariante per le trasformazioni di coordinate regolari e invertibili nel punto dato (coordinate che si dicono *ammissibili*). Infatti, dopo aver riferito le due calotte agli stessi parametri u^1, u^2 (dopo aver cioè stabilito fra le due calotte la corrispondenza di cui si indaga la natura) si consideri la varietà numerica in cui u^i ($i = 1, 2$) sono coordinate di punto; in tale varietà sono definiti i due tensori fondamentali g_{ik} per la prima calotta e \bar{g}_{ik} per la seconda, e quindi il tensore $\gamma_{ik} = g_{ik} - \bar{g}_{ik}$; e allora l'indipendenza dell'ordine di isometria dal sistema di coordinate — purchè ammissibile — segue senz'altro dall'enunciato richiamato poco fa. E si osservi che tale ragionamento si può ripetere, *mutatis mutandis*, per lo scalare (tensore di covarianza e controvarianza nulle) $K - \bar{K}$ differenza delle curvature delle due calotte.

7. Le cose vanno in maniera totalmente differente qualora il jacobiano della trasformazione abbia uno zero nel centro della calotta a cui si applica la trasformazione: in tal caso, infatti, si riesce a rendere l'isometria di ordine alto quanto si vuole; possiamo renderci conto del fatto col seguente esempio: si parta dai due ds^2 espressi in coordinate geodetiche polari;

$$(7.1) \quad ds^2 = du^2 + \lambda^2 dv^2 \quad ; \quad d\bar{s}^2 = du^2 + \bar{\lambda}^2 dv^2 \quad (16),$$

(16) Vedi nota precedente.

ove, con il Mineo, si è posto:

$$(7.2) \quad \lambda = u + P_0 u^3 + \dots + P_n u^{n+3} + \dots,$$

essendo P_i una forma di grado i in $\sin v, \cos v$, e P_0 una costante uguale a $\bar{K}_0/6$, ove K_0 è la curvatura gaussiana calcolata in O ; analoga espressione si ha per $\bar{\lambda}$.

Si consideri allora la trasformazione

$$(7.3) \quad \begin{cases} u = u'' \\ v = v' \end{cases}$$

(con r intero qualsiasi positivo), per cui il jacobiano ha uno zero di ordine $r-1$ per $u=v=0$; dalle (7.3), (7.1), (7.2) si ricava subito:

$$ds^2 = r^2 u'^{2r-2} du'^2 + \lambda^2 [u'(u)] dv^2$$

$$d\bar{s}^2 = r^2 u'^{2r-2} du'^2 + \bar{\lambda}^2 [u'(u)] dv^2$$

e

$$\lambda^2 - \bar{\lambda}^2 = u'^{2r} (1 + 2 P_0 u'^{2r} + \dots) - u'^{2r} (1 + 2 \bar{P}_0 u'^{2r} + \dots),$$

che comincia con termini di grado $4r$ (almeno). Ne risulta che, in questo caso, l'isometria è di ordine $4r$ per ogni coppia di superficie. Ma se ciò accade, potremmo dire con lo Scheffers⁽¹⁷⁾, «die Schuld liegt an der gewählten Parameterdarstellung...», per la quale il punto $u=v=0$ non è regolare!

8. È facile poi dare un criterio per decidere *a priori* se un dato sistema di coordinate u, v è ammissibile (nel senso ben precisato), in un punto che potremo sempre supporre esser dato da $u=v=0$. Basta infatti rammentare che $EG - F^2$ è una densità scalare di peso 2, nel senso che, per una *qualsiasi* trasformazione di coordinate si ha $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = (EG - F^2) J^2$ essendo J il jacobiano delle vecchie variabili relativamente alle nuove; segue da ciò che $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$ può esser nullo se e solo se $J=0$; e anzi $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$ ha in ogni zero di J uno zero di ordine doppio. Possiamo dire perciò che:

condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di coordinate sia ammissibile in un punto O è che l'espressione $EG - F^2$ calcolata in tale sistema e in O sia diversa da zero - il che equivale a dire che il punto O non deve esser singolare per la metrica della superficie, quando ci si riferisca al dato sistema coordinato.

9. Nel lavoro [2], il Mineo, basandosi sull'erronea presunzione che le condizioni trovate dal Bompiani e da me - pur necessarie - *non siano sufficienti* per l'isometria di dato ordine, cerca di vedere per quali parametri le condizioni stesse siano anche sufficienti. Da quanto si è detto nei numeri precedenti risulta chiaramente come il problema, posto in questi termini, sia pressochè senza senso. Vale però

(17) G. SCHEFFERS, *Einführung in die Theorie der Flächen*, Leipzig, Von Veit & C., 1913, II auf., vol. II, p. 22.

la pena di soffermarsi sul procedimento dell'Autore poichè da esso — ciò che pare sfuggito al Mineo — si può dedurre una dimostrazione più semplice dei miei risultati.

Esaminiamo perciò brevemente ciò che fa il Mineo: egli riferisce anzitutto ognuna delle calotte a coordinate geodetiche polari $u, v; u', v'$, aventi come poli i rispettivi centri, e introduce poi le *coordinate normali di Riemann* mediante le posizioni $\alpha = u \cos v; \beta = u \sin v; \alpha' = u' \cos v'; \beta' = u' \sin v'$ — cosicchè le geodetiche uscenti, per esempio da O, hanno la equazione $\beta = m\alpha$ — dopo di che riferisce le due calotte l'una all'altra assumendo, al solito, *come omologhi* punti per cui $\alpha' = \alpha; \beta' = \beta$.

Ora questa operazione che, come si è visto, è in generale arbitraria, diviene nel caso attuale lecita, e ciò in base alle due seguenti osservazioni che, almeno esplicitamente, non sono fatte dal Mineo:

a) il sistema di coordinate α, β è *ammissibile* in O; ciò è ben noto, e si giustifica subito in base al criterio del n. 8, osservando che (ved. formula (17) a p. 7 di [2]) si ha in O, $E(\alpha, \beta) = 1; F(\alpha, \beta) = 0; G(\alpha, \beta) = 1$; e quindi $EG - F^2 = 1$;

b) *poichè le coordinate normali hanno un significato intrinseco alla geometria della superficie, se esiste un'isometria fra le due calotte, e si assumono come geodetiche $\beta = 0; \beta' = 0$ due geodetiche corrispondenti, allora l'isometria è necessariamente rappresentata dalle formule:*

$$(9.1) \quad \alpha' = \alpha; \beta' = \beta.$$

Solamente dopo aver fatto queste osservazioni è lecito confrontare — come fa il Mineo — gli sviluppi dei due ds^2 nelle stesse variabili α, β . E con calcoli effettivamente molto semplici si trova che due calotte sono sempre isometriche del 2° ordine, e che lo sono di ordine k se coincidono in O le derivate delle curvature gaussiane fino all'ordine $k - 3$ incluso. Soltanto che tale risultato non è altro che quello da me trovato e la sua validità non è affatto ristretta — come afferma il Mineo — alla particolare scelta delle coordinate curvilinee.

Di più, poichè si è visto che nel porre la corrispondenza si sono fissate (arbitrariamente) due tangenti omologhe nell'uguaglianza fra i fasci delle tangenti in O, O', ne risulta automaticamente l'esistenza di ∞^1 isometrie del 2° ordine, e quella di ∞^1 isometrie del 3° ordine, qualora ne esista una; ma non appena si cerchi l'esistenza di isometrie del 4° ordine, occorre — se possibile — *determinare* la scelta di tali tangenti, in modo che, prese le geodetiche ad esse tangenti rispettivamente come $\beta = 0; \beta' = 0$, valgano le condizioni

$$K = (\bar{K})_0$$

$$(K_\alpha)_0 = (\bar{K}_\alpha)_0 \quad ; \quad (K_\beta)_0 = (\bar{K}_\beta)_0$$

e in tale ricerca, si trova, come facilmente il lettore potrà vedere, nuovamente la condizione:

$$(\Delta_1 K)_0 = (\bar{\Delta}_1 \bar{K})_0.$$

Geometria. — *Trasformazioni puntuali nell'intorno di un punto unito.* Nota di CARMELO LONGO, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

I. SCOPO DELLA NOTA. — Le trasformazioni puntuali fra piani sovrapposti sono state oggetto di ricerche da parte di Poincaré e Lattès⁽¹⁾, i quali, rivelata l'esistenza di due invarianti topologici dipendenti dall'intorno del 1° ordine, hanno dimostrato, sotto alcune ipotesi relative ad essi, l'esistenza di due curve invarianti; inoltre il Lattès assegna per le suddette trasformazioni una riduzione a forma canonica rispetto al gruppo delle trasformazioni topologiche.

Io riprendo lo studio di queste trasformazioni allo scopo principale di dare un significato geometrico (topologico) dei due invarianti dipendenti dall'intorno del primo ordine⁽²⁾.

Ho poi proseguito la ricerca relativa a intorni di ordine più elevato rispetto al gruppo proiettivo. Com'è naturale mi sono servito del tipo di procedimenti elaborati dal Bompiani e dal Villa per lo studio di corrispondenze fra piani distinti⁽³⁾; ma, com'è anche naturale, mi sono trovato di fronte a problemi nuovi che esigevano diversi accorgimenti. Qui basti notare che mentre nel caso di piani distinti per avere invarianti e forme canoniche occorre (almeno) l'intorno del 3° ordine, nel caso attuale basta, in generale, quello del secondo.

È quasi immediata poi l'estensione a spazi di dimensione maggiore di due.

2. INVARIANTI RELATIVI ALL'INTORNO DEL PRIMO ORDINE. — Ricordiamo il problema. In un ente a due dimensioni (che per il momento non occorre specificare come piano) i cui punti siano riferiti alle coordinate x, y è data la corrispondenza

$$(2.1) \quad \begin{cases} \bar{x} = ax + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + [3] \\ \bar{y} = by + b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2 + [3] \end{cases}$$

regolare nel punto unito $O(0, 0)$ ⁽⁴⁾.

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) H. POINCARÉ, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. « Journal de Liouville », 1886; S. LATTÈS, *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une curve ou une surface invariante par une transformation*. « Annali di Mat. », ser. III, to. XIII, 1907; S. LATTÈS, *Sur les formes réduites des transformations ponctuelles dans le domaine d'un point double*. « Bull. Soc. Math. de France », 1911.

(2) Sono stato condotto alla presente ricerca, avendomi A. Andreotti domandato un significato di questi invarianti che interessano a lui per un suo lavoro.

(3) Per la bibliografia relativa a queste trasformazioni vedi: M. VILLA, *Le trasformazioni fra due spazi lineari*. « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. IV, 1948.

Si veda inoltre: E. BOMPIANI, *Tessuti di curve piane e corrispondenze puntuali*. « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. VI, 1949; *Sulle corrispondenze puntuali fra spazi proiettivi*. « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. VI, 1949.

(4) Mi riferisco al caso generale nel quale vi sono due direzioni unite per O .

Se si assoggettano le x, y ad una trasformazione regolare in O (ossia a jacobiano $\neq 0$), e per cui O sia unito, si trova che i coefficienti a e b non variano, cioè sono invarianti topologici.

Per averne il significato osserviamo anzitutto che si può limitarsi allo studio di una delle (2. 1), per esempio la prima, i termini del 2° ordine (in cui compare anche l'altra variabile) non avendo alcuna influenza.

Limitiamoci quindi ad esaminare una corrispondenza del tipo

$$(2. 2) \quad \bar{x} = ax + \dots$$

ove la linea sostegno delle variabili x a \bar{x} è una linea qualsiasi. Dare la corrispondenza (2. 2) fino all'intorno del 1° ordine di O) equivale far corrispondere ad un punto dell' E_1 dato su una delle linee sovrapposte un determinato punto dello stesso E_1 considerato sull'altra.

Il primo punto può sempre individuarsi, per esempio con

$$(2. 3) \quad x = t + \dots$$

ove t è una qualsiasi variabile numerica che possiamo pensare distesa su una retta r . Questa variabile *non* è, naturalmente, individuata; insieme ad essa possono pensarsi tutte le altre variabili che assumono in O e nel punto fissato prossimo ad esso lo stesso valore (a meno d'infinitesimi del 2° ordine); cioè

$$(2. 4) \quad t' = t + \dots$$

I parametri così ottenuti si diranno *raccordati* ⁽⁵⁾ ad uno qualsiasi di essi; una qualsiasi delle (2. 4) rappresenta sulla r una corrispondenza con due punti uniti infinitamente vicini.

Lo stesso può farsi per il punto preso sulla seconda forma, con l'introduzione di un parametro \bar{t} (o di quelli ad esso raccordati).

La corrispondenza (2. 2) equivale ora ad una qualsiasi corrispondenza del tipo

$$(2. 5) \quad \bar{t} = at + \dots$$

fra due rette sovrapposte; e per il significato di a basterà riferirsi a questa.

Sulla retta r ove pensiamo distesi i valori del parametro t , indicato con Ω il punto corrispondente a $t = 0$, siano T e \bar{T} due punti corrispondenti nella (2. 5). L'invariante a è il limite del rapporto semplice $(\bar{T} T \Omega)$ per $T \rightarrow \Omega$; od anche, considerato un qualsiasi punto M a distanza finita da Ω , a è il limite del birapporto $(\bar{T} T \Omega M)$ per $T \rightarrow \Omega$. Quindi:

Una corrispondenza H fra i punti di una curva (o ente analitico ad una dimensione) nell'intorno di un suo punto unito O ha un invariante (topologico) e determina una corrispondenza \bar{H} , avente un punto unito Ω sulla retta r che rappresenta i parametri raccordati determinati da una coppia di punti corrispondenti dell' E_1 unito di origine O . Indicati con T e \bar{T} una coppia di punti corrispondenti in \bar{H} ed M un punto qualsiasi di r , a distanza finita da Ω , l'invariante della corrispondenza H è il limite per $T \rightarrow \Omega$ del rapporto semplice $(\bar{T} T \Omega)$ ovvero del birapporto $(\bar{T} T \Omega M)$.

(5) E. BOMPIANI, *Topologia differenziale*. Nota I. Questi « Rend. », vol. VIII, 1950.

Un altro significato dell'invariante a si ha osservando che le ∞^1 proiettività

$$\bar{t} = \frac{at}{1-pt}$$

che approssimano fino all'intorno del primo ordine incluso la trasformazione (2.5), hanno tutte come invariante a .

3. TRASFORMAZIONI PUNTUALI IN UN PIANO NELL'INTORNO DI UN PUNTO UNITO CON DUE DIREZIONI UNITE DISTINTE. - D'ora in poi suppongo che le trasformazioni T in esame abbiano come sostegno un piano proiettivo π , ed esamino l'intorno del 2° ordine allo scopo di determinare una forma canonica della T rispetto al gruppo proiettivo.

Ad un E_2 di π e di origine O

$$(3.2) \quad \begin{cases} x = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots \\ y = \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots \end{cases}$$

la T (2.1) fa corrispondere l' \bar{E}_2 :

$$(3.3) \quad \begin{cases} \bar{x} = \bar{\alpha}_1 t + \bar{\alpha}_2 t^2 + \dots \\ \bar{y} = \bar{\beta}_1 t + \bar{\beta}_2 t^2 + \dots \end{cases}$$

con:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= a\alpha_1, & \bar{\alpha}_2 &= a\alpha_2 + a_{20}\alpha_1^2 + 2a_{11}\alpha_1\beta_1 + a_{02}\beta_1^2 \\ \bar{\beta}_1 &= b\beta_1, & \bar{\beta}_2 &= b\beta_2 + b_{20}\alpha_1^2 + 2b_{11}\alpha_1\beta_1 + b_{02}\beta_1^2. \end{aligned}$$

Proiettiamo su $y=0$ da un centro generico $S(\xi, \eta)$ punti corrispondenti e appartenenti agli E_2 (3.2) e (3.3) ed indichiamo con X e \bar{X} le loro ascisse.

La corrispondenza T_x tra X e \bar{X} è del tipo:

$$(3.4) \quad \bar{X} = \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \dots$$

Poichè l'espressione dell'invariante λ_1 è dato da

$$\lambda_1 = \frac{a\alpha_1\eta - b\beta_1\xi}{\alpha_1\eta - \beta_2\xi}$$

si ha $\lambda_1 = a$ (essendo per ipotesi $a \neq b$), se e solo se $\beta_1 = 0$ (caso banale) ovvero $\xi = 0$. Quindi: *Ciascuna delle due rette determinate dalle direzioni unite (o rette unite) è luogo dei punti tali che la corrispondenza che si genera proiettando da essi sull'altra retta unita E_1 corrispondenti nella T , ha come invariante relativo all'intorno del primo ordine l'invariante della T relativo alla direzione unita su cui si proietta.*

Per $\xi = 0$ nella (3.4) si ha:

$$\lambda_1 = \frac{a(b-1)}{2} \frac{\beta_1}{\alpha_1} + a_{20} + 2a_{11} \frac{\beta_1}{\alpha_1} + a_{02} \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right)^2$$

che non dipende nè da α_2 nè da β_2 ; quindi:

Dato un E_1 per il punto unito O ed un punto S su una delle due rette unite, la corrispondenza che si ottiene proiettando da S sull'altra retta unita un E_2 qualsiasi per l' E_1 ed il suo corrispondente dipende solamente dall' E_1 e da S (cioè non dall' E_2).

Se e solo se $b = 1$, ovvero per $\beta_1 = 0$, ossia se l' E_2 è tangente alla direzione unita su cui si proietta, la corrispondenza non dipende dal centro S di proiezione.

Per $\xi = 0$ e $\beta_1 = 0$ la corrispondenza (3.4) (si confronti anche l'ultima parte dell'enunciato precedente) diviene:

$$\bar{X} = aX + a_{20}X^2 + \dots$$

che è approssimata fino all'intorno del 2° ordine incluso dalla proiettività

$$\bar{X} = \frac{aX}{1 - (a_{20}/a)X}.$$

Per $a \neq 1$ la precedente proiettività non è parabolica; scelto il punto unito diverso da $O(0, 0, 1)$ come punto $O_1(1, 0, 0)$ si ha: $a_{20} = 0$.

Se è $b \neq 1$ si può fare una scelta analoga per il punto $O_2(0, 1, 0)$ e si ha $b_{02} = 0$.

Per la scelta del punto unità si considerino gli E_2 corrispondenti rispettivamente agli E_2 inflessionali appartenenti alle rette unite, ossia $\bar{y} = [3]$ e $\bar{x} = [3]$: scegliendo il punto unità in uno dei punti comuni, diverso da O , alle due coniche passanti per gli E_2 precedenti e tangenti alla retta O_1O_2 rispettivamente in O_2 e O_1 si ha: $a_{02} = -a$, $b_{20} = -b$.

Con ciò è intrinsecamente individuato il riferimento e la trasformazione T assume la seguente forma canonica:

$$(3.5) \quad \begin{cases} \bar{x} = ax + 2a_{11}xy - ay^2 + [3] \\ \bar{y} = bx - bx^2 + 2b_{11}xy + [3]. \end{cases}$$

Per quanto riguarda un significato geometrico dei due invarianti (proiettivi) a_{11} e b_{11} si osservi che le direzioni inflessionali $y = mx + [3]$ sono date da:

$$ab(m^3 - 1) - 2(ba_{11}m - ab_{11}) = 0$$

e che queste, insieme alle due direzioni unite individuano i due invarianti.

Supponiamo ora: $a = 1$ ($b \neq 1$): per la T è unito allora anche il punto infinitamente vicino ad O nella direzione unita $y = 0$.

In tale ipotesi vale ancora la determinazione fatta del punto $O_2(0, 1, 0)$ mentre cade quella del punto $O_1(1, 0, 0)$ e per la determinazione della retta impropria non basta più l'intorno del 2° ordine della trasformazione T .

Se si sceglie come retta impropria la tangente in O_2 alla conica passante per l' E_3 corrispondente all' E_3 iperinflessionale $\bar{y} = [4]$ e per O_2 , si ha: $2b_{11}b_{20} - b_{30}b = 0$, e quindi, con la scelta già fatta del punto unità, $b_{30} = -2b_{11}$ (ove b_{30} è il coefficiente di x^3 nei termini del 3° ordine della \bar{y} nella (3.1)). In tal caso la trasformazione T assume quindi la seguente forma canonica:

$$(3.6) \quad \begin{cases} \bar{x} = x + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy - ay^2 + [3] \\ \bar{y} = by - by^2 + 2b_{11}xy - 2b_{11}x^3 + y\varphi_2(x, y) + [4] \end{cases}$$

ove $\varphi_2(x, y)$ è una forma di 2° grado.

Per mezzo delle tre rette inflessionali si ha un significato dei tre invarianti dipendenti dai termini del 2° ordine.

4. TRASFORMAZIONE PUNTUALE NELL'INTORNO DI UN PUNTO UNITO CON UNA SOLA DIREZIONE UNITA PER ESSO. - Scegliendo l'unica direzione unita come $y = 0$, come retta $x = 0$ una delle direzioni inflessionali e come retta unita la direzione corrispondente di $x = 0$, le equazioni della trasformazione T sono del tipo:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \bar{x} = a(x + y) + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + [3] \\ \bar{y} = ay + b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + a_{02}y^2 + [3]. \end{cases}$$

Per l'invariante (topologico) a si ha lo stesso significato dato al n. 2. Per due E_2 corrispondenti del tipo (3.2), (3.3), si ha:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= a(\alpha_1 + \beta_1) & \bar{\alpha}_2 &= a(\alpha_2 + \beta_2) + a_{20}\alpha_1^2 + 2a_{11}\alpha_1\beta_1 + a_{02}\beta_1^2 \\ \bar{\beta}_1 &= a\beta_1 & \bar{\beta}_2 &= a\beta_2 + b_{20}\alpha_1^2 + 2b_{11}\alpha_1\beta_1 + a_{02}\beta_1^2. \end{aligned}$$

Costruita in modo analogo al numero precedente la corrispondenza (3.4) si ha in questo caso:

$$\lambda_1 = a + \frac{a\beta_1\eta}{\alpha_1\eta - \beta_1\xi}$$

e quindi (dovendo essere $\eta \neq 0$) è $\lambda_1 = a$ se e solo se è $\beta_1 = 0$ (qualunque sia il centro di proiezione).

In tal caso ($\beta_1 = 0$), posto $\beta_2/\alpha_1^2 = \mu$ e $\xi/\eta = \lambda$, si ha

$$\lambda_2 = a\mu + a_{20} - \lambda b_{20},$$

e la (3.4) è approssimata fino all'intorno del 2° ordine incluso della proiettività

$$\bar{X} = \frac{aX}{1 - (\lambda_2/a)X}$$

che ha come punto unito, diverso da O per $a \neq 1$, $x = a(1 - a)/\lambda_2$. Quindi:

Dati due E_2 corrispondenti nella T e tangenti alla direzione unita (ossia fissato un valore di μ) e data una retta per O (ossia un valore di λ) al variare del centro di proiezione su questa, la corrispondenza (3.4) non varia.

Inoltre, dato μ , per $a \neq 1$, vi è una proiettività fra i punti della retta unita ($y = 0$) e le direzioni per O.

Si può allora scegliere come punto $O_1(1, 0, 0)$ su $y = 0$ il corrispondente di $\lambda = 0$ (ossia della direzione inflessionale $x = 0$) nella proiettività individuata da $\mu = 0$ (ossia dall' E_2 inflessionale $y = [3]$ appartenente alla direzione unita). Con ciò si ha: $a_{20} = 0$.

Inoltre: gli E_2 inflessionali corrispondenti $x = [3]$ e $\bar{y} = \bar{x} + [3]$ determinano tra le rette alle quali essi appartengono una proiettività (proiettività caratteristica) di centro il punto S di coordinate omogenee $(-a^2, a(1 - a), a_{02})$. (Per questo basta verificare che proiettando da S su $x = 0$ punti corrispondenti nei due E_2 si ha una corrispondenza del tipo: $\bar{Y} = Y + [3]$). Scegliendo, come

si può essendo $a \neq 1$, come retta impropria la retta $O_1 S$, si ha $a_{02} = 0$. Con ciò rimane determinato il punto $O_2(0, 1, 0)$.

Infine scelto il punto unità nell'intersezione della retta $y = x$, già determinata, con la conica per l' E_2 corrispondente all' $E_2 \bar{y} = [3]$ e tangente alla retta impropria in O_2 , si ha: $b_{20} = -a$.

Con ciò è intrinsecamente individuato il riferimento e la trasformazione T assume la seguente forma canonica:

$$(4.2) \quad \begin{cases} \bar{x} = a(x + y) + 2a_{11}xy + [3] \\ \bar{y} = ay - ay^2 + 2b_{11}xy + [3]. \end{cases}$$

Per mezzo delle due ulteriori rette inflessionali si ha un significato degli invarianti a_{11} e b_{11} .

Supponiamo ora $a = 1$. In tal caso si può scegliere come punto $O_1(1, 0, 0)$ il centro S della precedente proiettività caratteristica. Per completare poi la determinazione della retta impropria, si determini, per esempio l' E_3 corrispondente ad $\bar{y} = -\bar{x} + [4]$: questo E_3 determina una proiettività associata⁽⁶⁾ tra le rette per O e i punti della sua tangente e su questa si può scegliere come punto improprio il corrispondente della direzione unita.

Per il punto unità vale la determinazione già fatta nel caso $a \neq 1$.

5. TRASFORMAZIONE PUNTUALE NELL'INTORNO DI UN PUNTO UNITO CON LE DIREZIONI PER ESSO UNITE. — Scelte come rette $x = 0, y = 0$ e $y = x$ le tre rette inflessionali, le equazioni della trasformazione T sono del tipo:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= ax + a_{20}x^2 + (c - a_{20})xy + [3] \\ \bar{y} &= ay + (c - b_{02})xy + b_{02}y^2 + [3]. \end{aligned}$$

Supposto $a \neq 1$, si possono assumere come punti $O_1(1, 0, 0)$ e $O_2(0, 1, 0)$ i punti uniti, distinti da O , delle due proiettività caratteristiche relative ad $y = 0$ ed $x = 0$; con ciò si ha: $a_{20} = b_{02} = 0$.

Inoltre nella proiettività caratteristica relativa alla retta $y = x$ al punto $\bar{Q}(1, 1, 0)$ corrisponde il punto $Q(a/c, a/c, 1)$: scelto questo come punto unità si ha: $c = a$.

Con ciò rimane fissato il riferimento e la trasformazione T assume la seguente forma canonica

$$\begin{aligned} \bar{x} &= ax + axy + [3] \\ \bar{y} &= ay + axy + [3] \end{aligned}$$

ove all'invariante a si può dare lo stesso significato dato al n. 2.

Per $a = 1$, su due rette per O , distinte dalle tre rette inflessionali, si possono assumere come punti impropri uno dei punti *caratteristici*⁽⁶⁾ relativi alle due proiettività ad esse associate.

Fissata così la retta impropria vale la determinazione precedente del punto unito.

(6) M. VILLA, n. 3 della Nota citata in (3).

Meccanica. — *Integrazione delle equazioni indefinite della statica dei veli tesi su una generica superficie.* Nota di EDOARDO STORCHI, presentata (*) dal Corrisp. C. B. FINZI.

L'integrale generale delle due equazioni indefinite della statica di una membrana piana continua, di natura qualsivoglia, soggetta a sole forze al contorno, si ottiene, come è ben noto, esprimendo i tre sforzi mediante le derivate « seconde » della funzione di Airy. È pure noto che un analogo risultato sussiste se la membrana è tesa su di una generica superficie sviluppabile, oppure a curvatura costante ⁽¹⁾. Il risultato precedente è invertibile, nel senso che, soltanto per le superficie sviluppabili e per quelle a curvatura costante è possibile esprimere l'integrale generale nel modo suddetto ⁽²⁾.

In una Nota recente ⁽³⁾ ho dimostrato che, se la membrana è tesa su di una superficie di rotazione non sviluppabile, l'integrale generale delle equazioni indefinite della statica delle membrane si ottiene esprimendo gli sforzi linearmente mediante una funzione arbitraria e le sue derivate sino alle « terze ».

In questa Nota conclusiva risolvo il problema di trovare l'integrale generale delle equazioni indefinite che esprimono la solenoidalità del tensore degli sforzi di una membrana tesa su di una superficie generica. Esprimo dapprima tali sforzi mediante una funzione arbitraria, le sue derivate prime e seconde, nonchè tre integrali che contengono la funzione arbitraria. Elimino poi tali integrali, esprimendo gli sforzi linearmente mediante una funzione arbitraria e le sue derivate sino alle « quinte ».

Il sistema indefinito d'equilibrio dei continui:

$$p_{|k}^{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2)$$

su una generica superficie di metrica:

$$(1) \quad ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k$$

si scrive, eseguendo la derivazione tensoriale:

$$(2) \quad \frac{\partial p^{ik}}{\partial x^k} + p^{sk} \left\{ \begin{matrix} i \\ s \ k \end{matrix} \right\} + p^{is} \left\{ \begin{matrix} k \\ s \ k \end{matrix} \right\} = 0.$$

Nelle (2) $\left\{ \begin{matrix} l \\ i \ k \end{matrix} \right\}$ sono i simboli di Christoffel di 2^a specie legati al tensore fondamentale a_{ik} dalla nota relazione:

$$(3) \quad \left\{ \begin{matrix} l \\ i \ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} a^{lr} \left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{kr}}{\partial x^i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^r} \right).$$

(*) Nella seduta dell' 11 marzo 1950.

(1) B. FINZI, *Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui.* Questi « Rendiconti », vol. XIX, ser. VI (1934).

(2) E. STORCHI, *Sulle equazioni indefinite della statica delle membrane tese su generiche superficie.* Questi « Rendiconti », vol. VIII, ser. VIII (1950).

(3) E. STORCHI, *Integrazione delle equazioni indefinite della statica dei sistemi continui su una superficie di rotazione.* Questi « Rendiconti », vol. VII, ser. VIII (1949).

Per risolvere il problema dell'integrazione del sistema indefinito (2) noi ricorreremo ad una forma particolarmente semplice della metrica (1), che compete ad ogni superficie: la forma geodetica.

Posto $x_1 = x$; $x_2 = y$, ci è ben noto che al quadrato dell'elemento lineare si può attribuire la forma:

$$(4) \quad ds^2 = dx^2 + \lambda^2(x, y) dy^2$$

nella quale le $y = \text{cost}$ indicano le geodetiche, le $x = \text{cost}$ le traiettorie ortogonali.

In particolare se la superficie è a curvatura totale nulla (svilupparli): $\lambda = 1$.
Se la superficie è a curvatura totale costante pos. $1/R^2$ (sfera): $\lambda = \cos x/R$.
Se la superficie è a curvatura totale costante neg. $-1/R^2$ (ipersfera): $\lambda = \cosh x/R$.
Se la superficie è di rotazione: $\lambda = \lambda(x)$.

Dopo aver notato che, nel caso generale, la curvatura totale gaussiana vale (4)

$$(5) \quad k = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}$$

andiamo a calcolare i simboli di Christoffel onde trascrivere il sistema (2).

Data la particolare forma della metrica è facile constatare che i soli simboli significativi sono quelli contenenti «almeno» due indici eguali a 2 (5) e che precisamente:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad ; \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad ; \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y}.$$

Il sistema (2), posto:

$$(6) \quad p^{11} = X, \quad p^{12} = p^{21} = Y, \quad p^{22} = Z, \quad \mu = \log \lambda$$

diviene allora, dopo facili semplificazioni:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + X \frac{\partial \mu}{\partial x} + Y \frac{\partial \mu}{\partial y} - Z e^{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y} + 3 Y \frac{\partial \mu}{\partial x} + 2 Z \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Introdotte poi le tre funzioni $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ legate agli sforzi dalle relazioni:

$$(8) \quad X = A e^{-\mu}, \quad Y = B e^{-3\mu}, \quad Z = C e^{-2\mu}$$

lo stesso sistema (7), tenuto conto dell'ultima delle (6), si trasforma nel seguente formalmente assai più semplice:

$$(*) \quad \begin{cases} (a) \quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (B e^{-2\mu}) - C \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0 \\ (b) \quad \frac{\partial B}{\partial x} + \lambda \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

(4) Vedasi ad esempio L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, par. I, vol. I, p. 124, Pisa, ed. Spoerri, 1922.

(5) Vedasi anche L. BIANCHI, loc. cit., p. 440. Nel caso delle superficie di rotazione sono invece significativi «soltanto» i simboli di Christoffel contenenti due indici eguali a 2.

Una volta integrato (*) gli sforzi risulteranno determinati dalle (8).
Per procedere all'integrazione di (*) si cominci col porre:

$$\begin{cases} (c) & B = -\frac{\partial \chi}{\partial y} + \alpha(x, y) \\ (d) & C = \lambda^{-1} \frac{\partial \chi}{\partial x} \end{cases}$$

denotando con $\chi(x, y)$ una funzione arbitraria di x e di y e con $\alpha(x, y)$ una funzione da determinarsi mediante $\chi(x, y)$ e l'unico coefficiente μ della metrica.

Sostituendo in (b) e integrando per parti, si trae ⁽⁶⁾:

$$(9) \quad \alpha = \chi \frac{\partial \mu}{\partial y} - \int \chi \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} dx.$$

Se:

$$(10) \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \quad \text{oppure} \quad (11) \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} = 0$$

risulta rispettivamente: $\alpha = 0$, $\alpha = \chi \partial \mu / \partial y$ e sparisce il termine integrale della (9).

Supponiamo non verificate le (10), (11). Posto:

$$(12) \quad \int \chi \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} dx = \varphi \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} e^{2\mu}$$

si trae immediatamente:

$$(13) \quad \chi = e^{2\mu} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial h}{\partial x} \right]$$

con:

$$(14) \quad h = 2\mu + \log \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y}.$$

Le (c) e le (d) forniscono allora:

$$(15) \quad \begin{cases} B = - \left\{ e^{2\mu} \left[\frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \varphi \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \right] \right\} \\ C = e^{-\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{2\mu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \end{cases}$$

mentre una ulteriore sostituzione in (a) dà luogo alla relazione:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{2\mu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \varphi \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \right].$$

Eseguendo alcune integrazioni per parti e applicando il teorema di derivazione sotto il segno integrale viene a determinarsi $A(x, y)$ nel modo seguente:

$$(16) \quad A = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu}{\partial x} e^{2\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left[\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} e^{2\mu} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} e^{2\mu} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} \right] \varphi + \\ + \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right) - e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \varphi dx + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \varphi dx + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int \varphi \frac{\partial h}{\partial x} dx.$$

(6) Dall'integrazione nascerebbe in effetti una funzione arbitraria di y incorporabile però nella funzione arbitraria $\chi(x, y)$.

Tenendo conto delle (8), (15), (16) gli sforzi risultano allora esplicitamente così espressi:

$$\begin{aligned}
 p^{xx} &= \frac{1}{e^\mu} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu}{\partial x} e^{2\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left[\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} e^{2\mu} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} e^{2\mu} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} \right] \varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right) - e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \varphi dx + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \varphi dx + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int \varphi \frac{\partial h}{\partial x} dx \right\} \\
 p^{xy} &= -\frac{1}{e^\mu} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \right) \varphi \right\} \\
 p^{yy} &= \frac{1}{e^\mu} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(2 \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \varphi \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{**}$$

Le (**) risolvono il problema inizialmente posto dando gli sforzi mediante una funzione arbitraria, la φ , le sue derivate prime e seconde e i seguenti tre termini integrali contenenti la φ :

$$(17) \quad \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right) - e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \varphi dx$$

$$(18) \quad \int \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \varphi dx$$

$$(19) \quad \int \frac{\partial h}{\partial x} \varphi dx.$$

Se:

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right) - e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{oppure:} \quad (21) \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

si elidono rispettivamente l'integrale (17) o gli integrali (18), (19).

Supposto che la metrica non soggiaccia nè alla condizione (20) nè alla (21), si ponga:

$$(22) \quad \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right) - e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \varphi dx = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right) - e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \omega$$

e quindi:

$$(23) \quad \varphi = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial m}{\partial x}$$

con:

$$(24) \quad m = \log \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right) - e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial x} \right].$$

Gli integrali (18) e (19) divengono allora:

$$\int \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial m}{\partial x} \right] dx = \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \omega + \int \left[\frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \omega dx$$

$$\int \frac{\partial h}{\partial x} \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial m}{\partial x} \right] dx = \frac{\partial h}{\partial x} \omega + \int \left[\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \omega dx.$$

Se:

$$(25) \quad a = \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} \right) = 0$$

oppure:

$$(26) \quad b = \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = 0$$

scompare un termine integrale.

Supposto: $a \neq 0$, $b \neq 0$ si ponga:

$$(27) \quad \int a \omega dx = a \sigma.$$

Immediatamente si trae di qui:

$$(28) \quad \omega = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sigma \frac{\partial n}{\partial x}$$

con:

$$(29) \quad n = \log a$$

e quindi:

$$(30) \quad \int b \omega dx = \int b \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sigma \frac{\partial n}{\partial x} \right) dx = b \sigma + \int \left(b \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x} \right) \sigma dx$$

Se:

$$(31) \quad c = b \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x} = 0$$

si elide l'unico termine integrale superstite.

Se poi $c \neq 0$ si ponga:

$$(32) \quad \int c \sigma dx = c \Psi$$

e quindi:

$$(33) \quad \sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \Psi \frac{\partial p}{\partial x}$$

con:

$$(34) \quad p = \log c.$$

Tenendo conto infine delle (23), (28), (33) si perviene alla seguente espressione della φ tramite la Ψ e le sue derivate fino alla terza:

$$(35) \quad \varphi = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} + \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \gamma \Psi$$

ove:

$$(36) \quad \alpha = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial x}$$

$$(37) \quad \beta = 2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial x}$$

$$(38) \quad \gamma = \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \left(\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial x} \right).$$

La sostituzione della (35) nelle (**) porta così alla determinazione esplicita degli sforzi mediante la funzione arbitraria $\Psi(x, y)$ e le sue derivate prime, seconde, terze, quarte e « quinte ».

LE SUPERFICIE ECCEZIONALI. — Per pervenire a quest'ultimo risultato abbiamo dovuto fare delle ipotesi sulla natura della metrica della superficie. Precisamente abbiamo supposto che il coefficiente μ che caratterizza la metrica non soddisfi ad alcuna delle condizioni: (10), (11), (20), (21), (25), (26), (31).

Se qualcuna di queste condizioni è verificata è chiaro che l'integrale generale del sistema indefinito (2) è esprimibile mediante una funzione arbitraria e le sue derivate parziali di ordine non superiore al quarto.

Precisamente se $\partial\mu/\partial y = 0$, oppure $\partial^2\mu/\partial x\partial y = 0$, oppure $\partial h/\partial x = 0$ la superficie risulta di rotazione⁽⁷⁾ ed è facile constatare che l'integrale generale è esprimibile al più con le derivate « terze » di una funzione arbitraria⁽⁸⁾.

Se: $\partial/\partial x (e^{2\mu}(\partial^2\mu/\partial x^2)) - e^{2\mu}(\partial^2\mu/\partial x^2)(\partial h/\partial x) = 0$ oppure $a=0$, oppure $b=0$, oppure $c=0$, si ottengono delle categorie di superficie eccezionali per le quali l'integrale generale del sistema indefinito d'equilibrio si esprime al più con le derivate « quarte » di una funzione arbitraria.

(7) Infatti se $\partial\mu/\partial y = 0$ risulta: $\mu = \mu(x)$, $\lambda = \lambda(x)$, $ds^2 = dx^2 + \lambda^2(x) dy^2$.

Se $\partial^2\mu/\partial x\partial y = 0$, risulta: $\mu = f(x) + g(y)$, $\lambda = e^\mu = F(x) \cdot G(y)$; $ds^2 = dx^2 + F^2(x) \cdot G^2(y) dy^2$

e posto: $y' = \int G(y) dy$ si trae ancora: $ds^2 = dx^2 + F^2(x) dy'^2$ che è la forma caratteristica del ds^2 di rotazione.

Se infine: $\partial h/\partial x = 0$, notando che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu + \log \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \right) = \frac{2(\partial\mu/\partial x)(\partial^2\mu/\partial x\partial y) + (\partial^3\mu/\partial x^2\partial y)}{(\partial^2\mu/\partial x\partial y)} = \frac{(\partial/\partial y) [(\partial\mu/\partial x)^2 + (\partial^2\mu/\partial x^2)]}{(\partial^2\mu/\partial x\partial y)} \\ &= \frac{(\partial/\partial y) [(1/e^\mu)(\partial^2 e^\mu/\partial x^2)]}{(\partial^2\mu/\partial x\partial y)} = \frac{(\partial/\partial y) [(1/\lambda)(\partial^2\lambda/\partial x^2)]}{(\partial^2\mu/\partial x\partial y)} = - \frac{(\partial k/\partial y)}{(\partial^2\mu/\partial x\partial y)} \end{aligned}$$

si ha subito: $\partial k/\partial y = 0$ $\left[\overline{k = k(x)} \right]$. Dipendendo dunque la curvatura dalla sola x , sono soddisfatte le note condizioni $\Delta_1 k = f(k)$, $\Delta_2 k = F(k)$ che assicurano essere la superficie applicabile sopra una superficie di rotazione (vedasi ad esempio L. BIANCHI, loc. cit. p. 329).

(8) Vedasi loc. cit. in (3). Voglio qui segnalare il fatto che anche il risultato relativo alle superficie di rotazione, grazie a quanto esposto nella precedente nota (7), risulta invertibile nel senso che: « tutte e sole le superficie per le quali l'integrale generale delle equazioni indefinite di equilibrio è esprimibile mediante una funzione arbitraria $\Psi(x, y)$ e le sue derivate prime, seconde e « terze », sono le superficie di rotazione ».

Astronomia. — *Determinazione del passo e degli errori progressivi del micrometro in A. R. del cerchio meridiano Repsold mediante stelle circumpolari e zenitali.* Nota II di RICCARDO BARBATELLI, presentata (*) dal Socio N. CARNERA.

Nella precedente Nota esponemmo due metodi per la determinazione del passo del micrometro in A. R. del cerchio meridiano di Capodimonte.

In essa, scopo prevalente, fu quello di rilevare il valore medio angolare di rotazione della vite.

L'attuale studio si riferisce invece alla parte centrale della vite stessa e precisamente a quella che — compresa tra l'ottava e la tredicesima rotazione — viene, con maggiore frequenza, utilizzata nella osservazione.

Per l'esame, le stelle sono state tolte dal Catalogo N. G. C. di Boss (quelle delle quali alla tabella è dato il numero) senza tener conto del calcolo del luogo apparente data la trascurabile entità di δ .

Si è perciò adottata senz'altro la posizione media per il 1950, fornita dal Catalogo, tenuto presente che le osservazioni sono state effettuate negli ultimi mesi del 1949 e quindi più vicine al 1950,0 che al 1949,0.

In questa terza serie di stelle, essendo lo studio limitato ad un intervallo breve e quindi su un numero più ristretto di rotazioni e di appulsi osservati, si hanno valori medi singoli in un maggior disaccordo ma in perfetta concordanza nel risultato finale.

Le stelle osservate sono in numero di 115, tutte circumpolari; di esse nella registrazione cronografica, sono stati letti costantemente cinque appulsi per ogni rotazione della vite corrispondenti alle letture di $0^R.2$ e, dei cinque istanti, si è calcolata la media e la differenza per le due medie successive corrispondenti anch'esse al passaggio della stella per due posizioni del filo mobile distanti di $1^R.00$. Tale differenza è stata inoltre ridotta alla distanza equatoriale e, dei cinque valori ottenuti da ciascuna stella, si è ricavata la media.

Il valore dedotto con questo terzo metodo, come risulta dalla annessa tabella III è:

$$1^R = 4^s. 5578 \pm 0^s. 0040$$

che, in unione ai due valori dati nella nota I, da:

$$1^R = 4^s. 5574 \pm 0^s. 0031.$$

E tale risultato può essere accettato non senza però rilevare che i tre valori — essendo i medi corrispondenti a parte diverse della vite — possono ancora essere influenzati dagli errori progressivi dei quali non si è tenuto conto.

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

TABELLA III. — *Circumpolari da 8 a 13 rotazioni.*

Data	Stella	8	Differ. media	Data	Stella	8	Differ. media
25 agosto 1949	30535	77° 59' 47"	4 ^s 533	29 agosto 1949	31567	73° 22' 44"	4 ^s 522
» »	30657	72 14 57	4 653	» »	31671	81 7 31	5 506
» »	30730	80 3 8	4 494	» »	31855	82 53 0	4 564
» »	30978	72 7 28	4 498	» »	31968	76 3 59	4 469
» »	31049	71 51 35	4 583	» »	32239	80 17 36	4 610
» »	31351	84 14 54	4 549	» »	32366	73 57 11	4 562
» »	31361	77 10 22	4 614	» »	32493	78 43 24	4 543
» »	31436	75 58 26	4 550	» »	32650	73 50 19	4 582
» »	30567	73 22 41	4 605	» »	32733	77 32 17	4 514
» »	29019	82 20 39	4 451	» »	32875	77 20 12	4 483
» »	29107	80 21 44	4 510	» »	33113	77 19 14	4 548
» »	29452	79 5 27	4 571	» »	33225	73 34 56	4 584
» »	29719	78 45 5	4 567	30 agosto 1949	24462	75 10 34	4 560
» »	29792	81 1 4	4 587	» »	24567	71 3 ⁸ 38	4 575
» »	29921	80 8 6	4 491	» »	24685	75 47 6	4 583
» »	30069	80 18 11	4 555	» »	24837	81 38 32	4 643
» »	30144	77 42 40	4 638	» »	24992	79 24 35	4 506
» »	30287	78 23 42	4 543	» »	25077	71 29 35	4 613
» »	30344	71 4 42	4 562	» »	25122	72 42 40	4 523
» »	30415	71 4 35	4 464	» »	25225	77 31 45	4 544
29 agosto 1949	23599	80 11 1	4 560	» »	25462	72 22 5	4 597
» »	23865	74 15 35	4 577	» »	25585	77 38 19	4 575
» »	24180	80 18 7	4 605	» »	25707	70 44 22	4 499
» »	24462	75 10 34	4 585	» »	25803	74 1 37	4 568
» »	24567	71 38 38	4 603	» »	27746	79 18 46	4 564
» »	24685	75 47 6	4 498	» »	27918	79 32 6	4 541
» »	24837	81 38 32	4 610	» »	28039	77 40 25	4 542
» »	24992	79 24 35	4 550	» »	28156	72 44 27	4 622
» »	25077	71 29 35	4 590	» »	28266	80 22 25	4 612
» »	25122	72 42 40	4 558	» »	28572	83 0 45	4 539
» »	25225	77 31 45	4 618	» »	28891	72 47 27	4 548
» »	27746	79 18 46	4 559	» »	29019	82 20 39	4 592
» »	27918	72 32 6	4 589	» »	29166	74 34 42	4 535
» »	28039	77 40 25	4 607	» »	29286	75 31 16	4 543
» »	28156	72 44 27	4 549	» »	29452	79 5 27	4 521
» »	28266	80 22 25	4 546	» »	29545	80 57 20	4 527
» »	28572	83 2 45	4 622	» »	29615	80 48 46	4 505
» »	28891	72 47 27	4 555	» »	29775	80 35 33	4 431
» »	29019	82 20 39	4 535	» »	30069	80 18 11	4 554
» »	29166	74 34 42	4 536	» »	30144	77 42 40	4 536
» »	29286	75 31 16	4 582	» »	30287	78 23 42	4 582
» »	29452	79 5 27	4 620	» »	30344	71 4 42	4 546
» »	29545	80 57 20	4 581	» »	30415	71 4 35	4 529
» »	29775	80 35 33	4 464	» »	30535	77 59 47	4 592
» »	29921	80 8 6	4 598	» »	30657	72 14 57	4 595
» »	30069	80 18 11	4 527	» »	30730	80 3 58	4 596
» »	30287	78 23 42	4 612	» »	30830	82 37 30	4 568
» »	30344	71 4 42	4 581	» »	30978	72 7 20	4 572
» »	30415	71 4 35	4 549	» »	31049	71 51 35	4 544
» »	30535	77 59 37	4 510	» »	31251	84 17 14	4 558
» »	30657	72 14 57	4 607	» »	31361	77 10 22	4 571
» »	30730	80 3 58	4 567	» »	31436	75 58 26	4 570
» »	30830	82 37 30	4 441	» »	31567	73 22 41	4 557
» »	30978	72 7 20	4 562	» »	31671	81 7 31	4 554
» »	31049	71 51 35	4 624	» »	31855	82 53 0	4 499
» »	31251	84 17 14	4 588	» »	31988	76 3 59	4 533
» »	31361	77 10 22	4 601	» »	32113	80 30 25	4 573
» »	31436	75 58 26	4 546				

ERRORI PROGRESSIVI. — La determinazione degli errori progressivi della vite in A. R., è stata effettuata calcolando il valore angolare medio espresso in tempo per ciascuna rotazione del micrometro, corrispondenti alle posizioni medie del filo alle letture $0^R.4$, $1^R.4$, ... fino a $19^R.4$.

I valori ottenuti con metodi diversi, e con riferimento alle varie parti della vite, sono: 19 per la 1^a serie di determinazioni, 10 per la 2^a, e 4 per la 3^a come risultano dal seguente quadro:

TABELLA IV.

$0^R.4$	4.589 secondi di tempo		
1 .4	.595		
2 .4	.585		
3 .4	.550		
4 .4	.554		
5 .4	.605	4.545 ^s	
6 .4	.596	.550	
7 .4	.550	.534	
8 .4	.553	.565	4.581 ^s
9 .4	.529	.570	.556
10 .4	.575	.583	.543
11 .4	.565	.560	.523
12 .4	.522	.560	
13 .4	.541	.553	
14 .4	.540	.560	
15 .4	.540		
16 .4	.567		
17 .4	.522		
18 .4	.513		
19 .4			

Di tali valori sono state ricavate le medie, rotazione per rotazione (ossia medie riga per riga) e da esse, la media generale che è servita per avere gli scarti delle singole rotazioni. Questi scarti, che risultano espressi in secondi di tempo, vennero poi trasformati in rotazioni, ed avendo ammesso, che per la rotazione 10.4 corrisponda un errore progressivo nullo, si sono ricavati gli errori progressivi che vengono a corrispondere, in base agli scarti stessi, alle posizioni del filo mobile alle diverse letture a partire da 9.4 verso lo zero, e da 11.4 verso 20.0; questi errori si trovano riportati nella tabella V.

TABELLA V.

$0^R .4$	$+ 0^s .1231$	$+ 0^R .0270$
1 .4	$+ .908$	$+ .0199$
2 .4	$+ .525$	$+ .0115$
3 .4	$+ .241$	$+ .0052$
4 .4	$+ .308$	$+ .0067$
5 .4	$+ .335$	$+ 0.073$
6 .4	$+ .152$	$+ .0033$
7 .4	$— .101$	$— .0022$
8 .4	$+ .46$	$+ .0010$
9 .4	$— .50$	$— .0010$
10 .4	.0000	.0000
11 .4	$+ .103$	$+ .0022$
12 .4	$+ .29$	$+ .0006$
13 .4	$— .128$	$— .0028$
14 .4	$— .225$	$— .0049$
15 .4	$— .292$	$— .0064$
16 .4	$— .459$	$— .0100$
17 .4	$— .356$	$— .0078$
18 .4	$— .703$	$— .0154$
19 .4	$— .1140$	$— .0250$

Mediante questi ultimi valori si è proceduto alla costruzione di un grafico su carta millimetrata, e da esso si sono ricavati i valori per gli errori progressivi da applicare alle letture micrometriche da $0^R.0$ a $20^R.0$, che si hanno nella seguente tabella VI, ove i numeri sono da intendere espressi in unità di IV, cifre decimali di una rotazione.

TABELLA VI.

$0^R.$	$+ 300$	$7^R.$	$+ 20$	$14^R.$	$— 30$
1 .	$+ 230$	8 .	$— 10$	15 .	$— 58$
2 .	$+ 154$	9 .	$— 0$	16 .	$— 80$
3 .	$+ 86$	10 .	$— 0$	17 .	$— 98$
4 .	$+ 52$	11 .	$+ 15$	18 .	$— 140$
5 .	$+ 60$	12 .	$+ 10$	19 .	$— 210$
6 .	$+ 45$	13 .	$— 10$	20 .	$— 300$

È da rilevare che tra l'ottava e la tredicesima rotazione si hanno minimi errori progressivi.

I valori corrispondenti alle letture $0^R.0$ e $20^R.0$ si sono ottenuti per estrapolazione; ma l'arbitrarietà, che con ciò può essere derivata, a prescindere anche dalla minore sicurezza con la quale si sono determinati gli errori nelle parti estreme della vite, ha praticamente poca o nessuna importanza, in quanto l'uso della vite è limitato alle 5 rotazioni centrali, e solo raramente alle 10 centrali.

Nel concludere il valore angolare del micrometro, come risultato delle tre serie di osservazioni si è fatta la riserva sulla definitività di quel valore, in quanto non era stato considerato l'effetto possibile degli errori progressivi della vite.

Ora per la seconda e terza serie di valori, risultanti da osservazioni fatte tra le rotazioni 5.4 e 15.4 e rispettivamente 8.4 e 12.4, l'entità degli errori progressivi è piccola e trascurabile, non lo stesso si può dire per la prima serie, in cui l'intervallo effettivamente misurato non risulta di 19 rotazioni esatte bensì di $18^R.948$. Tenendo conto di questa differenza ne segue, che il valore del passo debba essere leggermente corretto, e quindi che il valore già conchiuso di $4^s.5556$ vada corretto in uno maggiore, ma poichè, come si è detto, la determinazione degli errori progressivi nelle parti estreme della vite, dove appaiono i valori più alti, non può ritenersi sufficientemente assicurata in tutto il suo valore, ma solo forse nel segno si può ritenere che il risultato, dovendo effettivamente essere aumentato, coincida ancora meglio con quelli ricavati dalle altre due serie; e che, di conseguenza, sia senz'altro accettabile quello dinanzi indicato.

Astronomia (Astrofisica). — *Sulle fluttuazioni di intensità dei brillamenti solari* (*). Nota di GUGLIELMO RIGHINI, presentata (**) dal Socio G. ABETTI.

I brillamenti solari sono fenomeni eruttivi della cromosfera, essi sono localizzati vicino alle macchie in fase di sviluppo e, benchè non si conosca ancora la causa prima che li produce, si può dire con sicurezza che essi sono una conseguenza dei fenomeni elettromagnetici che hanno sede nella cromosfera. Lo strumento più adatto per l'osservazione di questi fenomeni è lo spettroelioscopio il quale, oltre che dare una visione completa di tutta la zona perturbata, permette anche un apprezzamento quantitativo dell'entità del brillamento. Infatti fra la seconda fenditura del monocromatore e lo specchio concavo, che nel tipo classico di Hale⁽¹⁾ serve a dare l'immagine dello spettro sul piano della seconda fenditura, si trova una lastrina a facce piane e parallele, chiamata *deviatore* (in inglese *line-shifter*), che ruotando intorno ad un asse verticale a volontà dell'osservatore fa scorrere lo spettro nella direzione della dispersione. Si può portare così entro la seconda fenditura una qualsiasi radiazione avente lunghezza d'onda compresa

(*) Lavoro eseguito nell'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) «Ap. J.», 70, 265 (1929); id., 71, 73 (1930), id., 73, 379 (1931); id., 74, 214 (1931).

entro $\pm 2,5$ Å dalla lunghezza d'onda 6563 Å corrispondente al centro della riga H_{α} . Il deviatore che era stato introdotto da Hale con lo scopo preciso di misurare la velocità radiale dei fenomeni solari fu più tardi applicato da Ellison ⁽²⁾ alla misura della larghezza della riga H_{α} .

Ruotando il deviatore si vede che il fenomeno scompare per mancanza di contrasto rispetto al fondo generale del disco, ruotando in senso contrario il fenomeno riappare per scomparire poi, dopo oltrepassato il punto di massima visibilità. Un settore graduato solidale con l'asse del deviatore permette di misurare l'angolo di cui si deve ruotare la lastrina, a destra ed a sinistra del punto di massimo contrasto, per far scomparire il fenomeno. Calibrando opportunamente in lunghezza d'onda la graduazione del settore si può così determinare la larghezza l (in *angstrom*) della riga nel punto dove viene osservato il fenomeno. Poichè in prima approssimazione si può ammettere che il profilo della riga di emissione sia una gaussiana è evidente che la larghezza misurata è funzione dell'intensità centrale della riga stessa, e quindi la larghezza dà un criterio per giudicare l'intensità del fenomeno.

Per convenzione internazionale ⁽³⁾ i brillamenti sono classificati in tre classi a seconda della loro importanza che dipende non solo dalla loro intensità ma anche dall'area ricoperta. In generale i brillamenti della classe 1 sono quelli che coprono un'area (corretta per il raccorciamento prospettico) inferiore ai 300 milionesimi dell'emisfero solare, quelli della classe 2 coprono invece un'area compresa fra 300 e 750 milionesimi dell'emisfero e quelli della classe 3 hanno un'area superiore a 750 milionesimi. Ultimamente è stata aggiunta la classe 3⁺ che contiene i brillamenti eccezionali sia per intensità che per area coperta. Una suddivisione in classi a seconda del rapporto fra l'intensità del brillamento e quella del disco imperturbato è stata pure fatta da M. C. Ballario ⁽⁴⁾.

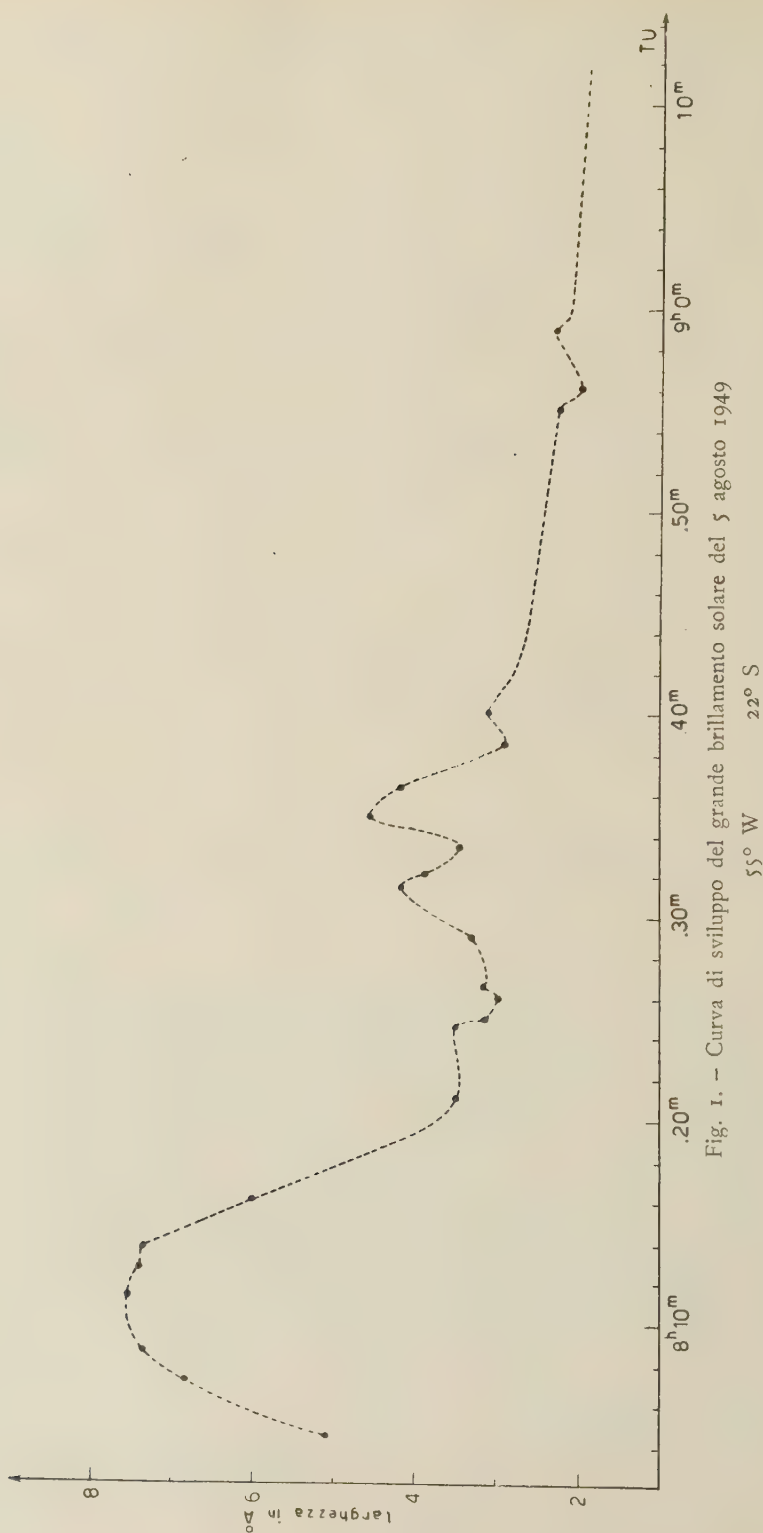
Lo spettroelioscopio dell'osservatorio di Arcetri è stato rimesso in funzione nell'aprile-maggio 1949 dopo un lungo periodo di inattività dovuto anche ai danni subiti dall'impianto durante la guerra. Nel secondo semestre del 1949 sono stati da me osservati con questo strumento 29 brillamenti solari dei quali 24 appartenevano alla classe 1. Un solo brillamento della classe 3 è stato osservato ⁽⁵⁾ e quattro della classe 2. Per ciascun brillamento quando è stato possibile si è determinato la larghezza della riga ad ogni minuto e nel periodo di rapida variazione di intensità anche ogni mezzo minuto. Con i dati ottenuti dall'osservazione si sono tracciate le *curve di sviluppo* del fenomeno che mostrano come varia la larghezza della riga col tempo. Tali curve hanno di solito una salita rapida fino ad un massimo ed una discesa lenta che può durare anche delle ore per i fenomeni più importanti. Tutti gli osservatori di brillamenti usano dare una curva media che rappresenta l'andamento generale del fenomeno e considerano lo scarto dei punti da questa curva come dovuto a cause puramente accidentali.

(2) « M. N. », 102, 11 (1942).

(3) *Character Figures of Solar Phenomena*. « Quarterly bulletin on Solar Activity. Int. Astr. Union. ». Eidgen. Sternwarte Zurich.

(4) « Memorie Soc. Astr. Italiana », vol. XIX, 235 (1948) e « Oss. Mem. Arcetri », fasc. 65, p. 29.

(5) « The Observatory », 69, 228 (1949).



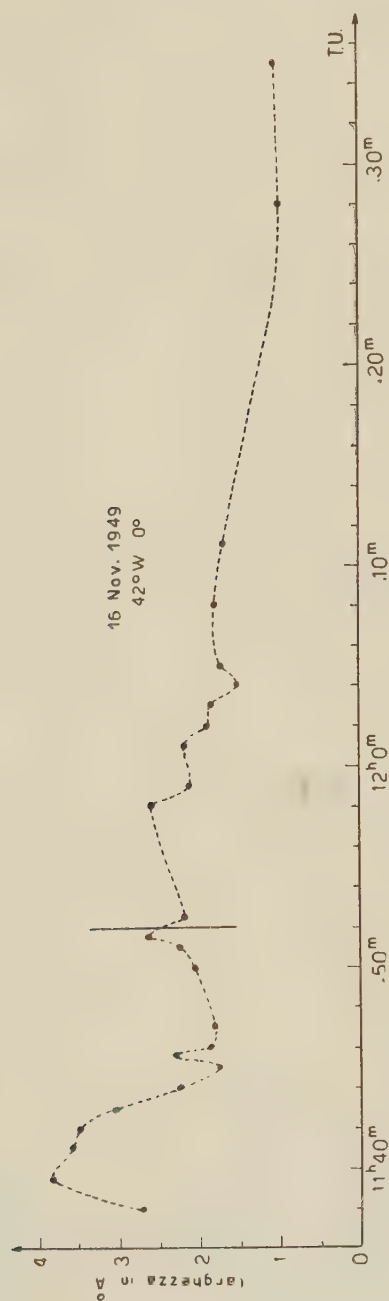


Fig. 2.

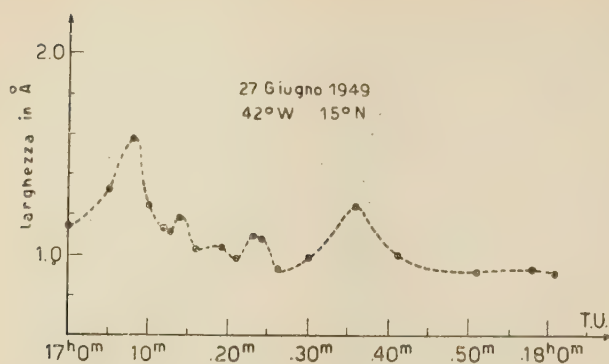


Fig. 3.

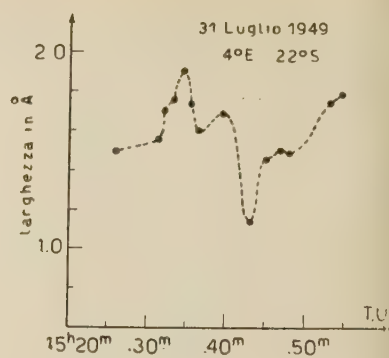


Fig. 6.

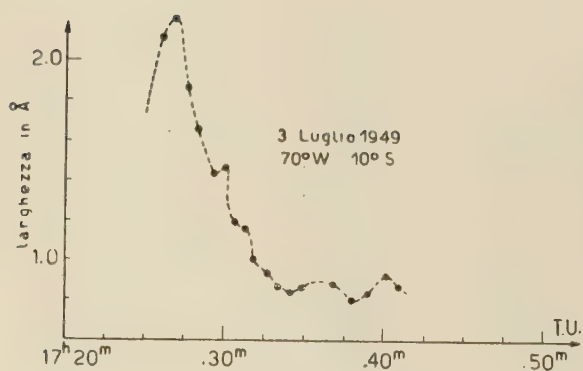


Fig. 4.

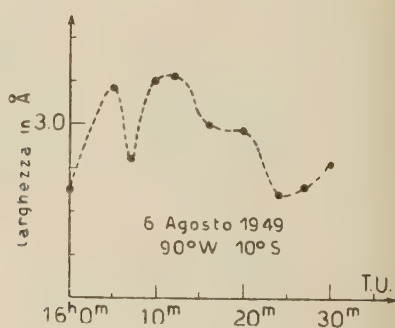


Fig. 7.

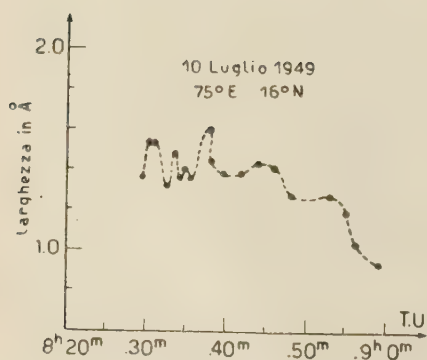


Fig. 5.

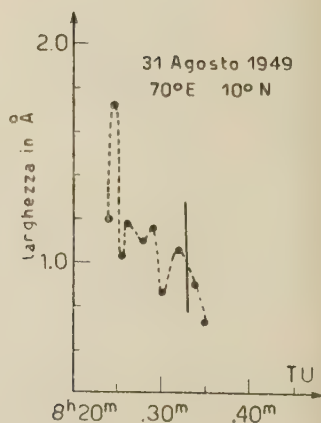


Fig. 8.

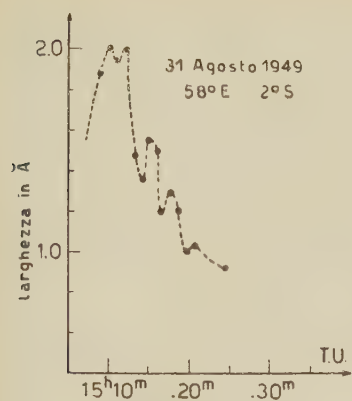


Fig. 9.

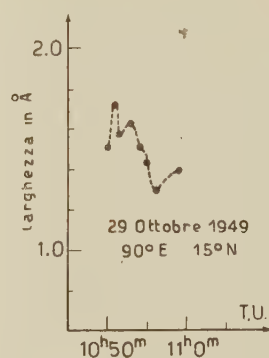


Fig. 11.

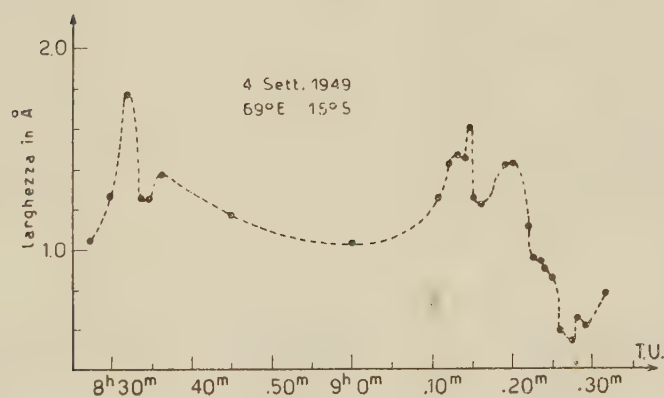


Fig. 10.

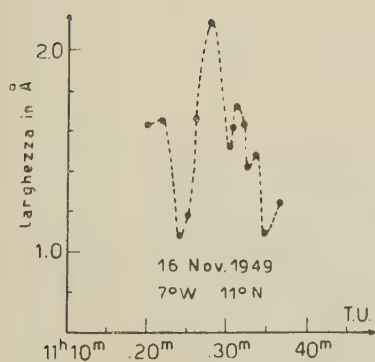


Fig. 12.

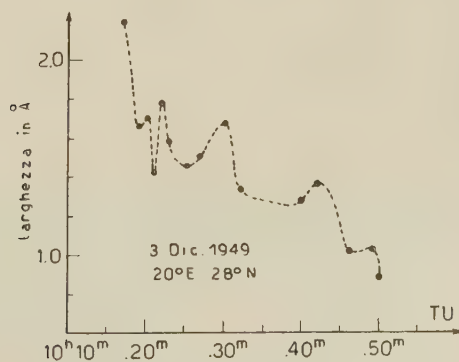


Fig. 13.

In realtà la misura della larghezza della riga fatta allo spettroelioscopio è assai precisa e, ciò che più conta, indipendente dalle condizioni atmosferiche e dalla definizione dell'immagine. L'errore che si può commettere in una singola lettura è al massimo $\pm 0.04 \text{ \AA}$; tale errore dedotto dall'esame delle mie misure concorda con quello dato da Ellison⁽²⁾ e Giovanelli⁽⁶⁾. Poichè la larghezza della riga è determinata dalla differenza di due letture il suo errore sarà $\varepsilon_1 = \pm 0.06 \text{ \AA}$. Gli scarti che si notano fra i punti osservati e la curva media nelle curve di sviluppo dei brillamenti sono assai superiori a questo limite; essi sono particolarmente evidenti nelle curve di sviluppo dei deboli brillamenti.

Considerato che questi scarti sono notevolmente superiori all'errore di misura e che essi si presentano nella maggior parte dei brillamenti *si conclude che essi sono reali e riflettono le fluttuazioni irregolari di intensità del fenomeno*. È naturale inoltre che nei brillamenti più piccoli tali fluttuazioni siano più evidenti perchè essendovi in gioco delle masse gassose di piccola entità, relativamente alla scala dei fenomeni solari, queste seguono immediatamente le variazioni energetiche della causa prima del fenomeno.

Le figure da 1 a 13 mostrano alcune curve di sviluppo tipiche dei brillamenti osservati. In ascisse abbiamo riportato l'ora di osservazione in T. U., in ordinate la larghezza della riga in Angstrom. I dischetti neri sui grafici indicano i punti sperimentali. In ogni curva è data la posizione del brillamento e la data di osservazione; la linea verticale nera segnata su qualche grafico indica l'istante della prima osservazione di un filamento eruttivo in assorbimento che spesso accompagna il brillamento.

Geodesia. — *Sviluppi di Legendre generalizzati per una curva qualunque tracciata su di una superficie pure qualunque*. Nota di ANTONIO MARUSSI, presentata^(*) dal Socio G. CASSINIS.

1. Vengono chiamati in Geodesia sviluppi di Legendre od anche formule di Delambre le serie di potenze dell'arco s di una geodetica tracciata sull'ellissoide di rotazione, che consentono di determinare le coordinate geografiche φ_1 e λ_1 (latitudine e longitudine) dell'estremo P_1 della geodetica di lunghezza finita s , e l'azimut α_1 di essa in P_1 , note che siano le coordinate geografiche φ_0 e λ_0 dell'altro suo estremo P_0 , e noto l'azimut α_0 di essa nello stesso punto.

Tali sviluppi sono stati generalizzati in varia forma da alcuni Autori, che hanno cercato di liberarli dal vincolo che la curva di trasporto debba essere una geodetica, oppure dal vincolo che la superficie debba essere quella di un ellissoide; non risulta tuttavia che il problema della massima generalizzazione possibile, che consiste ovviamente nello studiare i ricordati sviluppi di Legendre per una qua-

(6) « Ap. J. », 91, 334 (1940).

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

lunque curva tracciata su di una superficie pure qualunque, sia stato fino ad ora affrontato.

Il Hristov ⁽¹⁾ ha considerato in particolare degli sviluppi in serie di potenze di un arco di geodetica tracciato su di una superficie qualunque, riferita però ad un sistema di coordinate isoterma-isometriche, che non possono avere nessuna semplice relazione con le coordinate geografiche, a meno che la superficie non sia di rotazione; in tali sviluppi non si prende poi in considerazione il problema del trasporto dell'azimut. Il Tonolo ⁽²⁾ invece ha considerato il caso di una curva qualunque tracciata però sull'ellissoide di rotazione, valendosi delle consuete coordinate geografiche; i suoi sviluppi rappresentano perciò una prima effettiva generalizzazione di quelli di Legendre, e non si limitano alle sole coordinate geografiche, investendo essi anche il trasporto dell'azimut. Dell'argomento si è occupato in seguito con due Note ^{(3), (4)} il Boaga, che trova le espressioni per il trasporto delle coordinate curvilinee lungo un arco di geodetica su di una superficie qualunque, coordinate che vengono poi identificate con le coordinate geografiche e con quelle isoterma-isometriche sulle superficie di rotazione.

Non è sembrato perciò privo di interesse riesaminare il problema, cercandone la soluzione più generale, e partendo sin dall'inizio dalla considerazione delle coordinate geografiche intrinseche su di una superficie qualunque, seguendo in ciò l'indirizzo tracciato da Pizzetti, da Reina, da Mineo ⁽⁵⁾, e da altri Geodeti. In tale ricerca si è tenuto conto anche di miei recenti studi ⁽⁶⁾, e si sono applicati i metodi del calcolo tensoriale, che conferiscono agilità e trasparenza alle formule, consentendo di scriverle nella maniera più sintetica senza limitarne in alcun modo la generalità. Gli sviluppi trovati interessano anche il trasporto dell'azimut astronomico lungo la curva assegnata, azimut che viene definito su di una superficie qualunque a mezzo della immagine sferica di questa.

2. Consideriamo una qualunque superficie regolare convessa Σ , che supporremo chiusa, ed una direzione fissa nello spazio che rappresenteremo con il versore ω ; e

(1) W. K. HRISTOV, *Berechnung der Koordinatendifferenzen und der Ordinatenkonvergenz aus der Länge und dem Richtungswinkel einer geodätischen Strecke für eine beliebige Fläche und ein beliebiges isothermes Koordinatensystem*. «Zeitschrift für Vermessungswesen», Bd. LXVI, Heft 6, März 1937, p. 171.

(2) A. TONOLO, *Trasporto delle coordinate geografiche e dell'azimut lungo un arco di linea qualunque di un ellissoide di rotazione*. «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei», vol. XXIX, ser. 6^a, 1^o sem., fasc. II, giugno 1939.

(3) G. BOAGA, *Il trasporto delle coordinate curvilinee lungo un arco di geodetica in alcuni casi particolari interessanti la Geodesia*. «Rend. R. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere», vol. LXXV, fasc. II, 1941-42.

(4) G. BOAGA, *Sul trasporto delle coordinate curvilinee lungo un arco di geodetica su di una superficie qualunque, con applicazioni al problema geodetico del trasporto delle coordinate geografiche*. «L'Universo», anno XXIII, n. 7, sett. 1942.

(5) C. MINEO, *Sulle superficie riferite ad un sistema geografico e sulla determinazione intrinseca del geode*. «Giornale di Battaglini», XLVIII, 1910.

(6) A. MARUSSI, *Fondements de géométrie différentielle absolue du champ potentiel terrestre*. Comunicazione presentata alla VIII Assemblea generale dell'Associazione Internazionale di Geodesia riunita ad Oslo nel 1948.

tracciamo sulla superficie stessa una doppia famiglia di linee coordinate che chiameremo $\varphi = \text{cost}$ e $\lambda = \text{cost}$ tali che: lungo le linee $\varphi = \text{cost}$ il versore \mathbf{n} normale alla superficie e rivolto verso la sua convessità, forma un angolo costante $90 - \varphi$ con il versore ω ; lungo le linee $\lambda = \text{cost}$ il versore \mathbf{n} si mantiene invece parallelo ad un piano fisso contenente ω , piano che forma a sua volta un angolo diedro di ampiezza λ (contato positivamente in senso antiorario da un osservatore disposto secondo ω) con un piano fisso (meridiano fondamentale) pure passante per ω e scelto del resto ad arbitrio.

Ciò posto, si dirà di aver riferito la superficie ad un sistema di coordinate geografiche φ e λ intrinseche, rispetto al versore ω (asse del mondo) ed al meridiano fondamentale prescelto.

Se per ragioni di comodità di scrittura poniamo $\varphi = y^1, \lambda = y^2$, e se indichiamo con g_{ij} il tensore metrico fondamentale della superficie, avremo in un punto P qualunque di Σ per la prima forma fondamentale

$$(1) \quad (\text{prima forma}) \quad dP \times dP = ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j$$

dove d'ora in avanti si intenderà che gli indici possono assumere i valori 1 e 2; e si intenderà pure effettuata la sommazione per tali valori, rispetto agli indici che in ciascun monomio figurano due volte, una in alto ed una in basso (indici muti).

Dalla definizione stessa delle coordinate geografiche sulla superficie considerata, si ha subito che il quadrato dell'elemento lineare della sua immagine sferica è dato dalla terza forma fondamentale

$$(2) \quad (\text{terza forma}) \quad d\mathbf{n} \times d\mathbf{n} = d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2.$$

Terremo presente anche la seconda forma fondamentale di Σ :

$$(3) \quad (\text{seconda forma}) \quad -d\mathbf{n} \times dP = D d\varphi^2 + 2 D' d\varphi d\lambda + D'' d\lambda^2$$

e ricorderemo che, per la particolare scelta fatta delle coordinate le quali, oltre a stabilire la metrica della superficie, ne determinano ad un tempo la direzione della normale rispetto allo spazio ambiente, i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale risultano legati dalle relazioni ⁽⁶⁾

$$(4) \quad g_{11} = D^2 + \frac{D'^2}{\cos^2 \varphi} \quad ; \quad g_{12} = g_{21} = D' \left(D + \frac{D''}{\cos^2 \varphi} \right) \quad ; \quad g_{22} = D'^2 + \frac{D''^2}{\cos^2 \varphi}.$$

Occorrerà poi considerare in ogni punto della superficie una terna ortogonale di versori $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ di cui \mathbf{i}_3 coincidente con \mathbf{n} , \mathbf{i}_1 ed \mathbf{i}_2 tangenziali (normali ad \mathbf{n}) ed il primo contenuto nel piano formato dai versori \mathbf{n} ed ω , in modo che esso formi con ω un angolo acuto, il secondo normale ai precedenti, così che la terna risulti destrorsa. Chiameremo inoltre azimut gli angoli sul piano $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ misurati nel senso che porta \mathbf{i}_1 su \mathbf{i}_2 (senso orario) contati a partire da \mathbf{i}_1 .

Se si indicano ora con \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 i vettori derivati del punto P rispetto alle coordinate geografiche, vettori che risultano ovviamente tangenziali,

$$(5) \quad \mathbf{v}_1 = P_{/1} = \frac{\partial P}{\partial \varphi} \quad ; \quad \mathbf{v}_2 = P_{/2} = \frac{\partial P}{\partial \lambda}$$

si hanno le relazioni ⁽⁶⁾

$$(6) \quad \begin{cases} \mathbf{v}_1 = -D \mathbf{i}_1 - \frac{D'}{\cos \varphi} \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{v}_2 = -D' \mathbf{i}_1 - \frac{D''}{\cos \varphi} \mathbf{i}_2. \end{cases}$$

3. Le condizioni di integrabilità della superficie Σ , dette anche equazioni di Mainardi-Codazzi, cui debbono soddisfare i coefficienti D , D' e D'' della seconda forma, si scrivono poi, come già ha mostrato il Mineo ⁽⁵⁾

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial D}{\partial \lambda} - \frac{\partial D'}{\partial \varphi} + D' \operatorname{tg} \varphi = 0 \\ \frac{\partial D''}{\partial \varphi} - \frac{\partial D'}{\partial \lambda} + D \sin \varphi \cos \varphi + D'' \operatorname{tg} \varphi = 0. \end{cases}$$

Accanto ai vettori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 converrà considerare ancora i vettori reciproci \mathbf{v}^1 e \mathbf{v}^2 , tali che

$$(8) \quad \mathbf{v}^i \times \mathbf{v}_j = \delta_j^i$$

dove δ_j^i è il simbolo di Kronecker, uguale all'unità per $i = j$, ed uguale allo zero per $i \neq j$. Si ha:

$$(9) \quad \begin{cases} \mathbf{v}^1 = -\frac{D''}{\Delta} \mathbf{i}_1 + \frac{D' \cos \varphi}{\Delta} \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{v}^2 = \frac{D'}{\Delta} \mathbf{i}_1 - \frac{D \cos \varphi}{\Delta} \mathbf{i}_2 \end{cases}$$

con $\Delta = DD'' - D'^2$.

Dato un vettore superficiale \mathbf{u} qualunque, scriveremo anche

$$(10) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \times \mathbf{v}_k = u_k & \mathbf{u} \times \mathbf{v}^k = u^k \\ \mathbf{u} = u_k \mathbf{v}^k & \mathbf{u} = u^k \mathbf{v}_k \end{cases}$$

e chiameremo le u_k componenti covarianti di \mathbf{u} , le u^k componenti controvarianti.

I simboli di Christoffel di seconda specie $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i = \frac{\partial^2 P}{\partial y^j \partial y^k} \times \mathbf{e}^i$ si scrivono poi (vedi note ⁽⁵⁾, ⁽⁶⁾)

$$(11) \quad \begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{\Delta} \left(D'' \frac{\partial D}{\partial \varphi} - 2 D' \frac{\partial D'}{\partial \varphi} + D' \frac{\partial D}{\partial \lambda} \right); \quad \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{\Delta} \left(D'' \frac{\partial D}{\partial \lambda} - D' \frac{\partial D''}{\partial \varphi} \right); \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{\Delta} \left(-D'' \frac{\partial D'}{\partial \varphi} + 2 D'' \frac{\partial D'}{\partial \lambda} - D' \frac{\partial D''}{\partial \lambda} \right) - \sin \varphi \cos \varphi; \\ \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{\Delta} \left(-D' \frac{\partial D}{\partial \varphi} + 2 D \frac{\partial D'}{\partial \lambda} - D \frac{\partial D}{\partial \lambda} \right); \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{\Delta} \left(D' \frac{\partial D''}{\partial \varphi} - 2 D' \frac{\partial D'}{\partial \lambda} + D \frac{\partial D''}{\partial \lambda} \right); \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\Delta} \left(D \frac{\partial D''}{\partial \varphi} - D' \frac{\partial D}{\partial \lambda} \right) + \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$$

Tutto ciò premesso, ci proponiamo di risolvere il problema di determinare il valore delle coordinate geografiche $y_{(1)}^i$ di un punto P_1 della superficie Σ , note le coordinate $y_{(0)}^i$ di un punto P_0 prefissato, e nota una curva σ di lunghezza finita s tracciata su Σ , di cui un estremo coincida con P_0 , e l'altro con P_1 ; e di determinare indi l'azimut astronomico α_1 della curva in P_1 , noto il suo azimut α_0 in P_0 . La curva sarà definita, oltre che dalla sua lunghezza s , dalla sua tangente \mathbf{t}_0 in P_0 , e dalla sua curvatura geodetica o tangenziale γ che supporremo data in funzione dell'arco.

Indicato allora con \mathbf{t} il versore tangente alla curva σ nel punto generico P , con \mathbf{b} il versore su Σ ad esso normale, in modo che il triedro $(\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n})$ legato alla curva ed alla superficie sia destrorso, reggono le formule di Frenet generalizzate:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = -\frac{1}{\rho_n} \mathbf{n} + \frac{1}{\rho_g} \mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{1}{\tau_g} \mathbf{n} - \frac{1}{\rho_g} \mathbf{t} \end{cases}$$

in cui $1/\rho_n$ rappresenta la curvatura normale, $1/\rho_g = \gamma$ la curvatura geodetica o tangenziale, ed $1/\tau_g$ la torsione geodetica di σ in P .

Indichiamo poi con λ^i e v^i rispettivamente le componenti controvarianti di \mathbf{t} e di \mathbf{b} :

$$(13) \quad \begin{cases} \lambda^i = \mathbf{t} \times \mathbf{v}^i = \frac{dy^i}{ds} & ; & v^i = \mathbf{b} \times \mathbf{v}^i; \\ \mathbf{t} = \lambda^i \mathbf{v}_i = \lambda^i \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y^i} & ; & \mathbf{b} = v^i \mathbf{v}_i = v^i \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y^i}; \end{cases}$$

derivando queste rispetto ad s , e moltiplicando nello stesso tempo scalarmente per \mathbf{v}^i , tenuto conto delle ricordate formule di Frenet, delle (8), delle (13) e della definizione data per i simboli di Christoffel di seconda specie, si ha subito

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{d\lambda^i}{ds} = \gamma v^i - \Gamma_{jh}^i \lambda^j \lambda^h \\ \frac{dv^i}{ds} = -\gamma \lambda^i - \Gamma_{jh}^i v^j \lambda^h. \end{cases}$$

Sono queste le equazioni differenziali della curva σ considerata, con riferimento alle coordinate prescelte; tali equazioni si trovano anche in una Nota del Tonolo (7).

5. Dopo ciò, il problema proposto può essere facilmente risoluto a mezzo di sviluppi in serie del tutto analoghi a quelli di Legendre per l'ellissoide, scrivendo

$$(15) \quad y^i = y_{(0)}^i + s \lambda_{(0)}^i + \frac{s^2}{2!} \left(\frac{d\lambda^i}{ds} \right)_0 + \frac{s^3}{3!} \left(\frac{d^2 \lambda^i}{ds^2} \right)_0 + \frac{s^4}{4!} \left(\frac{d^3 \lambda^i}{ds^3} \right)_0 + \dots$$

dove non rimane altro che determinare le espressioni delle derivate successive delle λ^i rispetto ad s , calcolandone poi i valori per il punto P_0 .

(7) A. TONOLO, *Sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati*. «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei», vol. XXIX, ser. 6, 1° sem., fasc. 10, maggio 1939.

Si ha, con calcolo piuttosto complicato ma privo di difficoltà, tenuto conto delle (14)

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \lambda^i}{ds^2} &= \frac{d\gamma}{ds} v^i - \gamma^2 \lambda^i - 3 \gamma \Gamma_{jh}^i v^j \lambda^h + \left(2 \Gamma_{hr}^i \Gamma_{jk}^r - \frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial y^k} \right) \lambda^j \lambda^h \lambda^k; \\ \frac{d^3 \lambda^i}{ds^3} &= \frac{d^2 \gamma}{ds^2} v^i - \frac{d\gamma}{ds} (3 \gamma \lambda^i + 4 \Gamma_{jh}^i v^j \lambda^h) - \gamma^3 v^i + \gamma^2 \Gamma_{jh}^i (4 \lambda^j \lambda^h - 3 v^j v^h) + \\ &+ \gamma \left\{ \Gamma_{hr}^i \Gamma_{jk}^r (7 v^j \lambda^h + 5 v^h \lambda^j) - \frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial y^k} (5 v^j \lambda^h + \lambda^j v^h) \right\} \lambda^k + \left(2 \Gamma_{hr}^i \frac{\partial \Gamma_{jk}^r}{\partial y^k} + \right. \\ &+ 4 \Gamma_{jh}^r \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial y^k} + \Gamma_{jh}^r \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial y^r} - \frac{\partial^2 \Gamma_{jh}^i}{\partial y^k \partial y^l} - 4 \Gamma_{hr}^i \Gamma_{ks}^r \Gamma_{jh}^s - 2 \Gamma_{rs}^i \Gamma_{hk}^r \Gamma_{jl}^s \left. \right) \lambda^j \lambda^h \lambda^k \lambda^l. \end{aligned} \right.$$

Il calcolo delle derivate successive si complica naturalmente molto; i termini scritti consentono tuttavia già una elevatissima precisione; nel caso dell'ellissoide terrestre infatti l'arresto della serie ai termini scritti garantisce, per geodetiche non più lunghe di 100 km, il millesimo di secondo d'arco; ed il centesimo di secondo d'arco per lunghezze non superiori a 150 km. Quando la curva data è una geodetica, si annullano ovviamente nelle (14) e (16) tutti i termini che hanno a fattore γ o sue derivate. È poi appena necessario osservare che le espressioni (13), (14) e (16) sono valide qualunque siano le coordinate curvilinee prescelte su Σ .

Se la curva σ è definita in P_0 dal suo azimut astronomico α_0 , si ha

$$(17) \quad \begin{cases} \mathbf{t}_0 = \mathbf{i}_1 \cos \alpha_0 + \mathbf{i}_2 \sin \alpha_0 \\ \mathbf{b}_0 = -\mathbf{i}_1 \sin \alpha_0 + \mathbf{i}_2 \cos \alpha_0 \end{cases}$$

e quindi

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_{(0)}^1 &= \mathbf{t}_0 \times \mathbf{v}_{(0)}^1 = -\frac{D' \cos \alpha_0}{\Delta} + \frac{D' \cos \varphi_0 \sin \alpha_0}{\Delta} \\ \lambda_{(0)}^2 &= \mathbf{t}_0 \times \mathbf{v}_{(0)}^2 = \frac{D' \cos \alpha_0}{\Delta} - \frac{D \cos \varphi_0 \sin \alpha_0}{\Delta} \\ \nu_{(0)}^1 &= \mathbf{b}_0 \times \mathbf{v}_{(0)}^1 = \frac{D' \sin \alpha_0}{\Delta} + \frac{D' \cos \varphi_0 \cos \alpha_0}{\Delta} \\ \nu_{(0)}^2 &= \mathbf{b}_0 \times \mathbf{v}_{(0)}^2 = -\frac{D' \sin \alpha_0}{\Delta} - \frac{D \cos \varphi_0 \cos \alpha_0}{\Delta} \end{aligned} \right.$$

dove ben si intende anche i valori di D , D' , D'' e Δ sono calcolati per il punto P_0 .

6. Quanto al trasporto dell'azimut astronomico α lungo σ , basta riflettere che l'azimut stesso è fornito in un punto P generico dalle relazioni

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha &= \mathbf{t} \times \mathbf{i}_1 = \lambda^k \mathbf{v}_k \times \mathbf{i}_1 = -D \lambda^1 - D' \lambda^2 \\ \sin \alpha &= \mathbf{t} \times \mathbf{i}_2 = \lambda^k \mathbf{v}_k \times \mathbf{i}_2 = -\frac{D' \lambda^1 + D'' \lambda^2}{\cos \varphi} \end{aligned} \right.$$

e che le λ^k si trasportano lungo σ mediante gli sviluppi in serie

$$(20) \quad \lambda_{(r)}^k = \lambda_{(0)}^k + s \left(\frac{d\lambda^k}{ds} \right)_0 + \frac{s^2}{2!} \left(\frac{d^2 \lambda^k}{ds^2} \right)_0 + \frac{s^3}{3!} \left(\frac{d^3 \lambda^k}{ds^3} \right)_0 + \dots$$

i cui coefficienti sono quelli già calcolati. Ottenuti dunque con questi i valori $\lambda_{(1)}^k$ in P_1 , e noti in tale punto i valori di D , D' e D'' , il calcolo dell'azimut α_1 reciproco di α_0 dalle (19) è immediato.

Si è in tal modo risolto pienamente il problema proposto in principio.

Geofisica. — *Indizi di corrispondenze tra fenomeni geofisici e moto polare.* Nota I di TITO NICOLINI, presentata (*) dal Socio L. CARNERA.

1. In due Note precedenti⁽¹⁾ sono state rilevate epoche di perturbazioni e discontinuità del moto polare e corrispondenze indubbie con perturbazioni della rotazione terrestre; nei punti più notevoli sono state anche rilevate corrispondenze con varie perturbazioni geofisiche, per le quali si rinvia al Contributo 9 citato alla nota⁽¹⁾. Altri interessanti rilievi sono dovuti al prof. M. Bossolasco⁽²⁾, particolarmente con l'esame dei valori della pressione atmosferica a Genova.

Queste corrispondenze meritano di essere ricercate e seguite a lungo, e sembrano d'altronde naturali. Perturbazioni estese meteorologiche o geofisiche non sono certo generate dai piccoli moti dell'asse nella massa terrestre, ma deve aversi precisamente la dipendenza inversa: i piccoli spostamenti e perturbazioni assiali dell'immenso giroscopio terrestre sono indici di considerevoli ed estese azioni a cui è soggetta la massa terrestre ed atmosferica.

I dati di cui si dispone per la ricerca sono più spesso serie locali di elementi, lontane da quella estensione e perfezione organizzativa che potrà aversi in avvenire. Tuttavia indizi di corrispondenze appaiono già in vari casi decisamente convincenti, e se anche a volte si può essere indotti a conclusioni singole illusorie ed erronee, è certo che riunendo ed esaminando serie sempre più ampie e lunghe di elementi, le vere correlazioni dovranno in fine emergere.

Non disponendo di serie di dati bene appropriate, vengono usate in questa ricerca quelle occasionalmente rintracciate, e per tutte vengono forniti i risultati, siano favorevoli o meno all'ipotesi di variazioni in corrispondenza al moto polare.

Nella Tabella I e nella fig. 1 vengono riportate le seguenti serie di dati:

1° Perturbazioni del moto polare secondo i Contributi 9 e 10 citati alla nota⁽¹⁾; nella figura è stata data altezza 1 in corrispondenza alle date con rilievi semplici, 2 con rilievi multipli, 3 ai rilievi molto vistosi.

2° Perturbazioni della rotazione terrestre, secondo il Contributo 9 e la bibliografia ivi citata; le altezze 1, 2, 3 nel grafico, corrispondono qui, come appresso, alle minori o maggiori intensità o frequenze degli elementi considerati.

3° Terremoti molto violenti a Formosa, di gradi 9 o 10, catalogati da P. M. Saderra Masó⁽³⁾.

4° e 5° Massimi delle distribuzioni di frequenze triennali di terremoti rispettivamente in Inghilterra e Canada riportate dal Brown⁽⁴⁾.

6° Anni di massimi delle frequenze di microsismi al Parc St. Maur, da una ricerca di P. Bernard⁽⁵⁾.

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1950.

(1) Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. V (1948) e vol. VI (1949); o « Contr. Astron. Capodimonte », ser. II, vol. III, n. 9, p. 322, e n. 10, p. 335.

(2) « Geof. pura ed applic. », vol. XIV, fasc. 3-4 (1949).

(3) *Catalogue of violent and destructive Earthquakes in the Philippines*. Weather Bureau, Manila Central Observatory, 1910.

(4) « Trans. Observ. Yale », vol. III, parte 6.

(5) « Ann. Inst. Phys. du globe de l'Univers. Paris », t. 19, 1941.

7° Idem ad Uppsala, da una ricerca di M. Båth ⁽⁶⁾.

8° Anni di massimi delle frequenze di eruzioni vulcaniche conteggiate sul Cap. 7° di « Vulcani attivi della Terra », di Mercalli. (Milano, Hoepli 1907).

Un esame attento della figura mostra corrispondenze ma non in linea del tutto generale; ciò è da presumere *a priori*, poichè le serie locali geofisiche non sono in genere rappresentative; così le serie sismiche sono più spesso rilevate in base ai danni prodotti in centri abitati, e questo criterio può alterare del tutto la stima della loro reale importanza geofisica. Ma varie corrispondenze sono nette ed indubbie, anche se il rilievo non è contemporaneo con esattezza; si osservino per esempio quelle intorno alle date 1843, 1853, 1863, 1898, 1909, 1922, tenendo anche conto che le perturbazioni del moto polare e della rotazione terrestre non sono rilevabili con grande esattezza di epoca. Si osservano anche corrispondenze a gruppi; e ciò può significare che le perturbazioni rilevanti sono costituite di fenomeni successivi ed assestamenti concatenati, anzichè di fenomeni locali ed istantanei. Perturbazioni geofisiche estese nello spazio e in durata e perturbazioni del moto polare appaiono dunque con buona evidenza concatenate causalmente; e se si tiene conto delle difficoltà di avere materiale rappresentativo ed appropriato, si può dire che il grado di evidenza risultante dalla figura suggerisce l'opportunità di riunire con cura masse di dati, e di esprimere fenomeni quali la sismicità ed anche il vulcanismo generali del globo, con numeri indici rappresentativi.

2. Ora si vuole ricercare se v'è qualche indizio di corrispondenza tra fenomeni geofisici o meteorologici e ciclo di Chandler; questa ricerca è pienamente giustificata dalla stessa ragione detta al principio della Nota, e può mettere a prova l'ipotesi che il ciclo di Chandler abbia relazione con pulsazioni meteorologiche.

Le date di riferimento per le suddivisioni degli intervalli in corrispondenza al ciclo di Chandler, sono date al Contributo n. 10, p. 331; in base ad esse, il procedimento adottato è di disporre tutti i valori medi mensili dei dati da esaminare in tabelle di 14 colonne, corrispondenti a successive fasi del ciclo, per poi passare alle somme ed alle medie. Naturalmente per la eliminazione di termini a carattere annuale (o analogamente per altri eventuali), l'intervallo totale considerato deve comprendere più perfettamente possibile (specialmente se esso è breve) un numero intero di cicli di Chandler e di anni. Va sempre inteso che quando questa condizione non è soddisfatta, occorre tenerne conto nella valutazione dei risultati.

Anzitutto vediamo, per confronto, serie di dati il cui andamento non deve *a priori* aver relazione col ciclo di Chandler, per esempio la serie dei numeri di Wolf (indici di attività solare ⁽⁷⁾).

Usiamo due intervalli per confronto; il primo da aprile 1889 a settembre 1923 (estremi inclusi, ciò che si intenderà per tutti gli intervalli appresso riferiti), il secondo da ottobre 1923 a dicembre 1947. I risultati sono mostrati alla Tabella II e alla fig. 2.

Un'altra serie di dati per cui si può prevedere assenza di variazione regolare, è la serie di valori mensili della costante solare di Abbot, dalle osservazioni

(6) « Uppsala Meddel. », (Meteor. Inst.), n. 14, 1949.

(7) « Astron. Mitteil. », n. 145, Zurich 1945.

della Stazione di Montezuma⁽⁸⁾. La colonna 2 della Tabella II dà appunto le medie della costante in corrispondenza al ciclo di 14 mesi (circa). Come per tutte le colonne della Tabella II, la prima riga riporta le medie dei mesi corrispondenti al passaggio del moto polare di Chandler per il meridiano $+X$, cioè le date del Contributo n. 10, p. 331.

È evidente che la radiazione solare non abbia a che vedere col ciclo Chandleriano; ma le serie di misure sono alterate dagli effetti dell'assorbimento atmosferico, che potrebbe avere qualche relazione con detto ciclo.

Come è evidente dalla figura, i diagrammi 1 e 2 mostrano chiaramente la prevista assenza di relazione col ciclo di Chandler, ma il diagramma 1' mostra un andamento sistematico con grande evidenza. Se invece dell'intervallo da ottobre 1923 a dicembre 1947 si usa quello da ottobre 1923 a giugno 1944 (due cicli esatti d'attività solare), risulta un andamento quasi identico, quindi esso non è dovuto all'uso di un numero di cicli non intero (la stessa cosa si verifica per la costante solare). L'interessante anomalia merita un particolare esame dettagliato, ma riportiamo senz'altro il risultato.

Ogni punto del grafico è la media di una colonna di valori mensili nello schema di calcolo numerico, diversi sia a causa della variazione undecennale (o di altre eventuali minori sistematiche), sia a causa di scarti accidentali. Se dai valori mensili si detraggono le medie annuali corrispondenti ci si approssima agli scarti accidentali (più altri piccoli eventuali come detto; scarti a periodo di 14 mesi sono però identici per una stessa colonna); lo scarto medio corrispondente ad un punto del grafico (cioè ad una media di 21 mesi aventi la stessa fase nel ciclo di Chandler) risulta di poco superiore a due unità nella scala dei numeri di Wolf; lo scarto medio o dispersione dei punti del grafico rispetto alla orizzontale è invece circa 5 unità, ed inoltre i segni di questi scarti non procedono a caso, ma in modo nettamente sistematico. Quindi da questo punto di vista l'andamento dei punti rispetto al ciclo di Chandler appare nettamente significativo.

Ma v'è anche un fatto alquanto nascosto che influisce in modo decisivo sul risultato. Osservando bene il grafico del riferimento⁽⁷⁾, o più chiaramente calcolando le medie trimestrali dei numeri di Wolf nell'intervallo in discussione, si riscontra una oscillazione abbastanza vistosa, a ciclo $1/9$ del solare cioè anni 1.22 circa. Questa oscillazione non va considerata come una periodicità regolare, né è sicura dovunque, ma è certo una caratteristica che salta immediatamente all'occhio dopo la variazione undecennale. Essa si vede subito dalla fig. 3, costruita appunto coi valori medi trimestrali dei numeri di Wolf (deducibili facilmente dal riferimento⁽⁷⁾, e non riprodotti qui), mentre la tratteggiata passa pei valori medi annuali, e i tratti verticali corrispondono alle date del Contributo n. 10, p. 331. Nelle analisi dei numeri di Wolf questa oscillazione dovrebbe figurare, almeno per l'intervallo qui discusso, ed un accenno ne fu suggerito da D. Alter⁽⁹⁾. Nello stesso intervallo il ciclo di Chandler è in media di anni 1.14. La prossimità di questi due cicli, insieme a caratteristiche locali dell'andamento del ciclo solare, per cui sarà suffi-

(8) «Smithson. Miscell. Coll.», vol. 111, n. 7, (1949).

(9) «Mo. Wea. Rev.», vol. 49, p. 74, (1921).

ciente osservare bene la fig. 3, generano l'apparente relazione dei numeri di Wolf col ciclo di Chandler.

Il risultato è anche utile a ricordare in ogni caso la distinzione tra relazioni apparenti e relazioni reali; ad ogni modo, evitando con prudenza false interpretazioni di risultati numerici, anche le prime possono far rintracciare caratteristiche interessanti dei fenomeni studiati.

Passiamo ora ad alcune prove numeriche eseguite su elementi geofisici e meteorologici, avvertendo che è mancata la possibilità sia di scegliere serie di dati particolarmente convenienti, sia di analizzare i disponibili con tutta la mole di lavoro richiesta dai metodi periodali.

3. LIVELLO DEL LAGO VICTORIA. — L'andamento dei livelli mensili di questo lago, e di altri, ha richiamata l'attenzione principalmente per il suo parallelismo all'andamento dell'attività solare per oltre due cicli, fino al 1923⁽¹⁰⁾. Nel precedente Contributo di questa serie⁽¹¹⁾ fu rilevata una oscillazione connessa al ciclo di Chandler; ma quanto alla significanza del risultato numerico, lo scrivente si affidò ad un paio di prove di controllo ivi descritte e non sufficienti alla certezza statistica. A causa dei dubbi rimasti, si sono utilizzati in seguito i valori mensili successivi dei livelli del lago, fino al 1945, forniti dalla cortesia del Direttore del Meteorological Office, Air Ministry di Londra. L'ampia oscillazione parallela all'attività solare cade dopo il 1925 facendo restare perplessi sul significato della antecedente correlazione, e cade anche del tutto la oscillazione connessa al ciclo di Chandler.

Nella fig. 4 sono riportati: l'andamento dei livelli medi annuali del lago (rispetto alla linea di riferimento) confrontato con l'andamento dei numeri di Wolf annuali; e gli andamenti medi nel ciclo di Chandler dei livelli mensili; nella Tabella II questi ultimi andamenti sono riportati alle colonne 3 e 3'.

Il risultato dei nuovi dati scuote assai quello del Contributo precedente, ed in entrambi i casi sembra trattarsi semplicemente di risultati numerici e non di correlazione al ciclo di Chandler. Non sembra valer la pena ricercare se v'è anche qui una pulsazione prossima a 14 mesi. Si noti ad ogni modo che il diagramma 3, sfasato rispetto al corrispondente del Contributo precedente (del quale è la colonna 7 che corrisponde alla prima di qui) è calcolato più accuratamente in corrispondenza al ciclo di Chandler, ed ha inoltre per epoca limite il 1923, che si è dimostrata di qualche importanza geofisica.

TEMPERATURA DELLE ACQUE DEL MISSISSIPPI A NEW ORLEANS⁽¹²⁾. — Il risultato del calcolo numerico è indicato alla colonna 4, Tabella II. Esso sembra nettamente affermativo, i valori iniziali e finali del ciclo essendo sistematicamente superiori agli intermedi; tuttavia anche qui la relazione cade, ed è bene vederne la ragione, che si riscontra in tanti casi analoghi, in cui sono state concluse

(10) London, Air Ministry, Met. Office. « Geoph. Mem. », n. 20, 1923; V. anche « Quart. Journ. Roy. Met. Soc. », apr. 1930; e « Mo. Wea. Rev. », march 1924.

(11) « Contr. Geof. Capodimonte », Serie II n. 9.

(12) « Mo. Wea. Rev. », vol. 67 p. 415 (1939, A. A. Hirsch).

relazioni illusorie. Nel caso dei numeri di Wolf, 1923-47, la relazione illusoria era dovuta ad una causa fisica notevole, la presenza di una oscillazione prossima al periodo di Chandler; qui invece si tratta di vere e proprie deviazioni sistematiche dovute allo schema di calcolo numerico. Nelle 14 colonne di questo schema sono riportate le temperature medie mensili, ed avviene che per disporre i dati in queste 14 fasi del ciclo, non tutte le colonne vengono ad avere rappresentati gli stessi mesi in egual numero; ciò è inevitabile perchè il ciclo di Chandler non è di 14 mesi esatti, e per eliminare la difficoltà (che è sufficiente da sola a dare relazioni illusorie), conviene eliminare prima la variazione annuale (cioè dalle

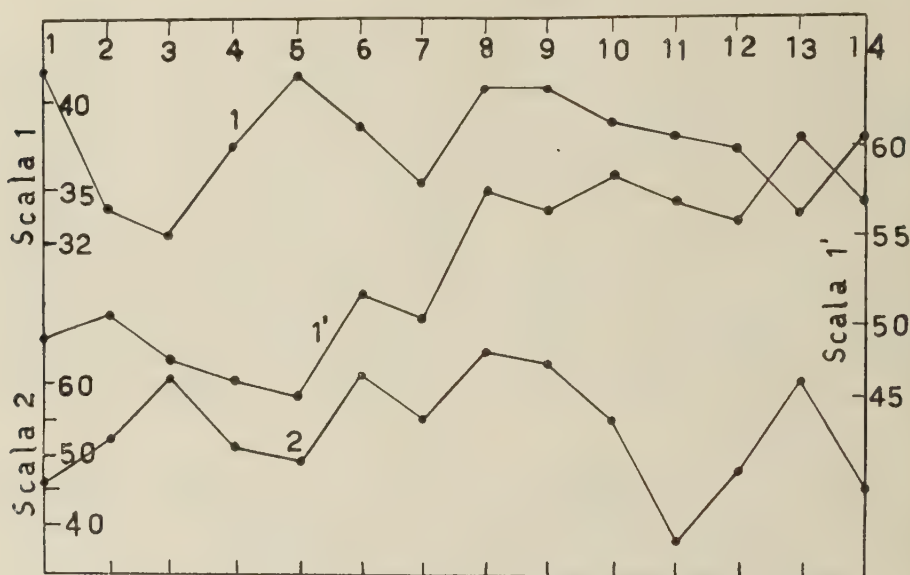


Fig. 2. - Andamento medio dei numeri di Wolf e della costante solare nel ciclo di Chandler: colonne 1, 1' e 2 della Tabella II (nella scala della costante solare, i valori vanno preceduti da 1.94).

singole medie mensili sottrarre le medie mensili di tutto l'intervallo, e poi disporre lo schema numerico). Nel caso attuale questa precauzione conduce ai risultati della colonna 4', nella quale ogni andamento sistematico sembra scomparso. Esaminando un po' più accuratamente questi risultati, calcolandone le medie smussate di tre in tre valori, resta una traccia di andamento regolare, ma questa regolarità appare di effimera significanza, e la possibilità di anomalie stagionali fa propendere per una conclusione negativa.

È sempre da tener presente che i fenomeni oscillatori in natura hanno generalmente carattere più o meno irregolare, ed a causa delle irregolarità l'interpretazione di risultati numerici da essi dedotti importa sempre un notevole rischio. Per questa ragione l'analisi numerica delle serie oscillatorie, raramente assoggettata a critica rigorosa, costituisce una delle più frequenti cause di conclusioni erranee od illusorie nella letteratura scientifica.

TABELLA I. — *Confronto di date di perturbazioni del moto polare, della rotazione terrestre e di particolari rilievi geofisici.*

1	2	3	4	5	6	7	8
1841	1841	1840	1838-40, 41-43				1844
49			44-46, 47-49				48
53	51	52		1856-58			55
63	63	63					64
69		69, 71	68-70, 71-73	68-70			67, 68
77	76	79, 80, 81					
84		85, 87	86-88	83-85, 86-88			84, 85, 86
90	90, 92	92, 93	89-91	89-91			92, 93
95			92-94	92-94			
99	98	97		95-97, 98-1900			
							1902-3
		1902	1901-3, 4-6	1901-3			
1908	1908	7	7-9, 10-12		1911	1907, 11, 14	
16	16					17	
19							
21					20	20	
23	23					23	
26					25	25	
28					28, 30		
34	32				33, 35	32, 34	
38							
39						40	
42						43	
47						45, 48	

Colonna 1: Perturbazioni del moto polare. — 2: Perturbazioni della rotazione terrestre. — 3: Terremoti disastrosi a Formosa. — 4 e 5: Massime frequenze triennali di terremoti Inglesi e Canadesi. — 6: Massime frequenze di microsismi al Parc St. Maur. — 7: Idem ad Uppsala. — 8: Grandi frequenze di eruzioni vulcaniche da compilazioni di Mercalli.

TABELLA II. — *Medie di dati mensili disposti in corrispondenza di 14 fasi del ciclo di Chandler (circa 14 mesi); la fase o mese 1 corrisponde al passaggio della componente di Chandler pel meridiano + X.*

Dati Mesi	1	1'	2	3	3'	4	4'
1	41.6	49.1	1.94466	6.25	7.31	66.6	— 0.38
2	33.9	50.5	523	6.12	7.97	65.8	— 1.00
3	32.3	47.9	608	6.84	8.21	66.5	+ 0.05
4	37.3	46.9	514	7.36	8.33	66.3	+ .33
5	41.3	45.9	481	7.75	8.21	65.3	— .19
6	38.5	51.7	615	7.26	6.68	65.8	+ .52
7	35.2	50.2	549	7.26	6.26	64.9	— .24
8	40.5	57.4	640	6.18	5.63	64.5	— .38
9	40.5	56.4	625	7.07	5.28	65.5	+ .81
10	38.7	58.5	547	7.33	6.12	64.5	— .43
11	37.9	57.0	373	7.15	5.76	65.4	— .10
12	37.1	55.9	472	6.55	6.68	61.2	+ .05
13	33.5	60.7	599	6.55	7.21	67.0	+ .24
14	37.8	57.0	443	6.18	7.49	66.8	— 0.62

Colonna 1: Numeri di Wolf, aprile 1889 a settembre 1923. — 1': Idem, ottobre 1923 a dicembre 1947. — 2: Costante solare, Montezuma, ottobre 1923 a dicembre 1947. — 3: Livelli del lago Victoria, luglio 1901 a dicembre 1922 — 3': Idem, gennaio 1923 a novembre 1944. — 4: Temperature del Mississippi a New Orleans, gennaio 1925 a dicembre 1938, in °F. — 4': Idem, andamento dei residui, valori mensili singoli meno medie mensili di tutto l'intervallo.

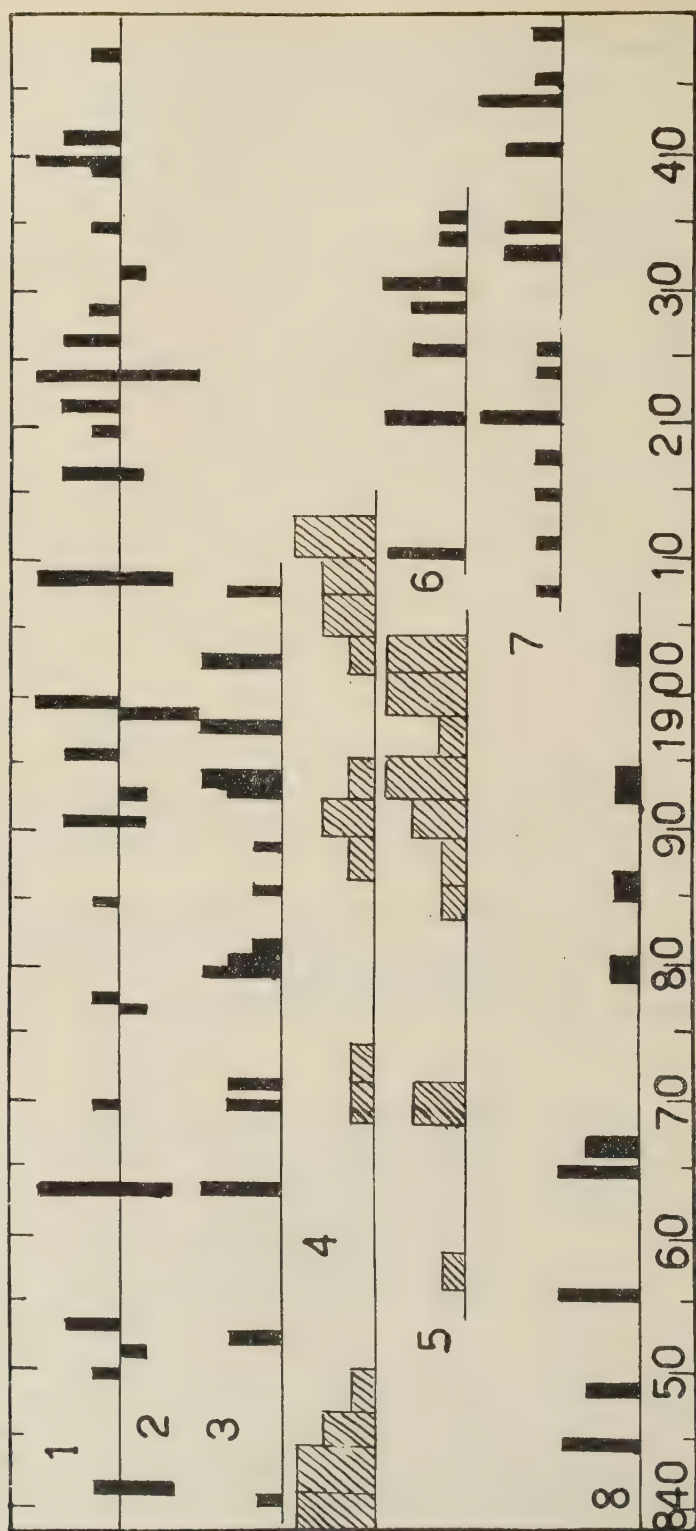


Fig. 1. - Perturbazioni della rotazione terrestre, fenomeni sismici e vulcanismo, in corrispondenza alle perturbazioni del moto polare.

1, perturbazioni del moto polare; 2, perturbazioni della rotazione terrestre; 3, terremoti violenti a Formosa; 4 e 5, frequenze triennali di terremoti Inglesi e Canadesi; 6 e 7, agitazioni microsismiche al Parc St. Maur e ad Uppsala; 8, frequenze generali di eruzioni vulcaniche conteggiate sul Cap. VII del volume di Mercalli.

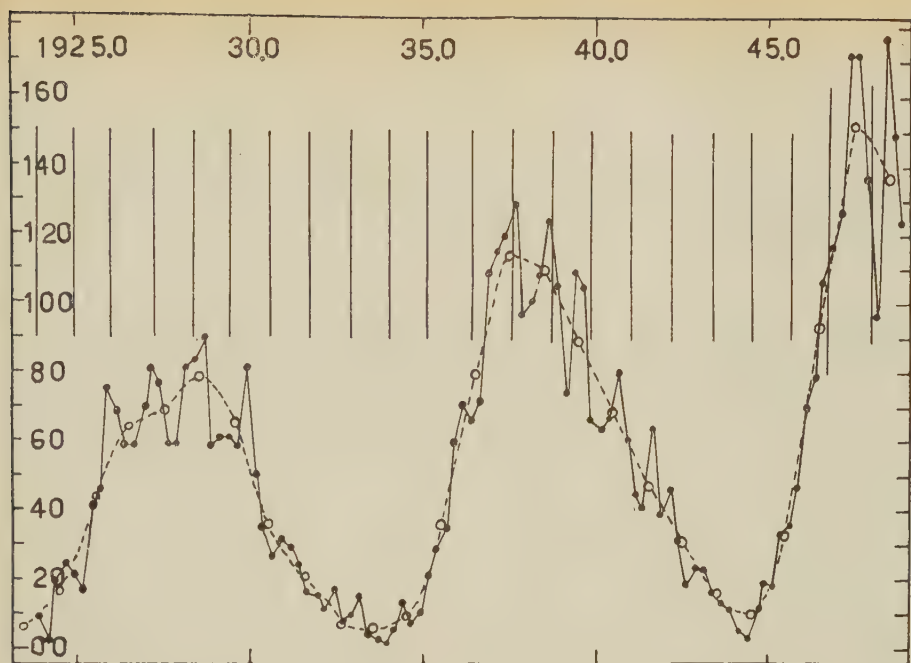


Fig. 3. - Andamento delle medie trimestrali (cerchietti pieni) ed annuali (cerchietti vuoti) dei numeri di Wolf nell'intervallo 1923-49. I tratti verticali corrispondono alle date di riferimento del ciclo di Chandler, come detto nel testo.

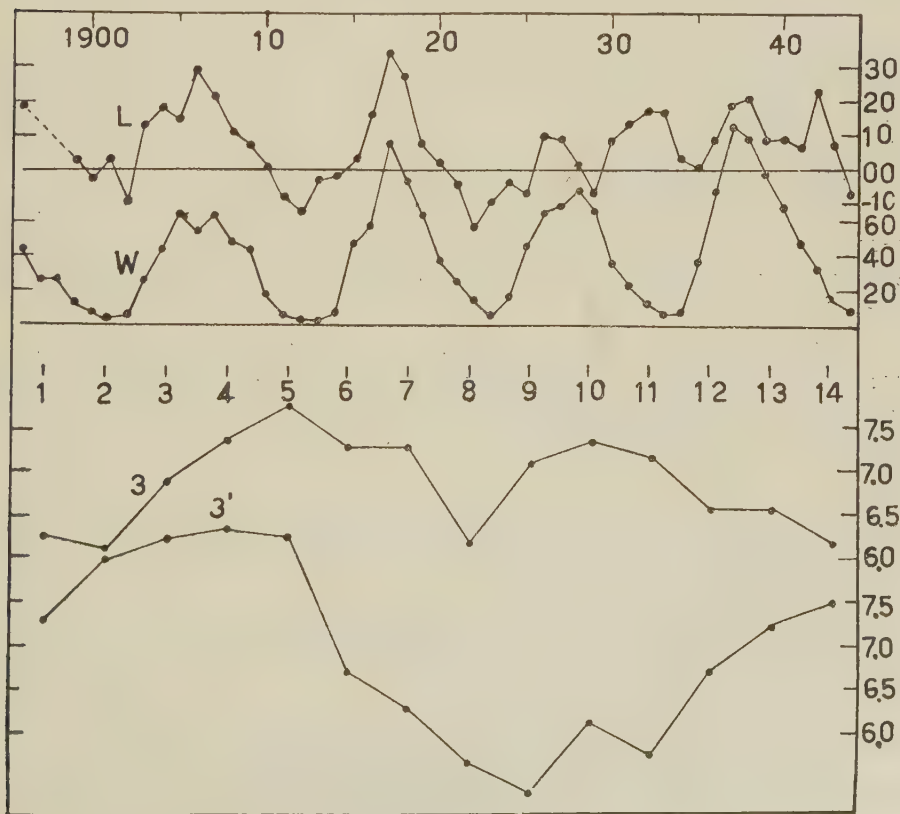


Fig. 4. - L, W: Andamento dei livelli medi annuali del Lago Victoria, in pollici, sulla linea di riferimento e dei numeri di Wolf. 3: Andamento medio dei livelli mensili del lago rispetto al ciclo di Chandler, intervallo luglio 1900-dicembre 1922. 3': Idem, intervallo gennaio 1923-luglio 1944.

Geologia. — *Notizie preliminari sulla stratigrafia del margine sud-orientale della regione fra il Sebino e l'Eridio* (*). Nota di ALFREDO BONI, presentata (**) dal Corrisp. GB. DAL PIAZ.

Dopo la pubblicazione della « porzione centrale » (1943)⁽¹⁾ e del « margine occidentale » (1947)⁽²⁾ della *Geologia della regione fra il Sebino e l'Eridio*, era mio vivo desiderio estendere le ricerche all'estremo orientale della regione stessa, per vedervi l'eventuale continuazione delle linee strutturali osservate nella parte centrale e per stabilire un confronto fra i due margini opposti, verso la valle dell'Oglio ad ovest e verso quella del Chiese ad est, confronto che un lavoro del Cozzaglio⁽³⁾ faceva presumere molto interessante. Oltre al rilevamento di questa zona mi premeva anche la revisione della fascia marginale verso levante della carta schematica allegata alla « porzione centrale », in quanto essa vi era stata inclusa, allo scopo di illustrare la continuazione degli elementi strutturali, per compilazione, ricavandola essenzialmente dallo schizzo riportato a pagina 210 della *Morfogenesi delle Prealpi Lombarde* del Cacciamali⁽⁴⁾; inoltre un errore del disegnatore, colmando uno spazio bianco, aveva esteso il Raibliano anche là dove l'anticlinale di Levrage — che, peraltro, è indicata nella sezione geologica V della tavola XXVI — porta ad affiorare terreni più antichi.

Purtroppo ragioni di varia natura, ma soprattutto finanziarie, mi obbligarono a rimandare di anno in anno il compimento di tale progetto, finchè nel 1949 un congruo sussidio del Centro Studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche, diretto dai chiar.mi proff. A. Bianchi e Gb. Dal Piazz, che qui ringrazio sentitamente, mi permise di portarlo a termine.

La trattazione dettagliata di questa terza parte sarà pubblicata, come le precedenti, negli « Atti dell'Istituto Geologico dell'Università di Pavia »; nel frattempo credo utile riferire brevemente, in forma preliminare, sui risultati stratigrafici dello studio.

I confini della zona rilevata sono dati dal Chiese e dal Lago d'Idro a est, ancora dal Chiese a sud, dal margine del rivestimento porfirico a nord, dal limite orientale della precedente carta a ovest. Di quest'ultima furono rivedute le zone della Pertica Alta, della Pertica Bassa e di Monte Corna.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Pavia e compreso nel programma del Centro Studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Università di Padova.

(**) Nella seduta del 15 aprile 1950.

(1) A. BONI, *Geologia della regione fra il Sebino e l'Eridio*. Introduzione. — *Bibliografia tettonica*. — Parte prima: *La porzione centrale*. « Pubbl. Ist. Geol. Un. Pavia », pubbl. n. 68 (« Atti Istituto Geol. Un. Pavia », vol. I). Pavia 1943.

(2) A. BONI, *Geologia della regione fra il Sebino e l'Eridio*. — Parte seconda: *Il margine occidentale*. (« Atti Ist. Geol. Un. Pavia », vol. II, p. 67. Pavia 1947).

(3) A. COZZAGLIO, *Significato e limiti dei fenomeni di carreggiamento osservati nelle Prealpi Bresciane*. Comm. Ateneo Brescia per l'anno 1922. Brescia.

(4) G. B. CACCIAMALI, *Morfogenesi delle Prealpi Lombarde*. Brescia 1930.

Alle carte geologiche già citate nella prima parte debbo aggiungere il foglio 35 – Riva – della Carta Geologica delle Tre Venezie recentemente pubblicato dalla Sezione Geologica dell'Ufficio Idrografico del Magistrato alle Acque di Venezia e rilevato, per la regione che m'interessa, da Angelo Pasa ⁽⁵⁾.

I terreni affioranti nella zona vanno dagli scisti cristallini prepermiani e probabilmente prepaleozoici, facenti parte del cosiddetto « massiccio cristallino dell'alta Val Trompia », al Retico.

Nella carta gli scisti cristallini, prevalentemente filladi, sono stati indicati globalmente come tali, in attesa che il loro studio petrografico in corso ⁽⁶⁾ permetta una rappresentazione cartografica dettagliata di tutto l'affioramento del suddetto massiccio.

Al di sopra di questa infrastruttura si sviluppano i terreni permiani, rappresentati essenzialmente da porfidi, scisti di Collio e conglomerati e arenarie rosse di tipo Gardena, negli stessi rapporti di giacitura in cui furono osservati nella porzione centrale. Non mi sembra che nella zona rilevata affiori un « Verrucano » nel senso di conglomerato a grossi ciottoli di cristallino e di porfido; al di sopra dei porfidi o lateralmente ad essi si sviluppano formazioni tufaceo-conglomeratiche, che sono però altra cosa.

Nel Trias inferiore sono stati ancora distinti i due orizzonti del Servino e del calcare a cellette. Per l'Anisico ho tenuto cartograficamente distinto il livello inferiore a *Dadocrinus gracilis*, da quelli a *Rhynchonella decurtata* e a *Cerarites trinodosus*, senza peraltro poter distinguere fra loro gli ultimi due per la rarità ed esiguità di sicuri affioramenti.

Al Ladinico sono da attribuire strati di Livinallongo (Buchenstein), anche qui affioranti colle facies già descritte, strati di La Valle (Wengen) e calcari e dolomie di Esino: nella valle del Caffaro, La Valle e Esino hanno su per giù lo stesso spessore, con prevalenza dell'Esino; a sud, nella zona della Pertica si ha una forte prevalenza degli strati di La Valle, mentre l'Esino è di solito ridotto ad una ben evidente e continua, ma esile scogliera.

Nel Raibliano non dappertutto è possibile la separazione dei tre tipici livelli: calcare a lastre (Plattenkalk), marne arenarie e tufi, dolomia cariata e gessi. Il primo è ben evidente nella Valle della Berga e nella zona di Presego, non in quella della Pertica; l'ultimo in qualche punto lungo la val della Berga e attorno a Cima della Massa.

Al di sopra del Raibliano si sviluppa la Dolomia principale; l'entità di questa formazione, sia come spessore sia come distribuzione superficiale, è strettamente legata al problema dell'esistenza del Retico e della Corna. Nella carta allegata alla porzione centrale quel tanto del triangolo Cima Cadoline-Lodrone-Monte Canale, che vi è compreso, era stato indicato – seguendo il Bittner – come Dolomia principale. Nella carta del Magistrato alle Acque nello stesso triangolo sono invece segnate solo due strisce di Dolomia principale ed altre strisce di Retico e di « Corna ».

(5) Carta geologica delle Tre Venezie a cura della Sezione Geologica dell'Ufficio idrografico del Magistrato alle Acque di Venezia: foglio 35°, Riva.

(6) A. BONI e M. BALCONI, *Le formazioni scistoso-cristalline ed eruttive dell'Alta Val Trompia*. « Rend. Soc. Min. Ital. », a. II, 1942, n. 1. Pavia, 1943.

A proposito del presunto Retico Bittner ⁽⁷⁾ (p. 297) afferma: « al di là del Lago d'Idro (a occidente) le stesse rocce oscure hanno un grande sviluppo al Monte Canale e in Val Tese e val Rè presso Anfo. Anche qui non fui in grado di separare queste rocce dalle restanti Dolomie principali ed anche qui davano l'impressione di affioramenti affatto irregolarmente delimitati sia nel senso orizzontale che in quello verticale, entro la massa della Dolomia principale ».

« Fra Anfo e Lavenone tutta la parte inferiore della Dolomia principale sembra constare di tali rocce, a nord di Anfo s'insinua nella Dolomia principale una ristretta striscia di queste rocce, che passa attraverso Val Rè e Val Tese. Come già detto, non si sono trovati in nessun posto fossili entro questi strati, ad eccezione di tracce di pesci presso Storo e Bondone e di Bactrilli fra Treviso ed Eno ».

Purtroppo anche a me non è stato dato finora di trovare dei fossili che permettessero una sicura attribuzione stratigrafica di questa formazione. Quanto alla sua delimitazione orizzontale e verticale si può osservare che essa forma, entro la massa dolomitica, tre strisce abbastanza ben individuate. Una, più ampia, dalla zona del Passo Zeno, attraverso l'alta valle del Fosso Zeno, la val Tese, la valle del Rè, la Cima Cereto Chetoi raggiunge il Lago d'Idro; essa appare ben delimitabile sia a nord sia a sud, dove sembrano chiari anche i suoi rapporti di giacitura colle formazioni dolomitiche tipiche; un po' incerta sarebbe invece la sua delimitazione verso la valle dell'Abbioccolo. Certo che essa viene a trovarsi nella condizione di una striscia « incastrata » fra la Dolomia tipica.

Una seconda fascia si estende dalla valle di Canale al M. Paghera ed alla valle del T. Rè subito a ovest di Anfo, dove però appare ormai ridottissima. Anche qui, a NW e SE la delimitazione sembra abbastanza netta, non altrettanto alle due estremità. Relativamente chiari sembrano i rapporti di giacitura a SE, meno a NW.

Una terza striscia si sviluppa dal fianco est del Dosso delle Ore al Dosso Sassello, per poi scomparire sotto le falde detritiche verso il Lago d'Idro. Ben stratificata, come del resto nelle fasce precedenti, la formazione sembrerebbe qui concordante colla Dolomia principale che le sta a sud. Incerta è la sua delimitazione al Dosso delle Ore.

Ulteriori ricerche sono in corso su questo interessante problema, soprattutto nella speranza che qualche fossile riesca a risolverlo definitivamente; allo stato attuale dei risultati tenderei a considerare queste fasce come dei complessi abbastanza ben delimitati in senso verticale ed orizzontale, le incertezze marginali riscontrate potendosi attribuire al carattere particolare delle strutture.

Nella citata carta questa formazione è considerata senz'altro come Retico, ma presenta una distribuzione superficiale diversa da quella da me riscontrata.

Non credo poi che si possano riconoscere terreni più recenti, come per esempio la « Corna »; sono stati ad essa attribuiti una striscia da M. Breda a M. Suello, il M. Censo ed un'ampia placca corrispondente all'alta valle di Canale;

(7) A. BITTNER, *Ueber die geologischen Aufnahmen in Judicarien und Val Sabbia*. « Jahrb. K. K. geol. Reichsanstalt », 31 Band, 1881, III Heft, p. 219. Wien 1881.

ma in tutte queste zone la facies è schiettamente dolomitica col solito tipo della Dolomia principale e nel canalone a nord di Valmarmenter, nel cuore della suddetta placca, in una lumachella, ho potuto raccogliere numerosi esemplari di *Perna exilis* Stopp e di *Gervilleia salvata* Brunner, ambedue forme tipiche della Dolomia principale; per il Monte Censo già il Curioni citava *Avicula exilis* Stopp. Per la fascia di M. Breda, oltre al fatto che essa sembra contenere la stessa lumachella, sono in favore della sua attribuzione alla Dolomia principale, già sostenuta dal Bittner, anche la posizione nella successione delle formazioni e le condizioni di giacitura.

Quanto alla distribuzione superficiale delle varie formazioni ricorderò come a nord della zona rilevata affiori il massiccio cristallino col suo rivestimento di porfidi permiani; dal Maniva sino ad est dei finili Brolo appaiono in superficie gli scisti cristallini; a est essi scompaiono e il contatto si stabilisce direttamente fra scisti di Collio e porfidi quarziferi del rivestimento del massiccio cristallino. A sud si sviluppa la serie delle formazioni dagli scisti di Collio al Raibl, in forma di fasce allungate da ovest a est e che vanno man mano restringendosi e scomparendo verso levante. Così gli scisti di Collio più non affiorano al Dosso Ansès; perdurano invece fino a Lodrone le arenarie rosse; al rio di Riccomassimo non affiora più il Trias inferiore (Servino e Calcare a cellette): a Riccomassimo si manifestano ancora, contro i porfidi e le arenarie rosse, il calcare di Esino e il Raibliano; subito ad est si annullano in breve tratto l'uno e l'altro ed il contatto si stabilisce direttamente fra arenarie rosse e Dolomia principale.

Un'interruzione ed uno spostamento delle fasce – verosimilmente per faglia con scorrimento anche orizzontale – si nota chiaramente ad ovest di Cerreto; altra dislocazione minore si osserva allo sbocco della valle di Riccomassimo.

Che la distribuzione delle formazioni nella valle del Caffaro sia quella indicata ci è provato dal fatto che la formazione di colore rossastro che occupa la zona di confluenza tra rio di Riccomassimo e Caffaro è Raibl e presenta anche qualche fossile ed occupa inoltre la normale posizione stratigrafica fra l'Esino, che forma lo sperone su cui si trova la chiesetta di Riccomassimo, e la Dolomia principale, che occupa il fondovalle del Caffaro e ne costituisce poi il versante meridionale. Qui infatti la roccia è tipicamente dolomitica e, per lo più, di color chiaro ed ha tutti i caratteri della Dolomia principale. Questa disposizione degli affioramenti del resto era già stata indicata dal Bittner.

Più a sud si sviluppa una fascia retica con *Avicula contorta* molto ristretta, che parte da S. Antonio sul lago d'Idro e si porta al passo del Mare, poco a ovest del quale scompare; il Bittner dice di averne trovato dei resti sulla Dolomia principale sul fianco nord della Cima Meghè.

A sud di queste fasce nel triangolo Cima Meghè–S. Antonio–Idro si sviluppa ampiamente la Dolomia principale, nella quale s'intercalano però, come si è detto, le tre strisce della formazione precedentemente discussa.

A ovest dell'Abbioccolo, nella zona riveduta, affiorano i vari terreni del Trias, a partire dall'Anisico inferiore.

A parte i citati affioramenti medio-triassici della valle del Degnone, determinati dall'anticlinale di Levrance, la modificazione più significativa è quella rela-

tiva al M. Corna, che il Cacciamali segna sulla carta ed indica nel testo come Dolomia principale, mentre è costituito da un complesso di strati mediotriassici. Noto qui, incidentalmente, come il Cacciamali stesso avesse quasi giustamente interpretato la stratigrafia di questo monte nel 1914, per poi modificarla a torto. Di conseguenza viene spostato anche il contatto anomalo fra Anisico inferiore a nord e Raibliano a sud. Notevole è la presenza di un mosaico di affioramenti mediotriassici che si sviluppa fra Presego e il Passo della Croce, il cui rilevamento peraltro non è definitivo, in quanto richiederebbe un lavoro di dettaglio per lo meno al 10.000.

Ricordo poi l'andamento delle formazioni sul versante orientale della valle dell'Abbioccolo, al di sotto della Dolomia principale, che ne forma le parti alte: gli affioramenti mediotriassici della zona di Presego oltre l'Abbioccolo piegano a S-SE e si continuano molto ridotti sul versante orientale della valle sino alla Valmarsa, e in qualche tratto scompaiono del tutto; planimetricamente essi formano quindi, grosso modo, archi concentrici attorno ad un punto situato pressoché in corrispondenza dell'Abbioccolo.

Della struttura tettonica sarà parlato in altra Nota di prossima pubblicazione.

Fisica-Matematica. — *Di una elementare proprietà cinematica analoga al principio di Fermat.* Nota di LUIGI SOBRERO, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

È stata molte volte osservata l'analogia esistente tra la formula di Savary (della Cinematica piana) e la formula delle lenti sottili (dell'Ottica geometrica). Premessi alcuni richiami e alcune definizioni, stabiliremo, in questa Nota, un'altra analogia dello stesso tipo, e cioè mostreremo che sussiste, nel campo cinematico, un principio analogo a quello di Fermat dell'Ottica geometrica.

I. NOTAZIONI. — Prendiamo in esame il moto di un corpo rigido, α , sopra un piano fisso, α' . Tale moto può riguardarsi, classicamente, come generato dal rotolamento di una curva rigida p , solidale con il corpo α , sopra una seconda curva rigida p' , solidale con il piano α' . Nella figura 1 le due curve p e p' (« polodie del moto ») sono rappresentate nella mutua posizione che esse occupano all'inizio del movimento, o, per meglio dire, in quell'istante che si riguarda convenzionalmente come iniziale. Il loro punto di contatto, O , è l'iniziale centro istantaneo di rotazione del corpo rigido.

Indichiamo con Q un punto, della polodia p , distinto da O . Nel suo moto di rotolamento la polodia p porterà, in certo istante, il punto Q a contatto con un determinato punto, Q' , della polodia p' . Questo punto Q' si dirà « corrispondente » di Q . L'arco, di polodia p , compreso fra i punti O e Q eguaglia, ovviamente, l'arco, di polodia p' , compreso fra i punti O e Q' .

Nel passaggio del corpo α dalla posizione iniziale, di centro istantaneo O , a quella — generica — di centro istantaneo Q , una retta qualunque, che si muova

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

solidariamente con il corpo, subisce una rotazione, ϵ , che si dice « rotazione del corpo » fra le due posizioni considerate. Questo parametro ϵ , che in figura si identifica con l'angolo compreso fra le tangenti alle polodie nei punti Q e Q', può servire a caratterizzare le varie posizioni assunte dal corpo rigido durante il suo movimento. A caratterizzare queste medesime posizioni altri Autori introducono, in luogo dell'angolo di rotazione ϵ , il percorso s descritto dal centro istantaneo di rotazione mentre il corpo rigido passa dalla sua posizione iniziale a quella generica presa in esame, e cioè l'arco di polodia p compreso fra i punti O e Q. È preferibile, tuttavia, caratterizzare le posizioni del corpo con l'angolo ϵ , il quale, fra l'altro, presenta la proprietà (vantaggiosa per le nostre considerazioni seguenti) di essere adimensionale.

Nel seguito noi prenderemo esclusivamente in esame posizioni, del corpo rigido, assai vicine a quella iniziale, e cioè caratterizzate da valori infinitesimi di ϵ (o

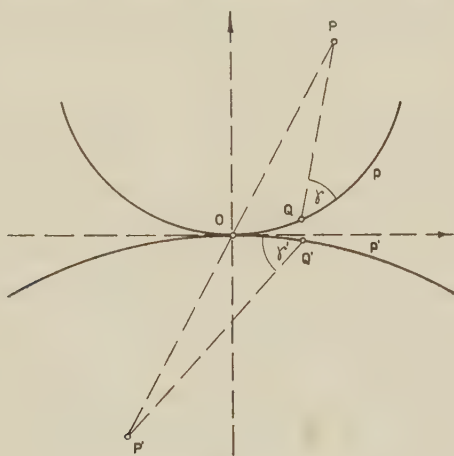


Fig. 1.

di s). Le eventuali altre quantità infinitesime che avremo da introdurre saranno sempre raffrontate con la rotazione ϵ , che fungerà, pertanto, da infinitesimo fondamentale di riferimento.

2. DEFINIZIONE DI CONIUGIO. — Premesse queste generalità, prendiamo in considerazione due punti, P e P'; l'uno appartenente al corpo rigido α , l'altro al piano fisso α' . Quando la curva rigida p inizia il suo rotolamento su p' , la distanza l fra i due punti muta, generalmente, di valore; e, nell'istante in cui la rotazione del corpo rigido avrà raggiunto il generico valore ϵ , quella distanza apparirà (rispetto al suo iniziale valore) variata di una certa quantità (infinitesima) Δ .

Confrontiamo le due quantità Δ ed ϵ . Se i punti P e P' sono scelti a caso la prima risulta, in genere, dello stesso ordine di grandezza della seconda. Ove si convenga, in altri termini, di assumere ϵ come infinitesimo fondamentale di riferimento, si può anche dire che la variazione, Δ , della distanza dei punti P e P' è generalmente infinitesima di prim'ordine.

Se, tuttavia, i punti P e P' sono scelti in modo conveniente la variazione Δ può risultare infinitesima di ordine superiore. Quando una tale circostanza si verifichi

noi diciamo che i punti P e P' sono « coniugati »; e, più precisamente, con coniugio di secondo, terzo, o, in generale, n^{esimo} ordine, secondo che la variazione Δ di distanza sia infinitesima di secondo, di terzo, o di n^{esimo} ordine rispetto ad ε .

In termini equivalenti, ma più espressivi, possiamo anche dire: due punti P e P' presentano fra loro un coniugio di ordine n se, al muoversi del corpo rigido intorno alla sua posizione iniziale, la distanza dei due punti rimane costante a meno di infinitesimi di ordine n .

È da osservare che in questa definizione di coniugio (e di ordine di coniugio) i due punti P e P' entrano in modo perfettamente simmetrico; cosicchè due punti che siano coniugati nel moto della polodia p sulla polodia p' , appaiono coniugati anche nel moto (inverso) della polodia p' sulla polodia p . Chi, però, rinunci a questa simmetria della definizione, può presentare il coniugio di due punti anche al modo seguente: un punto P del corpo rigido possiede coniugio di ordine n con un punto P' del piano fisso se la traiettoria descritta da P su questo piano ha contatto n -punto con un cerchio di centro P' .

3. CASI PARTICOLARI. — Osserviamo, per inciso, che i concetti di coniugio e di ordine di coniugio consentono di ordinare, in modo logico e chiaro, la maggior parte delle proprietà e dei teoremi della cinematica dei corpi rigidi piani.

Il caso più elementare di coniugio si presenta per $n = 2$. Si constata immediatamente che due punti P e P' , comunque scelti sopra una retta uscente dal centro istantaneo di rotazione O , presentano fra loro coniugio di second'ordine. Ciò equivale, ovviamente, alla proprietà, della traiettoria di P , di risultare ortogonale al raggio vettore che congiunge O con P . Le coppie di punti con coniugio del second'ordine sono ∞^3 , e cioè tante quanti sono i punti dello spazio.

Più interessante è il caso immediatamente successivo, $n = 3$. Si verifica subito che un generico punto P del corpo rigido e il centro di curvatura, P' , della traiettoria di P sono legati fra loro da coniugio del terz'ordine. La corrispondenza che il coniugio di terz'ordine stabilisce fra i punti del corpo rigido e quelli del piano fisso è, pertanto, quella medesima che stabiliscono il teorema (o la formula) di Savary. Le coppie di punti con coniugio del terz'ordine sono meno numerose di quelle con coniugio del secondo, e cioè ∞^2 (tante quanti sono i punti di un piano).

Coniugio del quart'ordine ($n = 4$) si presenta fra quei punti, P , del corpo rigido, i quali descrivono traiettorie con curvatura stazionaria ed i centri di curvatura, P' , di tali traiettorie. Il luogo dei punti P è, sul corpo rigido, quella curva cubica, esaminata da L. Allievi⁽¹⁾, alla quale taluni Autori danno appunto il nome di « cubica di Allievi », o, meglio, di « cubica mobile » (per distinguerla da una analoga « cubica fissa », luogo dei punti P'). Le coppie di punti con coniugio di quart'ordine sono soltanto ∞^1 .

Coniugio del quint'ordine ($n = 5$) si presenta fra quei punti, P , del corpo rigido, i quali descrivono traiettorie a curvatura iper-stazionaria (aventi, cioè, contatto penta-punto col proprio cerchio osculatore) e i centri di curvatura, P' , di tali traiettorie. Questi punti P , e i loro coniugati P' , si dicono « punti princi-

(1) L. ALLIEVI, *Cinematica della biella piana*, Tipogr. Francesco Giannini e Figli, Napoli, 1895.

pali » del movimento rigido. Si sa che, in genere, esistono, in un movimento piano, quattro sole coppie di punti principali.

Coppie di punti con coniugio di ordine superiore al quinto normalmente non esistono; a meno che, beninteso, il movimento piano, o, meglio, le sue polodie p e p' , non soddisfacciano a particolari condizioni (che, del resto, non ci consta siano mai state esaminate).

4. PROPRIETÀ DEI PUNTI CONIUGATI. — Esistono proprietà comuni a tutte le coppie di punti coniugati e valevoli quale che sia l'ordine di coniugio. Una, degna di nota, è la seguente.

Considerati due punti, P e P' , con coniugio di ordine n , indichiamone con r ed r' le distanze dal centro istantaneo di rotazione del corpo rigido, e diciamo c la somma di tali distanze. Questa somma potrebbe, in omaggio a certa analogia che più innanzi esamineremo, chiamarsi « cammino cinematico » fra i punti P e P' . Osserveremo, per inciso, che il cammino cinematico c intercorrente fra i punti P e P' è, in genere, distinto dalla distanza l dei due punti, ed eventualmente si confonde con tale distanza solo in determinati istanti del movimento del corpo.

Man mano che il corpo rigido si va allontanando dalla sua iniziale posizione, le distanze r ed r' , e la loro somma c , mutano generalmente di valore. Ci si può domandare, pertanto, quale sia l'ordine di infinitesimo di questa variazione del cammino cinematico c ; e, in proposito, si possono dimostrare le proposizioni seguenti.

Se P e P' presentano coniugio di ordine n , il cammino cinematico intercorrente fra questi due punti è costante a meno di infinitesimi di ordine n .

Se, reciprocamente, il cammino cinematico intercorrente fra i punti P e P' è costante a meno di infinitesimi di ordine n , i due punti presentano, fra loro, coniugio di ordine n .

In queste proposizioni il cammino cinematico intercorrente, all'inizio del moto, fra i punti P e P' , viene posto a raffronto con quello intercorrente, fra i due punti, in successivi istanti del movimento. Chi preferisca una visione statica del risultato, può prendere in considerazione le curve polodie, in quella mutua posizione che esse occupano all'inizio del moto (v. figura), e dire:

Se i due punti P e P' presentano coniugio di ordine n , la somma delle loro distanze da generici punti corrispondenti, Q e Q' , delle rispettive polodie è costante a meno di infinitesimi di ordine n .

Se, reciprocamente, la somma delle distanze di due punti P e P' da generici punti corrispondenti delle rispettive polodie è costante a meno di infinitesimi di ordine n , i due punti P e P' presentano un coniugio di ordine n .

Le due proposizioni (quella diretta e quella reciproca) si dimostrano in modo analogo. Accenneremo, in breve, alla dimostrazione della seconda. Stabilito, su ciascuna polodia, un sistema di ascisse curvilinee avente origine in O , diciamo s il comune valore delle ascisse dei punti Q e Q' . Designiamo inoltre con $r(s)$ ed $r'(s)$ le distanze PQ e $P'Q'$ con $\gamma(s)$ e $\gamma'(s)$ gli angoli che i raggi QP e $P'Q'$ formano con le rispettive polodie. Elementari considerazioni geometriche provano che

$$\frac{dr}{ds} = -\cos \gamma, \quad \frac{dr'}{ds} = \cos \gamma',$$

e di qui si trae, per somma,

$$\frac{d(r+r')}{ds} = \cos \gamma' - \cos \gamma,$$

ovvero, introducendo il cammino cinematico c intercorrente fra i punti P e P' ,

$$\frac{dc}{ds} = \cos \gamma' - \cos \gamma.$$

Se, come vogliam supporre, il percorso cinematico è costante a meno di infinitesimi di ordine n (rispetto ad ε , o, ciò che fa lo stesso, rispetto ad s) il primo membro della precedente relazione risulta infinitesimo di ordine $n-1$, ed altrettanto può dirsi per la differenza $\cos \gamma' - \cos \gamma$, e quindi per la differenza $\gamma' - \gamma$.

Quando, durante il movimento del corpo rigido, il punto Q viene a coincidere con Q' , la distanza l dei punti P e P' si presenta come lato di chiusura di una spezzata bilatera i cui lati, r ed r' , formano fra loro un angolo pari a $\pi - (\gamma' - \gamma)$. Applicando il teorema di Carnot al triangolo di lati l , r ed r' otterremo:

$$l^2 = r^2 + r'^2 + 2rr' \cos(\gamma' - \gamma),$$

ovvero

$$l^2 = (r + r')^2 - 2rr' (1 - \cos[\gamma' - \gamma]),$$

o ancora, introducendo il cammino cinematico c in luogo della somma $r + r'$,

$$l^2 = c^2 - 2rr' (1 - \cos[\gamma' - \gamma]).$$

I termini a secondo membro sono: l'uno costante a meno di infinitesimi di ordine n , l'altro (in virtù delle precedenti conclusioni circa la differenza $\gamma' - \gamma$) infinitesimo di ordine $2(n-1)$. Di qui si trae che in generale (e cioè per $n \geq 2$) il secondo membro è costante a meno di infinitesimi di ordine n . La stessa conclusione varrà per il primo membro, l^2 , e quindi per la distanza l dei punti P e P' . Ciò sta appunto a dimostrare che questi due punti presentano un coniugio di ordine n .

5. ANALOGIA COL PRINCIPIO DI FERMAT. - È stato osservato da molti che la corrispondenza stabilita, dal coniugio di terz'ordine, fra i punti P del corpo rigido ed i punti P' del piano fisso è della medesima natura di quella esistente, in un piano passante per l'asse di una lente sottile, fra un generico punto P e la sua immagine P' .

In questo medesimo ordine di idee, il principio di Fermat dell'ottica geometrica, il quale afferma la stazionarietà del cammino ottico intercorrente fra il punto P e la sua immagine P' , trova il suo analogo nel teorema (stabilito nel capoverso precedente) della stazionarietà del cammino cinematico fra i punti coniugati P e P' .

Il coniugio cinematico si identifica dunque, sotto vari aspetti, con il coniugio ottico; e si rende possibile studiare i sistemi ottici attraverso i loro « equivalenti » cinematici, o viceversa. Sarebbe tuttavia qui fuori luogo entrare nei dettagli di questa analogia; la quale, a nostro parere, anche se degna di nota, non esce fuori del campo delle curiosità scientifiche.

Ben più interessante si presenta, invece, l'applicazione del concetto di coniugio di due punti nello studio dei cosiddetti « meccanismi calcolatori ». Di ciò diremo brevemente in una Nota di prossima pubblicazione su questi « Rendiconti ».

Fisica-Matematica. — *Sul problema del «fioretto di perforazione» trattato col metodo operativo.* Nota di ORESTINA GARAVALDI, presentata (*) dal Sócio G. GIORGI.

1. In seguito alla pubblicazione di una mia recente Nota ⁽¹⁾, il prof. G. Aprile mi ha suggerito di trattare e risolvere, col metodo degli operatori funzionali, il problema del cosiddetto «fioretto di perforazione» usato nella tecnologia mineraria, e la cui teoria è stata svolta sinora in base a schematizzazioni semplificative che si allontanano di parecchio dalla realtà dei fenomeni.

Il sistema da studiare è in sostanza costituito dal *fioretto* (scalpello metallico dotato di massa e cedevolezza elastica, distribuite lungo il suo asse) dalla *mazza* percotente, e dalla *roccia* che viene perforata, e che oppone all'avanzamento del fioretto una resistenza di tipo piuttosto complesso.

Basta tuttavia l'ipotesi d'una ammissibile proporzionalità fra tale resistenza e la velocità di penetrazione del tagliente del fioretto nella roccia, per rendere *lineare* il sistema fisico descritto, ossia per farne dipendere il comportamento da equazioni differenziali di tipo lineare, abbastanza trattabili col metodo operativo, senza bisogno di trascurare l'esistenza di masse e cedevolezza distribuite, e quindi di propagazioni di onde elastiche nel fioretto, viaggianti con velocità finita.

Anche per questo studio mi servirò dell'analogia formale esistente fra il sistema meccanico ed un sistema elettrico opportunamente scelto. Tale sistema elettrico è costituito da un *cavo elettrico* dotato di induttanza e capacità distribuite (analoghe rispettivamente alla massa e alla cedevolezza distribuite lungo il fioretto) collegato ad un estremo con una induttanza pura percorsa da una certa corrente (analoghe rispettivamente alla massa della mazza e alla relativa velocità) ed all'altro estremo collegato con una certa resistenza ohmica (corrispondente alle resistenze di tipo meccanico offerte dalla roccia).

Altre coppie di grandezze fisiche che si corrispondono nell'analogia sono: intensità di correnti e velocità di masse; differenze di potenziale e forze meccaniche; quantità di elettricità e spazi percorsi dalle masse.

L'utilità dell'analogia meccanico-elettrica sopra accennata, sta specialmente nel fatto che per il sistema elettrico si possono senz'altro scrivere le equazioni cosiddette del *trasduttore quadripolare*, che invece non avrebbero significato abbastanza intuitivo per il sistema meccanico. Da tali equazioni possono agevolmente dedursi le espressioni simboliche che, valutate con i metodi del calcolo operatorio, ci permettono di dedurre l'andamento delle varie grandezze fisiche che caratterizzano il comportamento del sistema studiato e che interessi descrivere.

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) O. GARAVALDI, *Su di un problema di propagazione termica, trattato col metodo degli operatori funzionali*. Nota dei «Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei» (Classe Sc. fis. mat. e nat.), vol. VI, fasc. 4 (aprile 1949), pp. 461-466.

2. NOTAZIONI ADOPERATE:

 t = tempo. l = lunghezza del fioretto. M = massa della mazza. m = massa specifica del fioretto, distribuita. c = cedevolezza elastica specifica del fioretto, distribuita. $W(t)$ = velocità della mazza. W_0 = valore iniziale della velocità della mazza. V_A, V_B = velocità degli estremi A, B del fioretto. U = velocità relativa fra mazza e fioretto. F_A, F_B = forze di compressione (o tensione) nelle regioni A, B del fioretto. r = resistenza della roccia alla penetrazione del fioretto. $w = 1/\sqrt{mc}$ = velocità di propagazione delle onde elastiche. $Z = \sqrt{m/c}$ = impedenza meccanica caratteristica del fioretto. $\Delta \equiv \partial/\partial t$ = operatore di derivazione ⁽²⁾. $\gamma = \Delta\sqrt{mc} = \Delta/w$ = costante di propagazione (operatore). S = area della sezione del fioretto. $a \equiv Z/M$. $b \equiv Z/r$. $\alpha = (1 - b)/(1 + b)$. $\beta \equiv -\alpha = (b - 1)/(b + 1)$. $\varphi \equiv \gamma l$. $\psi \equiv (\Delta - a)/(\Delta + a)$.

3. EQUAZIONI FONDAMENTALI. - I due sistemi fisici corrispondenti nell'accennata analogia sono schematizzati in figura. Il contatto, ossia l'urto, fra la mazza e il fioretto è caratterizzato dall'annullarsi della velocità relativa dell'una rispetto all'altro (ossia della differenza fra le rispettive velocità); analogamente, il corrispondente fenomeno è caratterizzato, nel sistema elettrico, dall'annullarsi della corrente U , che è differenza fra la corrente nell'induttanza M e la corrente all'estremo A del cavo.

Il trasduttore quadripolare che viene considerato è quello che fa capo ai quattro terminali A, A₀, B, B₀. Le equazioni relative sono le seguenti ⁽³⁾:

$$(1) \quad \begin{cases} F_A = F_B \cosh \gamma l + Z V_B \sinh \gamma l \\ V_A = F_B \frac{1}{Z} \sinh \gamma l + V_B \cosh \gamma l \end{cases}$$

$$(2) \quad F_B = r V_B \quad (\text{legge di Ohm})$$

$$(3) \quad W = V_A + U \quad (\text{equazione del nodo A})$$

$$(4) \quad M \Delta W + F_A = 0 \quad (\text{equazione della maglia A - A}_0 - A_1 - A).$$

(2) Per le notazioni di carattere operativo vedasi anche:

1° G. GIORGI, *Metodi moderni di calcolo operatorio funzionale*. « Rendiconti del Seminario Mat e Fis. di Milano », 1935.

2° G. APRILE, *Appunti di calcolo operatorio funzionale*, ed. Pezzino, Palermo 1945.

(3) Vedi: K. W. WAGNER, *Operatorenrechnung*, Lipsia 1940.

Per la valutazione può seguirsi la trafila di sviluppi, di cui si indicano qui le tappe principali:

$$(10) \quad F_A = W_0 Z \frac{e^\varphi + e^{-\varphi} + be^\varphi - be^{-\varphi}}{\left(b + \frac{a}{\Delta}\right)(e^\varphi + e^{-\varphi}) + \left(1 + \frac{ab}{\Delta}\right)(e^\varphi - e^{-\varphi})} I(t)$$

$$(11) \quad F_A = W_0 Z \frac{\Delta}{\Delta + a} \frac{1 + (1-b)/(1+b)e^{-2\varphi}}{1 - \frac{1-b}{1+b} \frac{\Delta-a}{\Delta+a} e^{-2\varphi}} I(t)$$

$$(12) \quad F_A = W_0 Z \frac{\Delta}{\Delta + a} \frac{1 + \alpha e^{-2\varphi}}{1 - \alpha \psi e^{-2\varphi}} I(t)$$

e sviluppando in serie

$$(13) \quad F_A = W_0 Z \frac{\Delta}{\Delta + a} (1 + \alpha e^{-2\varphi}) [1 + \alpha \psi e^{-2\varphi} + \alpha^2 \psi^2 e^{-4\varphi} + \\ + \alpha^3 \psi^3 e^{-6\varphi} + \dots] I(t)$$

$$(14) \quad F_A = W_0 Z \frac{\Delta}{\Delta + a} [1 + (\psi + 1)\alpha e^{-2\varphi} + (\psi + 1)\alpha^2 \psi e^{-4\varphi} + \\ + (\psi + 1)\alpha^3 \psi^2 e^{-6\varphi} + \dots] I(t)$$

ossia

$$(15) \quad F_A = W_0 Z \frac{\Delta}{\Delta + a} \left\{ 1 + (\psi + 1) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \psi^{n-1} e^{-2n\varphi} \right\} I(t).$$

La valutazione dell'espressione simbolica di $F_A(t)$ si può ottenere da questa formula, come somma delle singole valutazioni corrispondenti ai vari operatori che sono termini della sommatoria. Il significato fisico di ciò è quello del sovrapporsi delle varie onde di compressione elastica, che si propagano avanti e indietro lungo il fioretto, in seguito all'urto della mazza. Con la (15), pertanto, il problema di descrivere la $F_A(t)$ è risolto, perchè i singoli operatori da valutare, in essa contenuti, sono di interpretazione nota.

5. RICERCA DELL'ANDAMENTO DI $V_B(t)$. - Per qualche applicazione tecnica può interessare la descrizione dell'andamento temporale della V_B , ossia della velocità istantanea del tagliente del fioretto, nella sua penetrazione entro la roccia. Il procedimento di calcolo è assai somigliante a quello svolto per la $F_A(t)$; e difatti è ovvio come dalle equazioni di partenza possa ricavarsi l'espressione simbolica di ognuna delle grandezze in esse contenute.

Per la V_B , sempre nel caso che la U abbia la forma data dalla (7), mi limito a dare l'espressione simbolica finale:

$$(16) \quad V_B = 2 W_0 \frac{Z}{r+Z} \left\{ \frac{\Delta}{\Delta + a} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \psi^n e^{-(2n+1)\varphi} \right\} I(t)$$

che è valutabile termine a termine.

Fisica (Onde elettromagnetiche). — *Sezioni d'urto di schermi metallici*. Nota di GIULIANO TORALDO DI FRANCIA, presentata (*) dal Socio G. ABETTI.

§ 1. — Gli schermi che considereremo saranno piani, infinitamente sottili e perfettamente conduttori. Cominceremo dal caso in cui lo schermo S , giacente nel piano x, y , lo occupa completamente, eccettuata un'apertura S' tutta al finito. Dal semispazio $z < 0$ incida nella direzione \mathbf{s} (versore) un'onda piana.

È noto che, facendo uso delle formule di Rayleigh (1), anzichè di quella più nota di Helmholtz-Kirchhoff, si può esprimere il campo del semispazio $z > 0$ soltanto per mezzo dei valori $\mathbf{E}^0(P')$ che il campo elettrico assume nei punti P' di S' (2) (anzi basta la parte tangenziale). Ho già insistito altrove (3) sull'utilità di queste formule, che, a differenza di quella di Helmholtz-Kirchhoff, rappresentano una vera e propria soluzione del problema ai limiti, anche se puramente formale, dato che \mathbf{E}^0 è incognita. Qui le applicheremo per ricavare un'equazione integrale per la \mathbf{E}^0 e per stabilire un'utile formula relativa alle sezioni d'urto. La via seguita sarà quella tracciata da Levine e Schwinger per il caso scalare (4).

§ 2. — Sottintenderemo la dipendenza dal tempo secondo il fattore $e^{-i\omega t}$. Poniamo poi

$$(1) \quad G(P, P') = \frac{\exp(ik|P - P'|)}{4\pi|P - P'|}.$$

Le formule sopra dette stabiliscono che il campo elettrico in un punto P del semispazio $z > 0$ è dato da

$$E_x(P) = 2 \iint_{S'} E_x^0(P') \frac{\partial G}{\partial z'} dS', \quad E_y(P) = 2 \iint_{S'} E_y^0(P') \frac{\partial G}{\partial z'} dS',$$

$$E_z(P) = -2 \iint_{S'} \left[E_x^0(P') \frac{\partial G}{\partial x'} + E_y^0(P') \frac{\partial G}{\partial y'} \right] dS'.$$

Queste si possono riunire nell'equazione (\mathbf{k} è il versore dell'asse z)

$$(2) \quad \mathbf{E}(P) = 2 \iint_{S'} [\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}^0(P')] \wedge \text{grad}_{P'} G(P, P') dS'$$

che, naturalmente, può dedursi anche per via puramente vettoriale (5). La (2) è l'unica soluzione che soddisfa le condizioni di finitezza e di radiazione di Som-

(*) Nella seduta del 15 aprile 1950.

(1) LORD RAYLEIGH, *Wave Theory of Light*, § 24, «Enc. Brit.» (1888).

(2) R. K. LUNEBERG, *Mathematical Theory of Optics* (Providence), p. 361 (1944).

(3) G. TORALDO DI FRANCIA, *Rapporto critico, alla C.I.O., sulle leggi generali della diffrazione*. «Nuovo Cimento», 5, 591 (1948).

(4) H. LEVINE e J. SCHWINGER, *On the Theory of Diffraction by an Aperture in an Infinite Plane Screen*. «Phys. Rev.», 74, 958 (1948).

(5) L. CAPRIOLI, *Sul campo elettromagnetico in un semispazio*. «Rend. Acc. Naz. Linc.», 7, 107 (1949).

merfeld⁽⁶⁾. Il campo magnetico si deduce per mezzo della seconda equazione di Maxwell, ottenendo (usiamo il sistema Giorgi razionalizzato)

$$(3) \quad i \omega \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{P}) = -2 \operatorname{rot}_{\mathbf{P}} \iint_{S'} [\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}^0(\mathbf{P}')] \wedge \operatorname{grad}_{\mathbf{P}'} G(\mathbf{P}, \mathbf{P}') dS'.$$

Ora è facile convincersi che in S' la parte tangenziale di \mathbf{H} è eguale a quella dell'onda incidente. Infatti le cariche e le correnti superficiali indotte nello schermo, che sono la causa dell'alterazione del campo incidente, non possono generare un campo magnetico tangenziale in S' . Allora, detto \mathbf{H}^i il campo magnetico incidente, dovrà essere per la (3)

$$(4) \quad i \omega \mu_0 \mathbf{H}^i(\mathbf{P}'') \wedge \mathbf{k} = 2 \mathbf{k} \wedge \operatorname{rot}_{\mathbf{P}''} \iint_{S'} [\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}^0(\mathbf{P}')] \wedge \operatorname{grad}_{\mathbf{P}'} G(\mathbf{P}'', \mathbf{P}') dS'$$

dove \mathbf{P}'' rappresenta un punto qualsiasi di S' . La (4) rappresenta un'equazione integrale per \mathbf{E}^0 . Essa sembra la più semplice fra quelle proposte negli ultimi tempi per il problema studiato^(7, 8, 11). Fra le soluzioni della (4) va scelta quella che presenta all'orlo di S' soltanto singolarità di ordine $s^{-1/2}$, essendo s la distanza dall'orlo⁽⁹⁾, ovvero singolarità ad energia integrabile⁽¹⁰⁾.

§ 3. - Esaminiamo ora il campo in $z > 0$ a una distanza r molto grande rispetto alle dimensioni di S' . Se O è un punto fisso di S' e si pone $\mathbf{P} = O + r \mathbf{s}'$ (\mathbf{s}' versore) e $\mathbf{P}' = O + \mathbf{r}'$, avremo $|\mathbf{P} - \mathbf{P}'| = (r^2 - 2r \mathbf{s}' \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{1/2} \simeq r - \mathbf{s}' \cdot \mathbf{r}'$ e varrà l'approssimazione

$$G(\mathbf{P}, \mathbf{P}') \simeq \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \exp(-ik \mathbf{s}' \cdot \mathbf{r}')$$

e quindi

$$\operatorname{grad}_{\mathbf{P}'} G(\mathbf{P}, \mathbf{P}') \simeq -ik \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \exp(-ik \mathbf{s}' \cdot \mathbf{r}') \mathbf{s}'.$$

La (2) diviene allora

$$(5) \quad \mathbf{E}(\mathbf{P}) = \mathbf{E}(\mathbf{s}', \mathbf{s}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

essendo

$$(6) \quad \mathbf{E}(\mathbf{s}', \mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda} \mathbf{s}' \wedge \iint_{S'} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}^0(\mathbf{P}') \exp(-ik \mathbf{s}' \cdot \mathbf{r}') dS'$$

l'ampiezza complessa nella direzione \mathbf{s}' dell'onda sferica (5), generata a grande distanza per diffrazione dell'onda piana incidente secondo \mathbf{s} .

In generale l'onda incidente avrà polarizzazione ellittica, cioè il suo vettore elettrico \mathbf{E}^i avrà un versore complesso \mathbf{a} (perpendicolare a \mathbf{s}). Per versore

(6) Per la prova rigorosa dell'unicità ved. F. V. ATKINSON, *On Sommerfeld's «Radiation Condition»*. «Phil. Mag.», 40, 645 (1949).

(7) J. W. MILES, *On the Diffraction of an Electromagnetic Wave through a Plane Screen*. «Journ. Appl. Phys.», 20, 760 (1949).

(8) A. W. MAUE, *Zur Formulierung eines allgemeinen Beugungsproblems*. «Zft. Phys.», 126, 601 (1949).

(9) C. J. BOUWKAMP, *A Note on Singularities Occuring at Sharp Edges in Electromagnetic Diffraction Theory*. «Physica», 12, 467 (1946).

(10) J. MEIXNER, *Strenge Theorie der Beugung electromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe*. «Zft. Naturforsch.», 34, 506 (1948).

complesso intenderemo un vettore $\mathbf{a} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, con \mathbf{u} e \mathbf{v} reali, tali che (un asterisco indica il complesso coniugato) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^* = \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 = 1$. Si sa che in questo caso l'ellitticità della polarizzazione, misurata dal quadrato del rapporto dei due semiassi dell'ellisse, è eguale a $(1 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}|)/(1 + |\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}|)$. Introduciamo ora il versore $\mathbf{b} = \mathbf{s} \wedge \mathbf{a}^*$; si verifica che $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^* = 0$, ciò che esprimeremo dicendo che \mathbf{b} è normale ad \mathbf{a} . Un qualsiasi vettore \mathbf{E} perpendicolare a \mathbf{s} risulta esprimibile con

$$(7) \quad \mathbf{E} = E_a \mathbf{a} + E_b \mathbf{b}$$

essendo $E_a = \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^*$ e $E_b = \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}^*$ le componenti generalizzate di \mathbf{E} secondo \mathbf{a} e secondo \mathbf{b} . Diremo poi che E_a è la parte di \mathbf{E} polarizzata come \mathbf{a} , mentre E_b è la parte che ha polarizzazione perpendicolare a quella di \mathbf{a} .

Ciò premesso, poniamo che l'onda incidente abbia ampiezza complessa unitaria, cioè sia $\mathbf{E}^i = \mathbf{a} \exp(ik \mathbf{s} \cdot \mathbf{r})$. Il campo magnetico sarà dato da $\eta \mathbf{H}^i = \mathbf{s} \wedge \mathbf{a} \exp(ik \mathbf{s} \cdot \mathbf{r})$ (essendo η l'impedenza caratteristica dello spazio vuoto) e il vettore di Poynting (medio) risulterà

$$(8) \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \mathbf{E}^i \wedge \mathbf{H}^{i*} = \frac{1}{2\eta} \mathbf{s}.$$

D'altra parte il flusso di energia attraverso a S' è

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_{S'} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^o \wedge \mathbf{H}^{o*} dS' = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_{S'} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^o \wedge \mathbf{H}^{i*} dS' = \\ &= \frac{1}{2\eta} \operatorname{Re} \iint_{S'} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^o \wedge (\mathbf{s} \wedge \mathbf{a}^*) \exp(-ik \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}') dS'. \end{aligned}$$

La sezione efficace di trasmissione $\sigma(\mathbf{s})$ dell'apertura si ottiene dividendo W per la densità di flusso (8) relativa all'onda incidente,

$$(9) \quad \sigma(\mathbf{s}) = \operatorname{Re} \iint_{S'} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^o \wedge (\mathbf{s} \wedge \mathbf{a}^*) \exp(-ik \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}') dS'.$$

Ora, se si moltiplica la (6) scalarmente per \mathbf{a}^* e si tiene conto dell'identità $\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{s} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}^o) = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^o \wedge (\mathbf{s} \wedge \mathbf{a}^*)$, si ottiene paragonando con la (9)

$$(10) \quad \sigma(\mathbf{s}) = -\lambda \operatorname{Im} \dot{E}_a(\mathbf{s}, \mathbf{s}).$$

Questa relazione dice che la sezione efficace di trasmissione di S' per la direzione \mathbf{s} è $-\lambda$ volte la parte immaginaria dell'ampiezza complessa diffratta nella stessa direzione e con la stessa polarizzazione dell'onda incidente.

§ 4. - Questi risultati si trasportano immediatamente al caso complementare in cui lo schermo occupa S' , e S è la parte libera (infinita) del piano x, y . Bisogna per questo utilizzare il principio di Babinet, naturalmente nella forma corretta per le onde elettromagnetiche^(11, 12). Nel nostro caso (soprassegnando i

(11) E. T. COPSON, *An integral-equation method of solving plane diffraction problems*. «Proc. R. Soc.», 186, 100 (1946).

(12) Ya. N. FELD, *Sul principio di dualità nella teoria della diffrazione delle onde elettromagnetiche da parte di schermi piani*. «Dokl. Akad. Nauk. SSSR», 60, 1165 (1948).

vettori del campo, per distinguerli da quelli dei paragrafi precedenti, relativi all'apertura complementare) il campo totale sarà composto dal campo incidente $\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i$ più quello diffratto, che su S' (dall'una e dall'altra banda) ha un vettore elettrico tangenziale eguale ed opposto a quello incidente e un vettore $\bar{\mathbf{H}}^o$ che ha segno opposto dalle due parti di S' , dato che è generato dalle correnti superficiali. Pertanto la potenza totale trasportata dal campo diffratto (ovvero sottratta al campo incidente) è

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} W &= \operatorname{Re} \iint_{S'} \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{E}}^i \wedge \bar{\mathbf{H}}^{o*} dS' = \operatorname{Re} \iint_{S'} \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{E}}^{i*} \wedge \bar{\mathbf{H}}^o dS' = \\ &= \operatorname{Re} \iint_{S'} \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{a}}^* \wedge \bar{\mathbf{H}}^o \exp(-ik \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}') dS'. \end{aligned} \right.$$

D'altra parte è evidente che vale per il campo magnetico una relazione identica alla (6), che abbiamo scritto per il campo elettrico. Se al primo membro di tale relazione sostituiamo $\mathbf{H}(\mathbf{s}', \mathbf{s})$ con $\mathbf{s}' \wedge \mathbf{E}(\mathbf{s}', \mathbf{s})/\eta$ e poniamo $\mathbf{s} = \mathbf{s}'$, otteniamo

$$\mathbf{s} \wedge \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{s}, \mathbf{s}) = \eta \frac{i}{\lambda} \mathbf{s} \wedge \iint_{S'} \mathbf{k} \wedge \bar{\mathbf{H}}^o \exp(-ik \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}') dS'$$

da cui con facile considerazione

$$(12) \quad \bar{\mathbf{E}}_a(\mathbf{s}, \mathbf{s}) = \eta \frac{i}{\lambda} \iint_{S'} \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{k} \wedge \bar{\mathbf{H}}^o \exp(-ik \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}') dS'.$$

Dividendo la (11) per la densità del flusso incidente $1/2 \eta$ e comparando con la (12), si deduce infine la sezione di urto di S'

$$(13) \quad \bar{\sigma}(\mathbf{s}) = -2 \lambda \operatorname{Im} \bar{\mathbf{E}}_a(\mathbf{s}, \mathbf{s}).$$

Per i problemi di urto scalare questa bella relazione è stata scoperta da più autori contemporaneamente. Sembra che la prima dimostrazione sia quella di Heisenberg⁽¹³⁾, il quale cita una comunicazione verbale di Wick. Recentemente van de Hulst⁽¹⁴⁾ ne ha dato una giustificazione che, per quanto non rigorosa, è intuitiva e aiuta a comprendere il significato fisico.

Ora il principio di Babinet, nella forma corretta su ricordata, dice che nel nostro caso, se vale la relazione $\mathbf{E}^i = \mathbf{s} \wedge \mathbf{E}^{i*}$, varrà anche l'altra $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{s}, \mathbf{s}) = -\mathbf{s} \wedge \mathbf{E}^*(\mathbf{s}, \mathbf{s})$. La prima vuole che sia $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, cioè che l'onda incidente abbia polarizzazione perpendicolare a quella dell'onda considerata per l'apertura complementare. Dalla seconda poi si deduce $\bar{\mathbf{E}}_a(\mathbf{s}, \mathbf{s}) = \bar{\mathbf{E}}_b(\mathbf{s}, \mathbf{s}) = -\mathbf{s} \wedge \mathbf{E}^*(\mathbf{s}, \mathbf{s}) \cdot \mathbf{s} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{E}^*(\mathbf{s}, \mathbf{s}) \cdot \mathbf{a} = -[\mathbf{E}_a(\mathbf{s}, \mathbf{s})]^*$. La (13) diviene allora

$$(14) \quad \bar{\sigma}(\mathbf{s}) = -2 \lambda \operatorname{Im} \mathbf{E}_a(\mathbf{s}, \mathbf{s}).$$

(13) W. HEISENBERG, *Die «beobachtbaren Grössen» in der Theorie der Elementarteilchen*. «Zft. Phys.», 120, 513 (1943).

(14) H. C. VAN DE HULST, *On the Attenuation of Plane Waves by Obstacles of Arbitrary Size and Form*. «Physica», 15, 740 (1949).

Allora, paragonando con la (10), si deduce che la sezione d'urto di uno schermo metallico per un'onda di data polarizzazione è eguale al doppio della sezione efficace di trasmissione dell'apertura complementare per un'onda polarizzata perpendicolarmente alla prima.

Segue poi in particolare che la sezione d'urto di uno schermo molto grande rispetto alla lunghezza d'onda è eguale al doppio della sua sezione geometrica. Di questo fatto, notato per la prima volta da Massey e Mohr⁽¹⁵⁾ per la sezione d'urto di una sfera nel caso scalare, sembra sia stato Bohr a suggerire una giustificazione proprio in base al principio di Babinet⁽¹⁶⁾.

Fisica. — *Polverizzazione catodica dei metalli e struttura cristallina*^(*). Nota di FRANCESCA DEMICHELIS, presentata^(**) dal Socio E. PERUCCA.

§ 1. — È noto come la superficie di una lega sottoposta a conveniente azione chimica (attacco) riveli i costituenti e la struttura della lega. È la proprietà che è a base della tecnica micrografica.

Tra i modi di attacco delle superficie va anche posta la polverizzazione catodica.

Questo fatto fu segnalato da J. Mazur⁽¹⁾ che fece, anzi, il confronto tra microfotografie di leghe o intaccate da acidi o soggette a polverizzazione catodica. Lo stesso autore afferma che « la polverizzazione catodica fa vedere una differenziazione della struttura anche per un metallo puro » e accenna alla pubblicazione successiva di relative microfotografie.

Per quanto ci consta ciò non fu fatto.

In possesso di una lamina d'oro puro (il cosiddetto oro fino degli orefici) utilizzata a numerosi spruzzamenti catodici⁽²⁾, e sulla quale il fenomeno indicato da Mazur e la struttura cristallina dell'oro si rivelano con eccezionale evidenza, riteniamo interessante pubblicare le allegate quattro microfotografie (ingr.: 65) fatte tutte in luce radente.

(15) H. S. W. MASSEY e C. B. O. MOHR, *Free Paths and Transport Phenomena in Gases and the Quantum Theory of Collisions*. «Proc. R. Soc.», 141, 434 (1933).

(16) Cfr. A. STORRUSTE e H. WERGELAND, *On Two Complementary Diffraction Problems*. «Forhand. K. Norske Vidensk. Selsk.», 21, Nr. 10 (1948).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica Sperimentale del Politecnico di Torino.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) J. MAZUR, *Pulvérisation cathodique des alliages*. «Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences», 1925, A, 81-92.

(2) Furono oltre un centinaio, ciascuno della durata di $\approx 20'$ con 1500 V, ≈ 10 mA, e una densità di corrente di $0,2 \text{ mA/cm}^2$; quando furono eseguiti non si pensava al fenomeno qui descritto; da ciò l'indicazione solo qualitativa di questi dati.

La caratteristica che qui descriviamo ci è stata segnalata dal prof. E. Perucca. Lo ringraziamo per averci suggerito lo studio su cui qui riferiamo.

Esse si riferiscono a una stessa porzione ($\approx 1 \text{ mm}^2$) della lastra d'oro; dall'una all'altra fotografia muta la direzione della luce incidente; questa direzione è indicata dalla freccia in ciascuna figura.

§ 2. - Sebbene il processo che dà luogo alla polverizzazione catodica non sia noto con grande dettaglio, tuttavia esso è ritenuto non dissimile da una evaporazione.

Ci eravamo quindi posto il seguente quesito: anche la semplice evaporazione termica di una lamina d'oro fa analogamente apparire la struttura cristallina?



↑ Fig. 1.



↙ Fig. 2.

La risposta a questo quesito sembrava a noi di una certa importanza perchè, se ciò fosse avvenuto:

lo spruzzamento catodico e l'evaporazione termica avrebbero mostrato ancora una volta il loro parallelismo;

si sarebbe realizzato un modo, che riteniamo non ancora seguito, per rivelare una differenza di evaporazione da parte di facce cristalline differenti di un metallo puro.

Perchè l'evaporazione dell'oro avvenisse con sufficiente rapidità, fu predisposto di farla avvenire nel vuoto, in un tubo di vetro di quarzo; l'estremo di questo tubo, ove era il dischetto d'oro in istudio, avrebbe dovuto essere tenuto a una temperatura di 1000°C o pochissimo più alta.

Sperimentando con lamina nelle condizioni più adatte per ridurre il fenomeno di ricristallizzazione c'era da sperare che il ricercato fenomeno dovuto alla evaporazione non risultasse mascherato da una contemporanea troppo energica modificazione della configurazione cristallina.

Ma le nostre scarsissime attrezzature sperimentali, in particolare la difficoltà a conservare alla temperatura voluta il forno di cui si dispone per vari giorni hanno impedito che l'esperienza potesse svolgersi in modo esauriente e, dopo parecchi insuccessi attribuibili in sostanza alla difficoltà di regolazione della



Fig. 3.



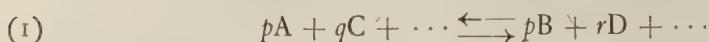
Fig. 4.

temperatura del forno intorno a 1000°C , si è dovuto, per ora, rinunciare alla prosecuzione della ricerca.

§ 3. - Si reputa tuttavia opportuno segnalare quanto è stato detto a § 1, perchè sembra notevole segnalare l'evidenza del fenomeno ottenuto, sia pure dopo molte decine di ore di spruzzamento catodico, ed anche perchè ci auguriamo che altri sperimentatori, in laboratori meglio attrezzati, possano in migliori condizioni tentare l'esperienza di cui a § 2.

Chimica fisica. — *Un metodo spettrofotometrico indiretto per lo studio degli equilibri chimici*^(*). Nota di LUIGI SACCONI, presentata^(**) dal Socio L. ROLLA.

TEORIA. — È noto che, se due sostanze A e B, capaci di assorbire indipendentemente l'energia luminosa entro un determinato intervallo di frequenza, partecipano ad un equilibrio del tipo:



il rapporto c_A/c_B fra le concentrazioni dei due componenti può essere determinato per via spettrofotometrica a due condizioni:

- a) La concentrazione stechiometrica complessiva $A + B$ deve essere nota;
- b) Le due sostanze A e B debbono poter essere isolate al fine di determinarne le corrispondenti curve di estinzione « limite ». Allora, per una data lunghezza d'onda λ_i si avrà:

$$(2) \quad c_{iA}/c_{iB} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_B}{\varepsilon_A - \varepsilon_i}$$

dove ε_A ed ε_B indicano i valori delle estinzioni « limite » misurate sulle sostanze A e B mentre ε_i rappresenta il coefficiente di estinzione misurato sul sistema nello stato di equilibrio i .

Se poi il sistema ammette una costante di equilibrio K, questa, come è noto, può essere calcolata misurando il valore di c_{iA}/c_{iB} e conoscendo altre grandezze di cui la costante K è generalmente funzione.

Ma poichè lo spostamento completo dell'equilibrio⁽¹⁾ è possibile solo in casi limite, ne segue che spesso, non potendosi isolare i componenti A e B, lo studio di un tale sistema per via spettrofotometrica è impossibile.

Il presente lavoro ha appunto lo scopo di mostrare che, come già fu ottenuto per mezzo della colorimetria indiretta⁽¹⁾, anche nei casi sfavorevoli enunciati il problema può essere risolto con un metodo spettrofotometrico indiretto.

La condizione necessaria affinché ciò sia possibile è la seguente:

Il rapporto fra le concentrazioni stechiometriche dei due componenti deve essere funzione di una variabile a direttamente misurabile o calcolabile in funzione di altre note grandezze caratteristiche del sistema.

In altre parole, per ogni rapporto c_{iA}/c_{iB} deve essere:

$$(3) \quad c_{iA}/c_{iB} = f(a)$$

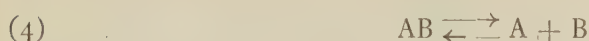
dove f rappresenta una funzione incognita giacchè, altrimenti, il valore di c_{iA}/c_{iB} potrebbe essere direttamente calcolato in funzione di a .

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) Cfr. L. SACCONI, « Gazz. chim. ital. », 78, 192, 303, 674 (1948); « J. Phys. & Colloid Chem. », in corso di stampa.

Si abbia ad esempio l'equilibrio di dissociazione



in cui solo AB ed A siano i componenti attivi nei riguardi dell'assorbimento dell'energia luminosa nell'intervallo di lunghezza d'onda considerato, e si ammetta che l'equilibrio non sia completamente spostabile nè verso destra nè verso sinistra. Allora, per un qualsivoglia stato di equilibrio del sistema, non essendo misurabili le estinzioni limite ε_A e ε_{AB} , il valore c_{iA}/c_{iAB} fornito dall'espressione $c_{iA}/c_{iAB} = (\varepsilon_i - \varepsilon_{AB})/(\varepsilon_A - \varepsilon_i)$ non può essere determinato, e quindi non può essere determinato il valore della costante di equilibrio $K = c_{iB}(\varepsilon_i - \varepsilon_{AB})/(\varepsilon_A - \varepsilon_i)$, posto che il sistema ne ammetta una.

Ma in questo caso, essendo $c_A/c_{AB} = K(1/c_B)$, rimane verificata la condizione (3) e quindi il problema può essere risolto per via spettrofotometrica indiretta.

A questo scopo è sufficiente:

a) Realizzare tre stati di equilibrio 1, 2, 3 del sistema.

b) Conoscere il valore rispettivo di c_{1B} , c_{2B} , c_{3B} (B = componente inattivo rispetto all'assorbimento della luce).

c) Determinare le tre corrispondenti curve di estinzione $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, e, in particolare, per una data lunghezza d'onda λ_i , i tre corrispondenti valori dell'estinzione $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (vedi fig. 1).

Infatti, essendo allora:

$$(6) \quad K = c_{1B} \frac{c_{1A}}{c_{1AB}} = c_{2B} \frac{c_{2A}}{c_{2AB}} = c_{3B} \frac{c_{3A}}{c_{3AB}}$$

si avrà pure:

$$(7) \quad K = c_{1B} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{AB}}{\varepsilon_A - \varepsilon_1} = c_{2B} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_{AB}}{\varepsilon_A - \varepsilon_2} = c_{3B} \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_{AB}}{\varepsilon_A - \varepsilon_3}.$$

In questo modo tre e non una sono le equazioni che esprimono K, dimodochè, eliminando le due incognite ε_A e ε_{AB} , il valore di K può essere determinato insieme a quello dei tre rapporti c_A/c_{AB} .

Infatti, ponendo $\varepsilon_A - \varepsilon_1 = a$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = b$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = c$, $\varepsilon_3 - \varepsilon_{AB} = d$, il sistema (7) diventa:

$$(8) \quad K = c_{1B} \frac{b+c+d}{a} = c_{2B} \frac{c+d}{a+b} = c_{3B} \frac{d}{a+b+c}$$

da cui, ponendo $b+c=m$, si ha:

$$(9a) \quad c_{1B}d + c_{1B}m = Ka$$

$$(9b) \quad c_{2B}d + c_{2B}c = Ka + Kb$$

$$(9c) \quad c_{3B}d = Ka + Kc$$

Sostituendo nella (9b) il valore di Ka fornito dalla (9a) si ottiene:

$$(10) \quad d = \frac{Kb - c_{2B}c + c_{1B}m}{c_{2B} - c_{1B}}.$$

Sostituendo poi nella (9c) il valore di Ka che si ricava dalla (9a) si ha ancora:

$$(11) \quad c_{3B}d = c_{1B}d + c_{1B}m + Km$$

da cui

$$(12) \quad d = \frac{c_{1B} m K m}{c_{3B} - c_{1B}}.$$

Ponendo $c_{2B} - c_{1B} = h_2$, $c_{3B} - c_{1B} = h_3$ e uguagliando la (10) e la (12) si ha:

$$(13) \quad \frac{c_{1B} m + K m}{h_3} = \frac{K b - c_{2B} c + c_{1B} m}{h_2}$$

donde

$$(14) \quad K = \frac{m c_{1B} (h_2 - h_3) + h_3 c_{2B} c}{h_3 b - h_2 m}.$$

Come si vede, il valore di K è ora espresso in funzione di grandezze tutte misurabili, non comparando più nell'espressione le grandezze non determinabili ε_A e ε_{AB} e i loro parametri a e b .

Evidentemente il procedimento analitico equivale a sostituire alle due irrealizzabili curve « limite » e_A ed e_{AB} (cfr. fig. 1) due curve limite « fittizie » e_1 e e_3 corrispondenti ai due stati intermedi di equilibrio 1 e 3.

Conosciuto così il valore della costante di equilibrio, dalle equazioni (6) si può risalire ai tre valori di c_A/c_B , cioè alla composizione del sistema rispetto ai componenti A e AB, il che appunto ci eravamo proposti di ottenere.

PARTE SPERIMENTALE E APPLICATA. - La validità del metodo è stata verificata per un sistema costituito da un indicatore acido-base in soluzione, rappresentabile dal ben noto schema d'equilibrio $HI \rightleftharpoons H^+ + I^-$. Un tale sistema può spesso richiedere un metodo d'indagine indiretto giacchè, come è noto, non sempre sono isolabili le due forme limite HI ed I^- , a meno di esporre il sistema a trasformazioni irreversibili (decomposizione). Altre volte, poi, nel caso di viraggio doppio e sovrapposto, l'esistenza della sola forma intermedia è irrealizzabile per qualsivoglia stato di equilibrio.

Siccome, come è noto, tali indicatori ammettono in generale una costante di equilibrio $K_I = a_{H^+} \cdot c_{I^-} / c_{HI}$, costante per forza ionica costante, in questo caso le equazioni (4) diventano:

$$(15) \quad K_I = a_{1H^+} \frac{c_{1I^-}}{c_{1HI}} = a_{2H^+} \frac{c_{2I^-}}{c_{2HI}} = a_{3H^+} \frac{c_{3I^-}}{c_{3HI}}.$$

Se poi si sostituiscono nella (7) ad ε_{AB} e ε_A rispettivamente i valori ignoti delle estinzioni limite acida ed alcalina ε_{HI} e ε_{I^-} , si può direttamente utilizzare la (7) che diviene:

$$(16) \quad K_I = a_{1H^+} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{HI}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_1} = a_{2H^+} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_{HI}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = a_{3H^+} \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_{HI}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$$

mentre, ponendo $\varepsilon_{I^-} - \varepsilon_1 = a$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = b$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = c$, $\varepsilon_3 - \varepsilon_{HI} = d$, $b + c = m$: $a_{2H^+} - a_{1H^+} = h_2$, $a_{3H^+} - a_{1H^+} = h_3$, il valore di K_I viene fornito dall'espressione,

$$(17) \quad K_I = \frac{m a_{1H^+} (h_2 - h_3) + h_3 a_{2H^+} c}{h_3 b - h_2 m}.$$

Da questa e dalle (15) e (16) si possono ottenere quindi i valori di c_{H-}/c_{iH-} , cioè a dire il grado di viraggio $\alpha = c_{H-}/(c_{H-} + c_{iH-})$.

Sono stati presi in considerazione i tre indicatori Bromocresolporpora, Blu bromotimolo e Blu timolo.

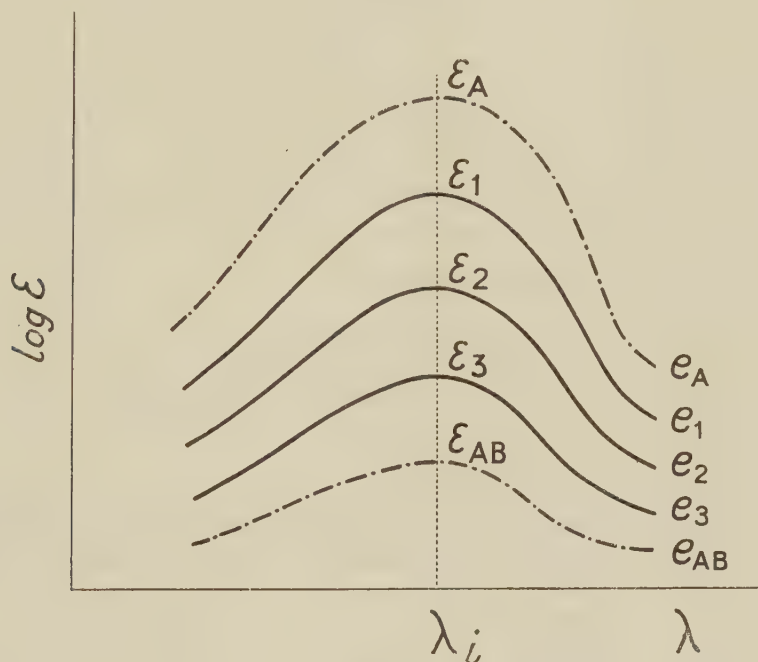


Fig. 1.

I valori delle estinzioni del primo e del terzo indicatore (viraggio acido) sono stati espressamente determinati in corrispondenza degli appropriati valori del pH. Sono state impiegate soluzioni tampone secondo Sørensen ($M/15 \text{ KH}_2\text{PO}_4 + M/15 \text{ Na}_2\text{HPO}_4$) per il Bromocresolporpora e secondo Clark e Lubs ($M/5 \text{ HCl} + M/5 \text{ KCl}$) per il Blu timolo (viraggio acido). Gli indicatori sono stati aggiunti in soluzione idroalcolica allo 0,1% ottenendo soluzioni di concentrazione in indicatore pari a $4 \cdot 10^{-5}$ per il Bromocresolporpora e $1,2 \cdot 10^{-5}$ per il Blu timolo.

I valori delle estinzioni sono stati misurati per mezzo di uno spettrofotometro Hilger-Nutting in corrispondenza delle lunghezze d'onda di massimo assorbimento e cioè $m\mu 592$ per il Bromocresolporpora e $m\mu 544$ per il Blu timolo (2).

Profondità dello strato liquido = 1 cm. I valori delle estinzioni misurate e delle attività idrogenioniche corrispondenti sono riportati nelle tabelle I e II insieme ai valori delle altre grandezze calcolate e di pK. Da notare che, nella tabella II, i valori di $\epsilon_1 - \epsilon_2$ e $\epsilon_2 - \epsilon_3$ sono stati cambiati di segno.

(2) Cfr. I. M. KOLTHOFF, *Acid-base indicators*, Mac Millan, New York, 1937, pp. 315-16.

TABELLA I.
pK del *Bromocresolporpora* $t = 19^\circ \text{C}$.

pH ₁	pH ₂	pH ₃	$a_{1H^+} \cdot 10^6$	$a_{2H^+} \cdot 10^6$	$a_{3H^+} \cdot 10^6$	$h_2 \cdot 10^6$	$h_3 \cdot 10^6$	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	b	c	m	pK
6,4	6,0	5,8	0,398	1,000	1,580	0,602	1,182	1,65	1,08	0,82	0,57	0,26	0,83	6,18
6,4	6,0	5,9	0,398	1,000	1,260	0,602	0,862	1,65	1,08	0,95	0,57	0,13	0,70	6,24
6,3	6,0	5,8	0,501	1,000	1,580	0,499	1,079	1,51	1,08	0,82	0,42	0,26	0,69	6,17
6,3	6,0	5,9	0,501	1,000	1,260	0,499	0,759	1,51	1,08	0,95	0,43	0,13	0,56	6,26

Media pK = $6,21 \pm 0,04$.

TABELLA II.
pK del *Blu timolo* (viraggio acido) $t = 19^\circ \text{C}$.

pH ₁	pH ₂	pH ₃	$a_{1H^+} \cdot 10^2$	$a_{2H^+} \cdot 10^2$	$a_{3H^+} \cdot 10^2$	$h_2 \cdot 10^2$	$h_3 \cdot 10^2$	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	b	c	m	pK
2,2	1,8	1,2	0,631	1,580	6,310	0,949	5,68	0,33	0,66	1,30	0,33	0,64	0,97	1,53
2,2	1,8	1,0	0,631	1,580	10,00	0,949	9,37	0,33	0,66	1,48	0,33	0,82	1,15	1,52
2,2	1,4	1,0	0,631	3,980	10,00	3,350	9,37	0,33	1,12	1,48	0,79	0,36	1,15	1,59
1,6	1,4	1,2	2,510	3,980	6,310	1,470	3,80	0,92	1,12	1,30	0,20	0,18	0,38	1,61
2,0	1,8	1,4	1,000	1,580	3,980	0,580	2,98	0,47	0,66	1,12	0,19	0,46	0,65	1,49
2,2	2,0	1,2	0,631	1,000	6,310	0,369	5,68	0,33	0,47	1,30	0,14	0,83	0,97	1,47

Media pK = $1,53 \pm 0,06$.

TABELLA III.
pK del *Blu bromotimolo*.

pH ₁	pH ₂	pH ₃	$a_{1H^+} \cdot 10^7$	$a_{2H^+} \cdot 10^7$	$a_{3H^+} \cdot 10^7$	$h_2 \cdot 10^7$	$h_3 \cdot 10^7$	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	b	c	m	pK
7,2	7,0	6,6	0,631	1,000	2,510	0,369	1,879	1,15	0,914	0,478	0,236	0,436	0,672	7,02
7,2	6,8	6,6	0,631	1,580	2,510	0,949	1,879	1,15	0,685	0,478	0,465	0,207	0,672	7,02
7,4	7,0	6,6	0,398	1,000	2,510	0,602	2,112	1,40	0,914	0,478	0,486	0,436	0,922	7,10
7,4	6,8	6,6	0,398	1,580	2,510	1,182	2,112	1,40	0,685	0,478	0,715	0,207	0,922	7,02
7,4	7,0	6,8	0,398	1,000	1,580	0,602	1,182	1,40	0,914	0,685	0,486	0,229	0,715	7,11
7,2	7,0	6,8	0,631	1,000	1,580	0,369	0,949	1,15	0,914	0,685	0,236	0,229	0,465	7,02

Media pK = $7,07 \pm 0,05$.

TABELLA IV.

pK del Blu timolo (viraggio alcalino)

H ₁	pH ₂	pH ₃	a _{1H+} · 10 ⁹	a _{2H+} · 10 ⁹	a _{3H+} · 10 ⁹	h ₂ · 10 ⁹	h ₃ · 10 ⁹	ε ₁	ε ₂	ε ₃	b	c	m	pK
0,09	8,91	8,71	0,813	1,23	1,95	0,417	1,137	1,25	1,03	0,79	0,22	0,24	0,46	8,95
0,09	8,71	8,50	0,813	1,95	3,16	1,137	2,347	1,25	0,79	0,57	0,46	0,22	0,68	8,96
0,91	8,71	8,31	1,230	1,95	4,90	0,720	3,670	1,03	0,79	0,42	0,24	0,37	0,61	9,01
0,91	8,50	8,31	1,230	3,16	4,90	1,930	3,670	1,03	0,57	0,42	0,46	0,15	0,61	9,07
0,09	8,71	8,31	0,813	1,95	4,90	1,137	4,087	1,25	0,79	0,42	0,46	0,37	0,83	8,99
0,09	8,50	8,31	0,813	3,16	4,90	2,347	4,087	1,25	0,57	0,42	0,68	0,15	0,83	9,03

Media pK = 9,00 ± 0,05.

Per gli indicatori Blu bromotimolo e Blu timolo (viraggio alcalino) sono stati utilizzati i valori delle estinzioni misurate rispettivamente da Brode⁽³⁾ e da Holmes e Snyder⁽⁴⁾ in corrispondenza di vari pH e per lunghezze d'onda di 620 mμ e 595 mμ. I risultati sono riportati nelle tabelle III e IV.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. — Nei quattro casi considerati i valori di pK sono sufficientemente stretti attorno a dei valori medi assai vicini a quelli determinati per via spettrofotometrica e riportati in letteratura, e cioè: Bromocresolporpora, pK = (6,15⁽⁵⁾, 6,3⁽³⁾ (6); Blu timolo, pK₁ = 1,5⁽⁴⁾, 1,75⁽³⁾ (6); pK₂ = 8,9⁽³⁾, 8,91⁽⁴⁾ (6); Blu bromotimolo, pK = 7,06⁽⁵⁾, 7,1⁽³⁾ (6), 7,0⁽⁷⁾.

Per una corretta applicazione del metodo indiretto va ricordata l'opportunità che le attività idrogenioniche delle soluzioni limite « fittizie » impiegate siano comprese in un ambito abbastanza ristretto (in generale ± 0,5 unità di pH) attorno al valore del grado di mezzo viraggio (pH_{1/2} = pK) intervallo in cui, per gli indicatori, la legge di azione di massa è più strettamente verificata.

L'errore insito nel metodo è leggermente più ampio di quello proprio del metodo normale del « viraggio completo », giacché nel presente metodo indiretto il valore di pK risulta espresso in funzione di un maggior numero di variabili e cioè tre valori della attività idrogenionica e tre misure spettrofotometriche.

In definitiva le misure ed i calcoli eseguiti appaiono provare la validità del metodo introdotto.

(3) W. R. BRODE, « J. Am. Chem. Soc. », 46, 581 (1924).

(4) W. C. HOLMES e E. F. SNYDER, « J. Am. Chem. Soc. », 47, 221 (1925).

(5) K. BUCH, « Soc. Scient. Fennica », 2, 29 (1926).

(6) E. B. R. PRIDEAUX, « J. Soc. Chem. Ind. », 45, 664, 678, 697 (1926).

(7) F. VLÈS, « Arch. phys. biol. », 4, 285 (1926).

Biologia vegetale. — *Ricerche sul metabolismo di «Oryza sativa», «Triticum vulgare» e «Vicia faba» in anaerobiosi* (*). Nota di DELIO PETRUCCI, presentata (**) dal Socio G. VERNONI.

Le ricerche sulla disassimilazione anaerobica hanno assunto un interesse biologico di primo piano da quando gli studi di Neuberg, Embeden, Meyerhof, Blackman, Lipman, Moruzzi ed altri, hanno portato all'acquisizione che la prima tappa dei normali processi catabolici è rappresentata da reazioni anaerobiche.

Ma l'interesse della disassimilazione anaerobica non si esaurisce nella possibilità di indagare dal punto di vista teorico i processi catabolici, essa acquista da sola anche un reale significato nella vita di alcune cormofite, oltre che dei saccaromiceti e delle tallofite in genere. Così il riso germinante sott'acqua opera le svariate molteplici sintesi connesse alla germinazione utilizzando soprattutto l'energia che si libera dalla degradazione anaerobica delle riserve dell'albume. Ed a questo punto sorge il problema di spiegare come alcune piante superiori, quali il riso ed il gigaro (*Arum*), riescano a vivere in condizioni di carenza ossigenica nelle quali moltissime altre specie superiori soccombono (1).

Nel metabolismo delle cormofite in anaerobiosi oltre alla produzione di CO_2 , compaiono generalmente prodotti finali tossici per il protoplasma, come etanolo ed aldeide acetica, i quali, venendosi ad accumulare col tempo, uccidono l'organismo. La soluzione del problema va dunque ricercata in un peculiare tipo di metabolismo anaerobico delle piante resistenti alla carenza ossigenica, conducente a prodotti finali non tossici, od in una elevata resistenza di dette piante all'azione tossica dell'acetaldeide, dell'etanolo e degli altri prodotti terminali del catabolismo anaerobico, come si ha nei saccaromiceti.

A conforto dell'ipotesi della non formazione di prodotti tossici starebbe l'osservazione della Bondi che nel riso in anaerobiosi non si forma etanolo, per quanto l'A. non abbia indagato sulla presenza di acetaldeide anch'essa tossica (2).

Comunque, attualmente non esistono nella letteratura dati sufficienti a dare una spiegazione esauriente e completa del fenomeno che, l'invocazione di Crescini di un trasporto d'ossigeno nella pianta dagli organi che possono attingerlo dall'aria a quelli in anaerobiosi (3), se può spiegare in parte i fatti che si verificano nelle condizioni naturali, non spiega assolutamente la constatata possibilità di vita delle piante in atmosfera di azoto o di idrogeno o nel vuoto.

Da quanto è stato esposto, emerge chiaramente la necessità di ulteriori e più esaurienti ricerche sul metabolismo anaerobico delle cormofite resistenti e non resistenti alla carenza ossigenica, sia in generale per approfondire i meccanismi

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Fisiopatologia del C. N. R. presso l'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) E. C. MILLER, *Plant Physiology*, 943 (1938) London.

(2) D. BONDI, «Rivista di Biologia», 41, 105 (1949).

(3) F. CRESCINI, «Nuovo Giornale Botanico italiano», 47, 47 (1940).

intimi della vita, sia in particolare per spiegare la diversa resistenza delle differenti specie all'asfissia.

In questa Nota riporto le osservazioni sull'andamento dell'intensità di dissimilazione in funzione del tempo, di *Oryza sativa*, *Triticum vulgare* e *Vicia faba* in atmosfera di azoto, nonché una analisi biologico-matematica di alcune delle curve ottenute.

A questa mi riprometto di far seguire altre Note su indagini strettamente enzimologiche e biochimiche della dissimilazione anaerobica delle cormofite.

MATERIALE E METODO. - Cariossidi di frumento (var. Fanfulla) e di riso previamente tenute in alcool etilico al 90 % per 5', allo scopo di eliminare il più possibile le spore di muffe eventualmente esistenti alla loro superficie, sono state poste a germinare al buio, in capsule Petri, su carta da filtro imbibita di acqua distillata ed in termostato a 25° C.

Ho portato le capsule Petri, chiuse con la carta bibula già applicata, a 130° C. per 40' circa, prima di introdurvi le cariossidi; ho fatto bollire l'acqua distillata che veniva posta nelle capsule per 15'. Accorgimenti per evitare le muffe sono stati anche adottati nell'introdurre le cariossidi e l'acqua distillata nelle capsule.

Al 5° giorno di germinazione, vale a dire circa un giorno prima della foratura dell'epicotile, venivano iniziate le prove di respirazione in atmosfera di azoto delle plantule di frumento.

Ho ritenuto tale età di germinazione la più adatta ad evitare eventuali interferenze dei processi accrescitivi sull'andamento del metabolismo in anaerobiosi, perchè, la curva della respirazione aerobica che, dall'inizio della germinazione sale rapidamente col tempo secondo un andamento ad S, dopo il 4° giorno tende a mantenersi pressochè orizzontale per poi declinare coll'esaurirsi dell'albume (4).

Ho eseguito col « Warburg » a 25° C. le determinazioni della CO₂ svolta per ora dalle plantule in azoto, le prove in doppio sono state eseguite introducendo 5 individui per vaschetta e ripetute una seconda volta colla stessa tecnica, in epoca diversa. I risultati in tutti i casi sono stati concordanti. Dopo aver introdotto le plantule nelle vaschette di respirazione unitamente a 0,1 cc di H₂O per mantenere umido l'ambiente, le vaschette stesse venivano riempite di azoto previamente fatto gorgogliare in soluzione di Fieser (5) allo scopo di eliminare l'ossigeno eventualmente in esso presente e tracce di idrogeno solforato.

L'azoto veniva fatto circolare in ciascuna vaschetta per 15'.

Le prove sul riso, condotte con la stessa tecnica, sono state invece iniziate al 7° giorno di germinazione, dato che il riso aveva un accrescimento più lento rispetto al frumento, comunque, però, sempre prima della foratura dell'epicotile.

È stata sperimentata la sottospecie *minor* della *Vicia faba*, i cui semi a differenza di quelli della *major*, consentivano, per le loro dimensioni ridotte di essere introdotti nelle vaschette. Tali semi, che venivano posti a germinare seguendo

(4) D. PETRUCCI, « Rendiconti Ac. Lincei », ser. VIII, vol. VI, fasc. 6 (1949).

(5) L. F. FIESER, *Experiments in Organic Chemistry*. D. C. Heath and Company, N. J. 395-96 (1941).

sempre la stessa tecnica, al 7° giorno si sottoponevano, uno per vaschetta, alle misurazioni della CO_2 svolta in N_2 , privati dello spermoderma per facilitare gli scambi gassosi. Al termine della prova si misurava il volume del seme, così come per le altre specie, mediante spostamento di H_2O in un cilindro graduato, allo scopo di fissare l'esatto valore di V_g .

I dati relativi alle specie sperimentate, sono riportati nella fig. 1.

Come si vede dalla fig. 1 il comportamento metabolico in anaerobiosi del riso è sostanzialmente diverso da quello delle altre due specie; infatti, mentre la

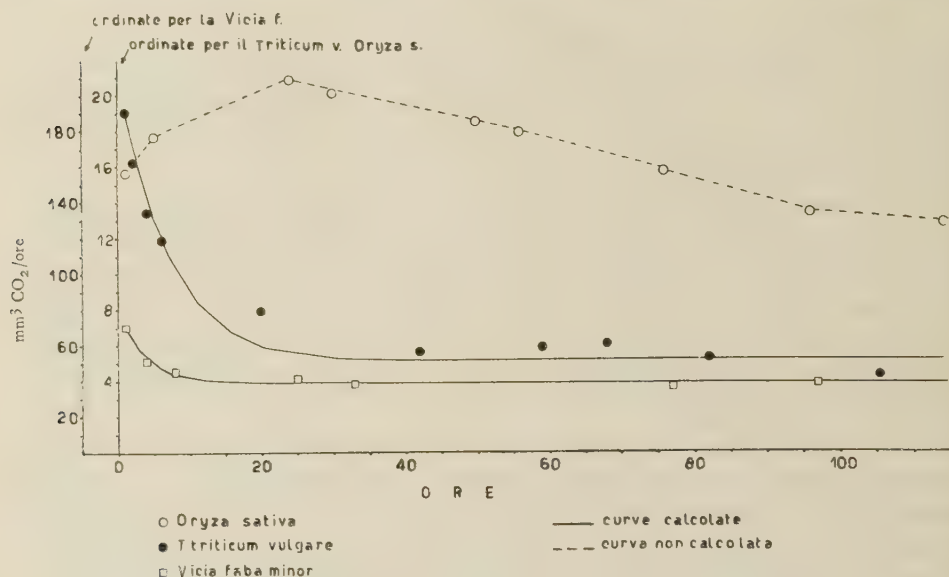


Fig. 1. - Velocità di produzione di CO_2 in azoto in una plantula di *Oryza sativa* (peso secco medio senza albume mg 31,3), di *Triticum vulgare* (peso secco medio senza albume mg 108,6) ed in un seme di *vicia faba minor* (peso secco medio compresi i catiledoni mg 280,0).

velocità di emissione della CO_2 in quest'ultime decresce rapidamente col tempo fino ad un valore minimo costante, nel riso la stessa velocità aumenta fino a raggiungere un valore massimo per poi declinare lentamente.

La diminuzione di disassimilazione, che si presenta nel frumento in anaerobiosi si verifica nella generalità delle specie esaminate ed è interpretata dagli Autori come il risultato di una azione tossica che i prodotti finali della disassimilazione anaerobica esplicano sul protoplasma. Basandoci su questa ipotesi, analizziamo ora i dati del frumento da un punto di vista biologico-matematico.

Ammettendo, secondo l'ipotesi più semplice, che la variazione negativa istantanea della velocità di disassimilazione, sia proporzionale alla variazione di tossico all'istante considerato, possiamo ritenere valida la relazione:

$$(I) \quad -\frac{dy}{dt} = a \frac{dx}{dt}$$

ove y rappresenta la velocità di disassimilazione all'istante t , dx/dt la variazione del tossico all'istante, ed a una costante di proporzionalità. Ma se il tossico si

genera dalla disassimilazione anaerobica è giusto ritenere che la dx/dt , di esso, sia proporzionale al valore y , della velocità di disassimilazione all'istante considerato; quindi:

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = by$$

ove b sta a rappresentare una costante di proporzionalità. Sostituendo la (2) nella (1) si ha:

$$(3) \quad \frac{dy}{dt} = -hy$$

con $h = ab$ che possiamo definire costante di auto-inibizione dell'intensità disassimilatoria. Integrando la (3) si giunge all'espressione logaritmica seguente:

$$(4) \quad \ln y = -ht + C$$

nella quale la costante di integrazione C , che si determina facendo $t = 0$, è uguale al logaritmo naturale della velocità iniziale di disassimilazione.

Ma se ora andiamo a verificare quale accordo esiste tra i dati sperimentali e l'equazione teorica (4), troviamo che il valore di h diminuisce col tempo, il che porta a concludere che la pianta riesce col tempo a ridurre l'azione tossica esplicita dai prodotti finali o trasformandoli o assuefacendosi ad essi. A conforto della trasformazione ricordiamo che Boysen Jensen, esaminando in diverse piante in anaerobiosi il rapporto molare tra etanolo prodotto e CO_2 svolta, trovò frequentemente valori di molto inferiori all'unità⁽⁶⁾. Comunque possa attuarsi nelle piante il meccanismo di resistenza all'anaerobiosi l'analisi matematica dei dati qui condotta ne dimostra l'esistenza effettiva. Ammettendo nella pianta una capacità di reagire all'azione tossica dei prodotti finali, possiamo agevolmente spiegare l'andamento dei valori sperimentali. Supponendo che in anaerobiosi l'inibizione da parte dei tossici, espressa dalla *diminuzione della velocità di disassimilazione*, venga contenuta entro un valore limite massimo A , e che la velocità all'istante dell'inibizione sia proporzionale alla differenza tra questo valore massimo A ed il valore y' che l'inibizione assume all'istante considerato, si può ritenere valida la seguente:

$$(5) \quad \frac{dy'}{dt} = k(A - y')$$

che risolta rispetto ad y' dà, tenuto conto che all'istante zero $y' = 0$:

$$(6) \quad y' = A(1 - e^{-kt}).$$

Ottenuta in tal modo l'espressione dei valori di inibizione, intesa come riduzione della velocità disassimilatoria, in funzione del tempo, sottraendo questi valori dal valore iniziale, y_0 , della velocità di disassimilazione, si hanno i valori y dell'intensità della disassimilazione anaerobica in funzione del tempo:

$$(7) \quad y = y_0 - A(1 - e^{-kt}).$$

(6) W. STILES, *An introduction to the principles Plant Physiology*, 143, London (1939).

Per stabilire l'espressione (7) relativa ai dati sperimentali del frumento, ho ricavato il valore di A dalla differenza tra il valore iniziale y_0 ($= 19$) dei mmc. di CO_2 svolta in media per ora da un singolo individuo e l'approssimativo valore minimo limite della stessa velocità di emissione CO_2 ($= 5$). Fissato questo valore ($= 14$) e noto y_0 , ho calcolato il valore medio di k dei vari punti sperimentali mediante la:

$$(8) \quad k = \frac{\log A - \log (y + A - y_0)}{t \log e}$$

che è risultato uguale a 0,14.

In tal modo l'equazione (7) relativa ad un singolo individuo al 5° giorno di germinazione per la varietà di frumento sperimentato risulta la seguente:

$$(9) \quad y = 19 - 14 (1 - e^{-0,14 t}).$$

Procedendo nello stesso modo ho ricavato la seguente equazione (10) relativa alla velocità di disassimilazione anaerobica di un singolo individuo di *Vicia faba* al 7° giorno di germinazione:

$$(10) \quad y = 70 - 31 (1 - e^{-0,27 t}).$$

Le curve (9) e (10) sono riportate nel grafico: si vede che l'approssimazione tra esse ed i valori sperimentali è soddisfacente.

La validità della (7) poggia sulla validità della (5), assunta empiricamente per il modo di ordinarsi dei dati sperimentali nel tempo, e sulla invariabilità di y_0 durante il tempo di anaerobiosi. Y_0 potrebbe variare per effetto dell'aumento della massa protoplasmatica (processi di accrescimento), o per modificazioni irreversibili indotte sul protoplasma dai prodotti tossici della disassimilazione, o per deficienza di alimento. La natura reversibile dei fenomeni tossici che si presentano in anaerobiosi entro limitati intervalli di tempo, è dimostrata dalla possibilità di ripristino dei valori normali di respirazione che si ha col ripristinarsi dell'aerobiosi⁽⁷⁾. La possibilità di accrescimento in anaerobiosi è negata da molti autori per la generalità delle specie studiate ed ammessa solo per il riso ed il gigaro⁽¹⁾.

Comunque rimando ad una prossima Nota, con una scorta maggiore di dati, un'analisi più profonda della (7).

Esaminando l'andamento dell'intensità disassimilatoria del riso in anaerobiosi, si osserva che in questa specie non esistono fenomeni di inibizione del tipo di quelli osservati nel frumento e nella fava: anzi il primo tratto della curva esprime una vera e propria esaltazione dei processi disassimilativi. Ciò porta a concludere che nel metabolismo anaerobico del riso i prodotti finali che si formano non esplicano azione tossica sul protoplasma almeno nel primo tratto della curva. Il forte aumento della velocità di emissione della CO_2 che si ha nelle prime 24 ore d'anaerobiosi non può attribuirsi ad un aumento del tasso dei normali processi accrescitivi avendo le plantule, al momento della prova, superata la fase logaritmica dell'accrescimento che si ha all'inizio della germinazione.

(7) W. LEACH, K. W. KENT, «Proc. Roy. Soc. B.», 116 (1934); 119 (1936).

La discesa continua della velocità di produzione della CO_2 che si verifica dopo il valore massimo, per quanto non possano escludersi fenomeni di inibizione, può attribuirsi alla diminuzione delle riserve. A questo riguardo è da notare che la disassimilazione anaerobica comporta, rispetto all'aerobica, per un ugual ricambio energetico, un molto maggior consumo di sostanze nutritive. Nel riso questo consumo è realmente maggiore e quindi in questa specie l'esaurimento delle riserve è più rapido in anaerobiosi che in presenza di ossigeno. Se si esamina infatti il rapporto tra la quantità di CO_2 svolta in azoto nella prima ora di anaerobiosi ($\text{X}_{\text{CO}_2}^{\text{N}_2}$) e quella svolta in aria dalle stesse plantule in un'ora ($\text{X}_{\text{CO}_2}^{\text{O}_2}$), troviamo nel riso un valore medio di 0,75, mentre se nelle due condizioni venisse disassimilata una stessa quantità di esosio si dovrebbe avere attenendoci allo schema della fermentazione alcoolica 0,33 ⁽⁶⁾, un valore più di due volte inferiore a quello trovato.

TABELLA I.

SPECIE	Età di germinazione ore	Q R	X_{O_2} mm3/ora	$\text{X}_{\text{CO}_2}^{\text{O}_2}$ mm3/ora	$\text{X}_{\text{CO}_2}^{\text{N}_2}$ mm3/ora	$\text{X}_{\text{CO}_2}^{\text{N}_2}/\text{X}_{\text{CO}_2}^{\text{O}_2}$
<i>Triticum vulgare</i> .	66	0.86	31.39	26.99	8.97	0.332
<i>Triticum vulgare</i> .	96	0.93	40.69	37.84	11.86	0.313
<i>Oryza sativa</i> . . .	66	0.97	8.62	8.36	6.34	0.759
<i>Oryza sativa</i> . . .	168	1.09	12.64	13.78	10.20	0.740
<i>Vicia faba minor</i> .	68	0.78	77.50	60.45	61.00	1.009
<i>Vicia faba minor</i> .	162	0.79	86.70	68.50	70.50	1.030

Per determinare il rapporto $\text{X}_{\text{CO}_2}^{\text{N}_2}/\text{X}_{\text{CO}_2}^{\text{O}_2}$ ho misurato direttamente $\text{X}_{\text{CO}_2}^{\text{N}_2}$, mentre ho dedotto $\text{X}_{\text{CO}_2}^{\text{O}_2}$ dal valore del quoziente respiratorio e da quello dell'ossigeno assunto nell'unità di tempo dalle plantule (X_{O_2}). Per semplicità di tecnica e precisione di dati, i valori di X_{O_2} ed $\text{X}_{\text{CO}_2}^{\text{N}_2}$ sono stati ricavati dalle stesse plantule. La determinazione di X_{O_2} è stata fatta col metodo « diretto di Warburg », mentre quella di $\text{X}_{\text{CO}_2}^{\text{N}_2}$ che seguiva immediatamente la precedente, col metodo già descritto. Il quoziente respiratorio è stato determinato col metodo del « piccolo e grande volume » tenendo le plantule nello spazio delle vaschette soprastante l'acqua distillata. Anche in questa determinazione le misure di H ed $\frac{1}{2}$ venivano eseguite sugli stessi individui, di età uguale a quella degli individui sottoposti alle altre determinazioni; in tal modo si evitava nei calcoli di dover riferire i valori all'unità di peso secco, eliminando così gli errori connessi alla determinazione del peso secco e quelli relativi alle differenze individuali certamente superiori agli errori

dovuti alla differenza di età (3 ore massimo) delle plantule intercedente tra le due determinazioni. I dati ottenuti e relativi al frumento, al riso ed alla fava, ciascuno media di quattro prove, effettuate sempre a 25° C., sono riportati nella tabella I. Le quantità di CO₂ svolta e dell'ossigeno assunto si riferiscono ad un singolo individuo.

Notevolmente diverso è il valore di $X_{CO_2}^{N_2}/X_{CO_2}^{O_2}$ nelle tre specie mentre resta costante nell'ambito della stessa specie durante la germinazione. La diversità di detto rapporto nelle tre specie denota una diversità di meccanismi biochimici della disassimilazione. Non esiste però una correlazione tra la grandezza di detto rapporto ed il particolare comportamento del riso in anaerobiosi, in quanto la *Vicia faba* pur presentando un valore maggiore di quello del riso, ha una curva dell'intensità di disassimilazione anaerobica, del tipo frumento e non del tipo riso, anche mostrando rispetto al primo una resistenza maggiore all'anaerobiosi. Infatti mentre nel frumento il rapporto tra la velocità iniziale della disassimilazione anaerobica ed il limite di inibizione massima della stessa velocità di disassimilazione è $19/14 \approx 1.36$, nella fava è $70/31 \approx 2.26$. È bene però non trascurare, nell'interpretazione di questa diversa resistenza, le differenze metaboliche dei tessuti embrionali rispetto a quelli di riserva: quest'ultimi sono molto grandi nella fava rispetto ai primi e per lo spessore dei cotiledoni e dello spermoderma debbono essere necessariamente adattati ad un metabolismo anaerobico.

CONCLUSIONI. — 1° L'analisi matematica dei dati sperimentali relativi all'intensità della disassimilazione anaerobica del *Triticum vulgare* e della *Vicia faba minor*, condotta partendo dall'acquisizione che in assenza di ossigeno si producono sostanze tossiche dai processi disassimilativi, dimostrerebbe l'esistenza di una capacità ipotetica, delle specie in parola, a ridurre l'azione dei cataboliti tossici, dovuta probabilmente alla trasformazione parziale di essi in sostanze innocue.

2° È stata trovata un'equazione analitica che aderisce con strettissima approssimazione ai valori sperimentali e che si può ritenere valida almeno entro le prime cento ore di anaerobiosi. Questa equazione analitica mostra come l'inibizione esplicita dai prodotti tossici sulla disassimilazione anaerobica pur crescendo col tempo sia contenuta entro un valore limite massimo e tale da non annullare la disassimilazione stessa.

3° L'*Oryza sativa* non presenta al contrario, delle altre specie esaminate, fenomeni di inibizione, almeno nelle prime 24 ore di anaerobiosi, ma una esaltazione, in tale periodo, dei processi disassimilativi.

4° Il declino della curva che si ha nell'*Oryza sativa* dopo le prime 24 ore di anaerobiosi è stato messo in relazione principalmente alla diminuzione delle riserve nutritive dimostratasi più intensa che in aerobiosi.

5° Il rapporto tra CO₂ prodotta in anaerobiosi e quella prodotta in anaerobiosi in tempi uguali si dimostra costante in una data specie durante la germinazione.

Biologia. — *Fenomeni reattivi e degenerativi delle cellule nervose nei processi di cicatrizzazione del moncone caudale di Sauri* (*). Nota di GIORGIO M. BAFFONI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

È stato precisato da Terni (1920) che nei Sauri provvedono all'innervazione della coda rigenerata solo le ultime tre paia di gangli spinali del moncone; questi gangli, in seguito all'aumentato territorio d'innervazione delle singole cellule che li compongono, sono ipertrofici (legge di Levi 1908).

Con recenti ricerche Stefanelli (1944) e i suoi collaboratori (Marotta 1946, Zannone 1947), descrivendo i vari processi morfogenetici che avvengono, durante la rigenerazione della coda, nel midollo spinale dei Sauri, hanno costatato:

a) in un primo momento un tentativo rigenerativo analogo a quello che era stato osservato negli Anfibi urodeli (formazione di un'ampolla terminale, migrazione, proliferazione degli elementi ependimali ed infine differenziamento specifico);

b) successivamente un notevole processo involutivo dovuto all'isolamento funzionale in cui si è venuto a trovare il midollo spinale rigenerato, in seguito alla formazione di uno scheletro non metamerico costituito da un manicotto cartilagineo continuo (Dugès 1829).

In coincidenza con questi fenomeni, Zannone (op. cit.) ha messo in evidenza delle peculiari alterazioni a carico degli elementi motori del midollo spinale (corna anteriori); esse consistono in:

a) *un processo reattivo*: caratterizzato da una progressiva cromatolisi tipica (cromatolisi perinucleare) e dalla ipertrofia del pirenoforo dovuta all'attività rigeneratrice;

b) *un processo riparativo*: caratterizzato dalla ricostituzione della tigroide; per ciò che riguarda l'ipertrofia, essa si conserva: ciò è stato messo in rapporto all'aumentato territorio di innervazione motoria cui provvedono gli elementi delle ultime tre paia di nervi spinali, analogamente a ciò che si verifica negli elementi gangliari (Terni, op. cit.).

È da notare che le modificazioni della tigroide, nel cui complesso proteico è stata da tempo (Scott 1898) dimostrata abbondante presenza di un componente nucleico, recentemente identificato con l'acido ribo-nucleico (RNA), sono state messe in rapporto con i fenomeni di sintesi proteica che hanno luogo nel ciclo fisiologico e nel corso dei fenomeni reattivi della cellula nervosa (Hydén 1943, Bodian 1947).

È stato mio intento, partendo da tali presupposti, esaminare i fenomeni che avvengono nel midollo spinale dei Sauri, asportando la coda in maniera da impe-

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Zoologia dell'Università di Cagliari.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

dirne la rigenerazione. A tal uopo, facendo tesoro di un'osservazione di Woodland (1921), ho amputato la coda di *Tarentola mauritanica* L. adulte (lunghezza media di mm. 68,5) eseguendo tagli obliqui dal basso verso l'alto in maniera da asportare tre vertebre oltre la regione di autotomia, raggiungendo col taglio dorsalmente il livello del cinto pelvico, ma nel contempo rispettando ventralmente la cavità viscerale e la cloaca. A vari tempi dall'operazione i midolli spinali del moncone furono prelevati e, trattati con opportuni fissativi (Bouin o Helly), isolati al binoculare; furono allestite sezioni trasversali ($10\ \mu$) colorate col metodo di Nissl (Bleu di toluidina) e sezioni sagittali ($12\ \mu$) colorate col metodo di Bodian (impregnazione argantica). In questa nota mi riferisco alle osservazioni citologiche eseguite sugli elementi motori delle corna anteriori del midollo spinale: la loro forma, le loro dimensioni ed il loro tipico ordinamento, infatti, sono tutti fattori favorevoli per il loro riconoscimento e per lo studio delle loro alte-

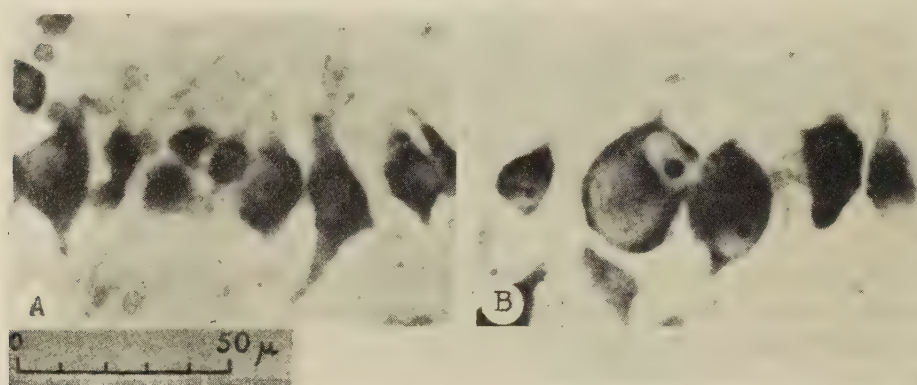


Fig. 1.

A) aspetto degli elementi delle corna anteriori del midollo spinale di Geco normale;

B) cromatolisi perinucleare ed ipetrofia cellulare durante i processi reattivi nella rigenerazione della coda (8 giorni dopo la provocata autotomia).

razioni di struttura (essi sono, nella condizione normale, di egual taglia, allungati ed allineati in una fila per lato obliqua dall'alto verso il basso e dall'interno verso l'esterno) (fig. 1 A).

Dopo il taglio, in seguito alla abbondante emorragia (si noti che essa è assai scarsa nei casi di provocata autotomia), si ha la formazione di uno spesso coagulo sanguigno che lentamente (in 15 giorni) viene sostituito da tessuto cicatriziale il quale con difficoltà viene ricoperto da epidermide.

Dopo 15 ore dal taglio si notano i seguenti fenomeni:

il canale endimale è beante ed in comunicazione coll'esterno; alla superficie del taglio si notano versamenti sanguigni tra le fibre del midollo ed aumento numerico di cellule nevrogliche; gli elementi nervosi perdono il loro normale allineamento, assumono dimensioni diverse ed aspetto abnorme, bipolare con riduzione numerica dei prolungamenti dendritici; già qualche cellula assume dimensioni decisamente maggiori che nei midolli normali; la tigroide comincia a disgregarsi; il nucleo ed il nucleolo si ingrossano. All'altezza della resezione e nelle

immediate vicinanze le fibre nervose sezionate si presentano ispessite e con un andamento ondulato.

Dopo 5 giorni:

il canale endimale è strozzato, ma senza accenno di chiusura del lume; questo è posteriormente ostruito da un sottile strato di connettivo. Gli elementi cellulari nervosi (fino a una profondità di mm. 1,5) presentano diversi gradi di alterazioni morfologiche, tanto più diffuse quanto più ci si avvicina alla superficie del taglio e sono caratterizzate, in genere, dall'ipertrofia cellulare e da una cromatolisi diffusa del pirenoforo: la tigroide, infatti, si presenta di aspetto granuloso (fig. 2 B). Le fibre sezionate del moncone presentano segni di degenerazione: esse assumono un aspetto moniliforme (a causa di frequenti strozzature) e terminano con caratteristici ingrossamenti piriformi.

Dopo 9 giorni:

il canale endimale presenta una lieve dilatazione terminale, ma senza accennare a fenomeni di saldatura. Presso la superficie del taglio si notano pochi

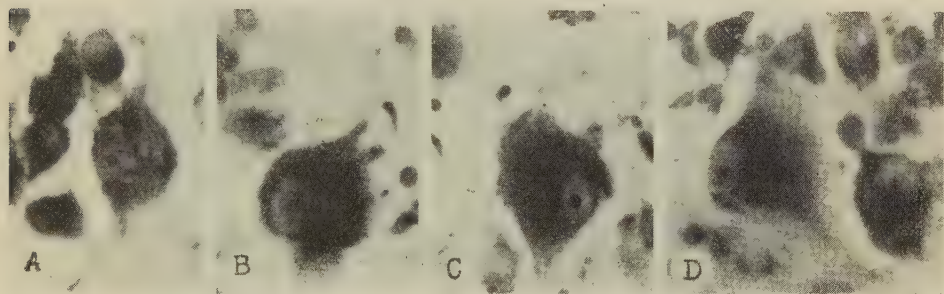


Fig. 2. — Vari aspetti delle cellule motorie durante la degenerazione in seguito a impedita rigenerazione (ingrandimento come in fig. 1).

elementi cellulari in degenerazione tra abbondante nevroglia. Le cellule nervose sono per lungo tratto (per mm. 3) disordinate, di forma poligonale o globosa, spesso vacuolizzate; il loro nucleo è perlopiù eccentrico, di forma irregolare, allungato o reniforme ed addossato ad una parete, talora facendovi ernia. Zannone (op. cit.) aveva osservato che dopo 10 giorni dalla provocata autotomia, le cellule ipertrofiche delle corna anteriori del midollo di *Tarentola* presentano in massimo grado la cromatolisi perinucleare; anche in personali esperienze ho potuto constatare quanto sopra (fig. 1 B); asportando invece la coda in maniera da impedirne la rigenerazione, gli elementi ipertrofici presentano alcuni una cromatofilia pulverulenta (fig. 2 A, C), altri invece, una cromatolisi diffusa (fig. 2 D): tali fenomeni, in base alle ricerche di numerosi Autori (Schmaus, Barbacci e Campacci, Motta, Halliburton, Scagliosi, Levi, Marinesco, Mönckeberg e Bethe, Tello, ecc.), sono stati descritti in casi di degenerazione patologica. All'estremità del midollo spinale, inoltre, nei tagli sagittali, si osservano più numerose le fibre nervose in degenerazione: esse si assottigliano e per lunghi tratti perdono la loro affinità per l'argento.

In un esemplare di mm. 82 di lunghezza, in cui si era avuto un rapido processo di cicatrizzazione e la formazione di un tubercolo apicale, l'estremità del

midollo alla dissezione si presentava molto assottigliata (per mm. 1,5); e quasi raggiungeva il tubercolo. All'esame microscopico la porzione assottigliata risultava costituita da tessuto nevroglico nelle cui maglie si rinvenivano poche cellule nervose in via di degenerazione; l'aspetto e l'ordinamento normali degli elementi delle corna anteriori comparivano solo a mm. 2,5 dalla estremità; nella sostanza bianca erano numerose cavità; il canale ependimale attraversava la formazione nevroglica terminando in una svasatura, allungata in senso dorso-ventrale, in comunicazione con la cavità dello speco vertebrale (fig. 3). Questo caso, stante la mancanza di mitosi nelle cellule ependimali, la notevole iperproduzione nevro-

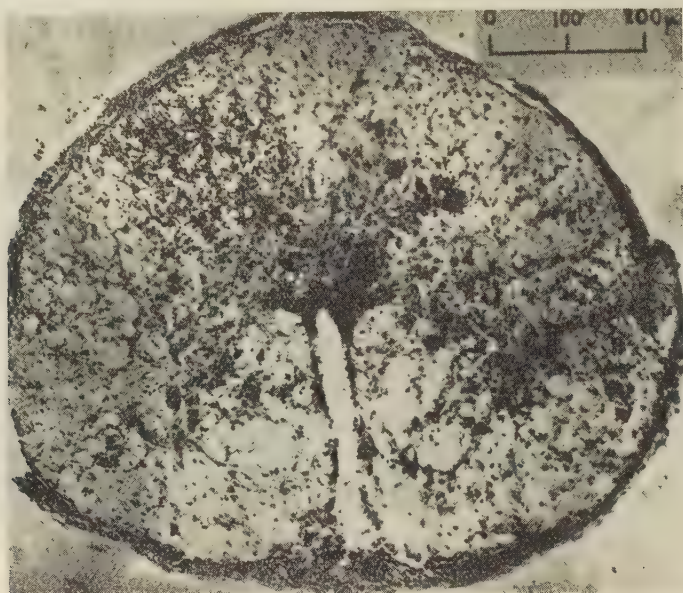


Fig. 3. — Estremità del midollo in via di degenerazione dopo 9 giorni dall'operazione (notare l'abbondanza di nevroglia e la mancata saldatura dal canale ependimale, che comunica con la cavità dello speco vertebrale).

gica e la mancata chiusura dell'ependima, va interpretato quale un processo di degenerazione più avanzato della porzione più caudale del midollo residuo.

Dopo un mese:

il midollo spinale non raggiunge più la superficie del taglio, ma si rinviene solo a mm. 2-3 all'interno dello speco vertebrale. Il canale ependimale conserva la sua lieve dilatazione presso la sua estremità, come dopo nove giorni, ma senza chiudersi terminalmente. Nelle cellule delle corna anteriori non è infrequente notare anomalie a carico di singoli elementi cellulari. Le fibre, nella porzione più distale del midollo, perdono la loro compattezza: tra di esse si rinvencono elementi nevroglici e grosse cavità allungate; questo quadro è però limitato all'ultimo breve tratto di midollo spinale e rappresenta un'ulteriore fase del processo degenerativo; già a mm. 1 di profondità gli elementi cellulari presentano l'aspetto e l'ordinamento normali. Ciò fa supporre che la porzione più distale del midollo spinale abbia subito una completa distruzione.

Da quanto è stato descritto si possono trarre due ordini di considerazioni.

I. — Da un punto di vista morfologico è stato visto che:

a) l'assenza dell'ampolla terminale, conseguente alla mancata saldatura dell'ependima, impedisce l'accennarsi di qualsiasi tentativo rigenerativo del midollo spinale (attività migratoria, proliferatrice, ecc.);

b) in assenza di rigenerazione si ha la progressiva degenerazione dei centri spinali che altrimenti avrebbero partecipato all'innervazione della coda.

II. — Da un punto di vista citologico è stato osservato che:

a) in assenza di fenomeni riparativi del neurite si ha egualmente l'ipertrofia del corpo cellulare; il fenomeno è pertanto da considerarsi una modificazione reattiva della cellula nervosa, pur non dovendo questa ricostituire la porzione periferica asportata;

b) all'ipertrofia del pirenoforo si accompagna un comportamento della tigroide i cui aspetti tipici denunciano fin da principio il destino della cellula nervosa: si manifesta infatti cromatolisi perinucleare nel caso che essa rigeneri la sua fibra, cromatofilia pulverulenta o cromatofobia diffusa nel caso che essa non sia più in grado o non possa ricostituire la fibra e vada incontro alla completa degenerazione.

Gli aspetti osservati, nel pirenoforo e nelle fibre recise degli elementi motori, sono molto simili a quelli descritti da diversi Autori nel corso di alterazioni patologiche varie (Marinesco, Valenza, Pognat, Lugaro, Mott, Tello, Camia, Nissl, ecc.), ma ben diverse da quelle post-mortali (nelle quali non è mai stata notata ipertrofia cellulare: Philippe e Gothard, Carrier, Marinesco ecc.).

BIBLIOGRAFIA.

- BODIAN D., « Symposia Soc. Cell. Biol. Nucleic Acid », Cambridge (1947).
DUGÈS A., « Ann. Sciences naturelles », XVI Avril (1829).
HYDÉN H., « Acta Physiol. Scand. », 6° (Suppl. XVII) (1943).
LEVI G., « Arch. It. Anat. Emriol. », 5° (Suppl. vol. VII) (1908).
MAROTTA M., « Rend. Acc. Naz. Lincei » (VIII) 1° (1946).
SCOTT F. H., « Trans. Canadian Inst. » 5° (1898).
STEFANELLI AL., « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 19° (1944).
TERNI T., « Arch. It. Anat. Embriol. », 17° (1920).
WOODLAND W. N., « Q. Journ. micr. Sci. », 65° (1921).
ZANNONE L., « Ric. Morfol. » (1947).

Biologia. — *La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris ».* (*Natura dello stimolo e valore della « competenza »*) (*).
Nota VI di TEODORO PERRI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Nelle Note precedenti ⁽¹⁾ mi sono occupato di varie questioni sugli arti soprannumerari ottenuti, in *Bufo vulgaris*, mediante induttori abnormi. La tecnica che ho più seguito consiste nel trapiantare, sull'addome di embrioni normali, la parte apicale della testa (comprendente l'abbozzo dell'ipofisi e parti circonvicine dell'encefalo e degli abbozzi olfattori) di embrioni trattati con dosi fortemente letali di raggi X. Questi trapianti, per effetto della röntgenirradiazione, vanno gradualmente in necrosi e si ottengono numerosi casi di arti soprannumerari.

Ho più volte ricordate le esperienze del Balinsky, del Filatow e di altri, che ottennero in embrioni di *Triton* arti soprannumerari mediante trapianto soprattutto di otocisti o di placode olfattorio; il Filatow, in *Bufo vulgaris*, ottenne solo una volta un arto soprannumerario doppio ben sviluppato ed in un altro caso una piccola gemma d'arto, in seguito a trapianto dell'abbozzo dell'ipofisi. Il Filatow ⁽²⁾ inoltre, in ricerche sull'importanza dell'epidermide e del mesoderma nella formazione degli arti, si occupò dei primissimi stadi della formazione delle gemme degli arti. Il Balinsky ⁽³⁾ studiò anche i primi stadi della determinazione degli arti soprannumerari da trapianto del placode olfattorio in *Triton*; egli attribuisce a questo abbozzo, d'accordo con le concezioni del Child, un più alto grado di attività fisiologica, che determina intorno a sè una maggiore attività.

Nella presente Nota espongo i risultati finora ottenuti ricercando, in *Bufo vulgaris*, i primi stadi della determinazione delle gemme degli arti soprannumerari, avendo particolarmente di mira lo studio del comportamento dell'acido ribonucleico; in tal modo queste ricerche sono la continuazione di quelle della mia Nota IV sull'argomento.

Sono necessarie, per chiarezza, alcune premesse.

Fin dalla mia Nota I, dinanzi al fatto che avevo ottenuto (con la mia tecnica) numerosi casi di arti soprannumerari in *Bufo vulgaris*, ove invece con le altre tecniche se n'era ottenuto un sol caso, avevo dato importanza al volume del trapiantato ed al suo graduale andare in necrosi. Questa distruzione porta ovviamente

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « Battista Grassi » dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) T. PERRI, Nota I, in questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. III, p. 613 (1947); « Arch. Zool. Ital. », vol. XXXIII (1948); Nota II, in questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. IV, p. 585 (1948); Nota III, ivi, vol. V, p. 442 (1948); Nota IV, ivi, vol. VII, p. 158 (1949); Nota V, ivi (1950, in corso di stampa).

(2) D. FILATOW, « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 127 (1933).

(3) B. I. BALINSKY, « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 136 (1937), p. 221 e p. 250.

a liberazione di sostanze citolitiche, alle quali, specialmente ai prodotti di disintegrazione di sostanze proteiche, già da tempo si dà importanza anche nelle induzioni di arti soprannumerari in Urodeli adulti (Nassonov, Fedotov, ed altri), e nelle induzioni embrionali mediante induttori morti (Barth ed altri) o usando soluzioni citolizzanti (Holifreter). Interpretai che nei miei casi la prolungata liberazione di sostanze di citolisi rappresenti una condizione molto favorevole perchè lo stimolo sia sufficientemente forte anche nel momento (non ancora ben noto) più idoneo per la determinazione.

Ricerche recenti e tuttora in pieno sviluppo, intese ad analizzare l'azione induttrice di queste sostanze di citolisi, attribuiscono, particolarmente per merito del Brachet, una grande importanza all'acido ribonucleico. Il Brachet vide tra l'altro, che le proprietà inducenti degli organizzatori morti usati dal Barth sono in funzione diretta del loro contenuto in acido ribonucleico; e che se quest'acido viene asportato mediante ribonucleasi, anche le capacità induttrici praticamente scompaiono; egli dà importanza ai prodotti della sua idrolisi provocata dalla ribonucleasi dell'embrione.

L'anno scorso cominciai a studiare se anche nella determinazione degli arti soprannumerari l'acido ribonucleico potesse avere importanza preponderante. In concreto, esaminai in *Rana esculenta* il comportamento di questo acido in abbozzi di embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali e trapiantati su embrioni normali. Osservai (vedi la mia nota IV) che nel trapiantato (vescicola ottica primaria con parti circonvicine di encefalo) man mano che, in conseguenza della röntgenirradiazione, progredisce la necrosi, le cellule perdono, e quindi probabilmente lasciano diffondere, tutto il loro acido ribonucleico o i suoi prodotti d'idrolisi. In altri termini, le cellule che per effetto dei raggi X vanno in necrosi, si comportano nei riguardi di questo acido, come le cellule che vanno in necrosi per altre cause. In *Rana esculenta* non ottenni mai la formazione di arti soprannumerari e dissi esplicitamente che le stesse ricerche andavano perciò necessariamente ripetute in *Bufo vulgaris*. Infatti, per la formazione di arti soprannumerari occorre che sia adeguato lo stimolo e che inoltre sia adeguata la « competenza » del territorio sul quale si agisce. Per la natura dello stimolo, volendovi studiare l'importanza dell'acido ribonucleico, era premessa indispensabile vedere se verificasi la sua diffusione, in seguito alla necrosi da röntgenirradiazione. Ed è appunto questo che studiai in *Rana esculenta*, quale presupposto per successive ricerche in *Bufo vulgaris*, ove vi è una notevole « competenza » artoformativa.

Quest'anno mi sono adunque occupato — in *Bufo vulgaris* — dei primi stadi della formazione degli arti soprannumerari in relazione con il comportamento dell'acido ribonucleico in questi induttori abnormi, cioè abbozzi tolti da embrioni trattati con dosi nettamente letali di raggi X e trapiantati su embrioni normali.

La zona trapiantata è costituita dalla parte apicale della testa comprendente l'abbozzo dell'ipofisi con parti circonvicine di encefalo e di abbozzi olfattori. Eseguii il trapianto nel terzo posteriore dell'addome (« campo » dell'arto posteriore) di embrioni normali allo stadio di bottone codale piccolissimo. Ho quindi usata la

stessa tecnica che finora mi ha dato i migliori risultati d'induzione di arti soprannumerari.

Dal materiale che ho finora esaminato, risulta quanto segue.

In embrioni irradiati da qualche giorno con dosi nettamente letali, si osserva che nelle cavità ventricolari encefaliche vengono a trovarsi numerosissime cellule staccatesi dalle pareti e che si presentano in vari stadi di necrosi. Tale risultato era da attendersi, anche per precedenti ricerche mie personali ⁽⁴⁾. Orbene, in queste condizioni, come già avevo osservato in *Rana esculenta*, in dette cellule la basofilia è scomparsa in vario grado, anche completamente, mentre le cellule delle pareti encefaliche, ancora in buone condizioni, la conservano; l'uso della ribonucleasi accerta, sia alla colorazione con la pironina che con l'esame a luce ultravioletta, che l'acido ribonucleico scompare dalle cellule man mano che esse vanno in necrosi ⁽⁵⁾.

Nei trapiantati da irradiazione su normale, si ha che il trapiantato mostra, qualche giorno dopo l'irradiazione, alcune sue parti ancora in buone condizioni e che conservano il loro acido ribonucleico (anche qui controllo con la ribonucleasi); mentre altre parti vanno gradualmente in necrosi e parallelamente perdono il loro acido ribonucleico. Nei casi fissati a maggior distanza dall'irradiazione, si osserva che la necrosi del trapiantato è progredita.

Fissando i portatori allo stadio di larve giovanissime, si osserva anzitutto che il trapiantato è scomparso completamente, oppure ne rimangono residui minimi. In vari di questi casi si sono avute gemme di arti soprannumerari nelle primissime fasi della loro formazione. Le cellule che le costituiscono si dipartono dalla somatopleura, anche per una superficie abbastanza estesa di essa. È noto che il primo abbozzo dell'arto normale è costituito da cellule mesenchimatiche provenienti dalla somatopleura; sull'ulteriore decorso di queste gemme di arti soprannumerari e particolarmente sull'origine della muscolatura me ne occuperò in altri lavori. Per un'esatta valutazione della sopradetta scomparsa del trapiantato (per necrosi), si tenga presente il fatto ben noto che la determinazione di un abbozzo precede il suo differenziamento istologico. Questi abbozzi di arti soprannumerari sono stati sempre di minor volume del normale. Inoltre non li ho mai visti sorgere prima dei normali: evidentemente la « competenza » artoformativa inizia pressoché contemporaneamente sia che trattisi di arti normali che di soprannumerari. Ed è qui da notare che il Balinsky ⁽⁶⁾ (p. 276), avendo osservato che negli Urodeli il momento d'insorgenza degli arti soprannumerari è in relazione con la distanza dai normali, ne aveva dedotto che la loro comparsa negli Anuri dovrebbe esser contemporanea ai normali, perchè negli Anuri gli arti posteriori e gli anteriori si sviluppano simultaneamente, mentre negli Urodeli compaiono prima gli anteriori.

(4) T. PERRI, « Rivista di Biologia » (1950, in corso di stampa).

(5) *Tecnica usata*. Fissazione in Zenker acetica per circa tre ore. Colorazione delle fette, dello spessore di 8 μ , con bleu di toluidina oppure con verde di metile-pironina Merck. Ribonucleasi cristallizzata priva di attività proteasica della Worthinton Biochemical Laboratory New-Jersey U.S.A. I controlli con luce ultravioletta furono eseguiti su lunghezza d'onda di 2750 Å (per la tecnica usata ved. E. URBANI, « Rivista di Biologia », vol. XLI, 1949, p. 340).

CONSIDERAZIONI. — I risultati esposti in questa Nota ribadiscono anzitutto l'importanza delle sostanze citolitiche nell'induzione degli arti soprannumerari. Le mie ricerche convalidano inoltre l'ipotesi dell'importanza, anche per queste induzioni, dell'acido ribonucleico, e ciò in base a varie considerazioni. Innanzi tutto le ricerche del Brachet, che ho sopra ricordate, dimostrano la sua importanza nell'induzione embrionale; inoltre, come già dissi nella mia Nota IV, risulta con sufficiente chiarezza che gli abbozzi, considerati rispetto al loro potere artoformativo, seguono un gradiente coincidente con il gradiente dell'acido ribonucleico; si è visto che si è verificata la premessa essenziale, che cioè questo acido anche nella necrosi da röntgenirradiazione viene messo in libertà, cioè si diffonde. Nulla posso affermare di sicuro, in base alle mie ricerche, sulla questione se l'acido ribonucleico sia l'unico ad avervi importanza.

I risultati da me ottenuti e che hanno rilevato, usando la stessa tecnica, tanta differenza tra *Bufo vulgaris* e *Rana esculenta*, mostrano come anche per l'induzione degli arti soprannumerari abbiano simultaneamente importanza sia lo stimolo che la « competenza » del territorio sul quale si agisce. Per la natura dello stimolo non è finora emersa alcuna notevole differenza tra le due specie. Ciò pone meglio in evidenza l'altro fattore: la « competenza » della somatopleura a dare il primo impulso per la formazione di arti soprannumerari, la quale in *Bufo vulgaris* è, in rapporto allo stimolo usato, sufficiente, mentre in *Rana esculenta* non lo è. Insisto nel considerare la « competenza » correlativamente allo stimolo usato; non escludo affatto che anche in *Rana esculenta* una « competenza » artoformativa esista, tanto più che molti numerosi sono in questa specie i casi di arti soprannumerari trovati in natura.

Si vedrà in seguito come questo concetto dell'importanza dell'acido ribonucleico possa valere per il *Triton*, ove arti soprannumerari si ottengono facilmente mediante trapianti di abbozzi normali, come il placode olfattorio e l'otocisti, i quali — è da notare — sono ricchi in acido ribonucleico. Ricordo solo che vari Autori, particolarmente il Brachet, cercano di giungere ad una visione unitaria rispetto all'importanza di questo acido sia nell'induzione normale che nell'induzione da sostanze morte.

CONCLUSIONI. — In *Bufo vulgaris*, gli abbozzi che da embrioni trattati con dosi fortemente letali di raggi X vengano trapiantati su embrioni normali, vanno gradualmente in necrosi e liberano sostanze citolitiche, ivi compreso l'acido ribonucleico (o i suoi prodotti di scissione). A questo segue la formazione di gemme soprannumerarie di arto. Tutto lascia ritenere che a detto acido debba annettersi grande importanza in tali induzioni.

Risulta più compiutamente di prima che la differente possibilità di ottenere arti soprannumerari a seconda che si sperimenti, con le stessa tecnica, in *Rana esculenta* o in *Bufo vulgaris*, essendo uguale il comportamento dell'acido ribonucleico, è in dipendenza all'essere differente nelle due specie la « competenza » artoformativa.

Biologia. — *Comportamento delle cellule somatiche e germinali nello sviluppo e nel differenziamento delle gonadi in una razza differenziata di «Rana esculenta»* (*). Nota di ARMANDO SABBADIN, presentata (**) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Nel differenziamento sessuale degli Anfibi, un ruolo della massima importanza sembrano avere i tessuti somatici della gonade, localizzati sia nella *cortex* (cellule follicolari) che nella *medulla*. Essi verrebbero influenzati per primi dalla costituzione genetica dell'individuo, mediante i differenziatori sessuali primari. Così attivati, determinerebbero poi l'evoluzione degli elementi germinali, inizialmente bipotenti, verso un processo di ovogenesi o di spermatogenesi, per mezzo della produzione di differenziatori sessuali secondari. Quello maschile, più esattamente, inizierebbe la sua azione provocando la migrazione degli elementi germinali, prima contenuti nella *cortex*, in seno alla *medulla*.

In definitiva, territorio corticale e territorio midollare, attivati, sono il substrato per la formazione della gonade rispettivamente femminile e maschile. L'uno dei due territori, entrambi inizialmente presenti nella gonade, finisce cioè con l'avere il sopravvento sull'altro. Gli esperimenti di parabiosi indicherebbero che questo sopravvento dell'uno dei due tessuti si esplica attraverso ad una vera e propria inibizione sull'altro, per mezzo di una sostanza diffusibile, per cui si è fatta la distinzione fra differenziatori sessuali secondari ad azione stimolante ed inibente (rispettivamente *corticina* + e —, e *medullarina* + e —) (1).

Questa teoria dei differenziatori sessuali trova una seducente conferma nelle azioni stimolatrici o inibitrici sui territori corticale e midollare, esercitate dagli ormoni sessuali o cortico-surrenali, le quali possono provocare un'inversione sessuale (2).

Nei maschi delle razze così dette indifferenziate, una tale inversione si verifica spontaneamente, perchè in essi i differenziatori di mascolinità prendono il sopravvento solo tardivamente su quelli di femminilità, per cui la gonade attraversa una iniziale fase femminile.

Le presenti osservazioni sono state effettuate, con esame istologico e conteggi cellulari, su girini della *Rana esculenta* di Padova, che la Facco ha dimostrato appartenere ad una razza ben differenziata (3). Nell'impostare le mie ricerche, mi

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Padova, diretto dal prof. U. D'Ancona, con un sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Ringrazio il prof. E. Vannini per la sua guida.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) E. WITSCH, *Hormonal regulation of development in lower Vertebrates*. «Cold Spring Harbor Symposia», vol. 10, p. 145 (1942); *Geschlechtsbestimmung durch Chemikalien*. «Arch. J. Klaus-Stiftung», Bd. 23, p. 525 (1948).

(2) E. VANNINI, *Confronto fra le azioni mascolinizzanti del progesterone e del testosterone sulle gonadi di girini di «Rana agilis»*. «Arch. Zool. Ital.», vol. 33, p. 333 (1948).

(3) E. FACCO, *Il differenziamento sessuale nella «Rana esculenta» di Padova*. «Atti Ist. Veneto Sc. Lett. Arti», to. 108 (1950), (in corso di stampa).

sono chiesto fino a qual punto il suddetto schema interpretativo si accordi con l'evoluzione della struttura della gonade normale; quali aspetti morfologici, cioè, testimonino della successiva entrata in azione dei differenziatori sessuali. Saranno questi aspetti morfologici i primi criteri per una diagnosi precoce del sesso. Assai importante mi è sembrato pure determinare come vada stabilendosi tra i due territori somatici quella netta distinzione, che è richiesta dalla diversità ed addirittura dall'antagonismo dei loro meccanismi d'azione. È noto infatti come questa distinzione non sia possibile su una base puramente citologica, e come, almeno negli stadi più precoci, essa non appaia a tutti gli Autori ben netta.

In proposito, per quanto riguarda le cellule follicolari, mentre Bouin e Swingle⁽⁴⁾ propendono per l'opinione del Waldeyer della loro esclusiva origine a spese delle cellule del mesotelio peritoneale, altri Autori parlano di una natura mista dei follicoli, che risulterebbero, oltre che di cellule peritoneali, anche di cellule mesenchimatiche che avrebbero accompagnato le cellule germinali nella loro migrazione, a partire dallo stadio a cresta germinale impari mediana (Witschi, Cheng)⁽⁵⁾.

Secondo Bouin e Cheng, da queste stesse cellule mesenchimatiche, si formerebbero, per condensazione, i cordoni midollari che sarebbero quindi di origine prevalentemente intragonadica. Le strette relazioni che esisterebbero tra i due tessuti somatici, negli stadi precoci della formazione della gonadi, se confermate, indicherebbero il loro originario carattere indifferenziato. Per altri Autori, invece, i cordoni midollari avrebbero origine extragonadica, o per migrazione dall'area mesonefritica (Witschi, Swingle), oppure per migrazione dal tessuto interrenale (Vannini)⁽⁶⁾. Ciò sembrerebbe indicare una natura differente dei due tessuti fin dagli stadi più precoci. Poichè si ammette, tuttavia, che le cellule follicolari accompagnino gli elementi germinali nella loro migrazione in seno alla *medulla*, negli esemplari geneticamente maschili si pone il problema di una loro assimilazione in seno ad un territorio già divenuto mascolinizzante.

RELAZIONI FRA I DUE TESSUTI SOMATICI NEL CORSO DELLO SVILUPPO DELLA GONADE. — Le prime cellule follicolari sono elementi mesenchimatici che si intromettono tra le cellule germinali allo stadio di cresta genitale impari mediana, accompagnandole nella loro migrazione verso il mesotelio celomatico, in corrispondenza del quale, ai lati del mesenterio, si formano due listerelle appiattite

(4) M. BOUIN, *Histogenèse de la glande génitale femelle chez « Rana temporaria L. »*. « Arch. Biol. », to. 17, p. 201 (1901); W. W. SWINGLE, *The germ cells of Anurans. I. The male sexual cycle of « Rana catesbeiana » larvae*. « Journ. Exper. Zool. », vol. 32, p. 235 (1921); II. *An embryological study of sex differentiation in « Rana catesbeiana »*. « Journ. Morph. », vol. 41, p. 441 (1926).

(5) E. WITSCHI, *Experimentelle Untersuchungen über die Entwicklungsgeschichte von « Rana temporaria »*. « Arch. mikr. Anat. », Bd. 85, Abt. II, p. 9 (1914); T. H. CHENG, *The germ-cell history of « Rana cantabrigensis Baird »*. I. *Germ-cell origin and gonad formation*. II. *Sex differentiation and development*. « Zeitschr. Zellforsch. mikr. Anat. », Bd. 16, p. 497, p. 542 (1932).

(6) E. VANNINI, *Sull'origine interrenale dei cordoni della rete e dei corpi grassi durante lo sviluppo delle gonadi e sulla partecipazione dell'interrenale ai processi di intersessualità giovanile nella « Rana agilis »*. « Atti Accad. d'Italia », vol. 13, p. 731 (1942).

che rappresentano le creste genitali pari. Le cellule del mesotelio celomatico rivestono ora gli elementi germinali e penetrano tra di essi, cooperando alla formazione del follicolo. Frattanto, in sede retroperitoneale, compaiono il blastema mesonefrico (più laterale) e quello interrenale (più mediale), sotto forma di abbozzi ben distinti. Già da questo stadio assai precoce di listerelle genitali, inizia, verso di esse, la migrazione di cellule del blastema interrenale, in forma di cordoni che fiancheggiano la vena cava posteriore. Sono gli stessi cordoni che, più tardi, a gonade già formata, costituiranno la *medulla* centrale. In questo stadio ho potuto rilevare che le loro cellule penetrano fra gli elementi germinali e partecipano alla formazione dei follicoli. Soltanto gradualmente si passa dallo stadio a listerelle genitali, allo stadio a gonade con una *cortex* periferica includente gli elementi germinali e una *medulla* centrale ben distinta, attraverso ad aspetti intermedi in cui le cellule germinali, in migrazione, occupano ancora tutto lo spessore della gonade, e le cellule midollari, in continua penetrazione, seguivano a partecipare al loro avvolgimento, entrando anche largamente in contatto con il mesotelio celomatico. Anche allo stadio di gonade primordiale sessualmente bipotente, tuttavia, la *medulla* centrale prende in più punti contatto con il mesotelio celomatico, interrompendo la continuità del territorio corticale. È del tutto eccezionale, in questi primi stadi, la presenza di una cavità genitale primaria beante, sia pure in forma di fessura, anche nelle sezioni prive di *medulla*.

Queste osservazioni mi permettono di affermare, nei miei esemplari, l'origine mista del tessuto somatico corticale, ad opera di cellule peritoneali, di cellule mesenchimatiche accompagnanti le cellule germinali nella loro iniziale migrazione dalla cresta genitale impari mediana, e delle prime cellule dei cordoni midollari, che iniziano la loro migrazione verso la gonade già allo stadio di listerelle genitali pari. La compenetrazione dei due tessuti somatici della gonade e la comune partecipazione alla formazione dell'epitelio follicolare, denoterebbero il loro iniziale carattere indifferenziato.

Il saldamento longitudinale fra i cordoni midollari, a disposizione metamerica, si verifica solo più tardi, a differenziamento sessuale già iniziato, per cui alcune sezioni trasversali sono prive di *medulla*. L'involucro follicolare degli elementi germinali è assai raramente completo; il suo grado di completezza è in relazione con la presenza o assenza di *medulla* nelle singole sezioni, con la diminuzione di volume degli elementi germinali per riassorbimento del tuorlo, con il loro aumento di numero, ed infine con l'attività moltiplicativa delle cellule somatiche corticali.

Quando inizia il differenziamento sessuale maschile, si nota una invasione massiva della regione corticale ad opera della *medulla*, in buona parte di nuova proliferazione, che penetra aggirando gli elementi germinali e completando il loro involucro follicolare; molte cellule germinali vengono allora sospinte (o migrano attivamente) in seno alla *medulla*, accompagnate, almeno in parte, dalle cellule follicolari. Scompare così di nuovo la distinzione fra regione corticale e regione midollare. Il tessuto somatico corticale viene così, in buona parte, assimilato dal tessuto midollare, ormai decisamente di natura testicolare e ad azione mascolinizzante.

Quando invece inizia il differenziamento femminile, continua dapprima la penetrazione di tessuto midollare, sebbene in proporzioni minori che nella gonade

maschile, ma esso non assume gli intimi rapporti con la regione corticale riscontrati nei maschi. Rimane così sempre possibile la distinzione fra territorio corticale e *medulla* centrale, distinzione che va anzi facendosi sempre più notevole, perchè, colla rapida distensione della gonade, nella maggior parte delle sezioni, un'ampia cavità genitale primaria beante separa le due formazioni. Nella *cortex* compaiono nidi di ovogoni, che testimoniano del sicuro orientamento in senso femminile della gonade. Ho potuto notare, in più sezioni, cellule midollari disperse nella cavità genitale, alcune delle quali sembrano in procinto di essere assorbite nella *cortex*. L'orientamento in senso femminile delle cellule germinali indicherebbe l'attività femminizzante della *cortex* stessa.

Queste mie osservazioni sembrano indicare che, nelle razze differenziate, quello dei due tessuti somatici che viene attivato può, almeno parzialmente, assimilare l'altro, che si dimostra ancora indifferente.

ATTIVITÀ DELLE CELLULE SOMATICHE E GERMINALI NEL DIFFERENZIAMENTO SESSUALE. — Negli stadi più precoci, prima che la gonade abbia assunto la sua forma definitiva, la penetrazione della *medulla* sembra quasi meccanicamente ostacolata dalla presenza, nella regione dell'ilo, di elementi germinali in migrazione. Tali elementi germinali presentano una attività mitotica assai lenta, per cui il loro numero, in questi primi stadi, rimane quasi costante.

Un notevolissimo aumento nella penetrazione della *medulla*, si verifica, invece, quando gli elementi germinali hanno assunto la tipica disposizione periferica; i cordoni midollari aumentano allora in estensione longitudinale, pur senza arrivare alla saldatura. In questo stesso momento si riscontrà un aumento numerico considerevolissimo delle cellule germinali (fig. 1). Anche le cellule somatiche corticali sono aumentate di numero nelle sezioni, sia per moltiplicazione, sia per lo spostamento degli elementi germinali accompagnati dal loro follicolo (in parte, come già detto, di natura midollare), sia infine a causa della distensione della gonade conseguente a questo spostamento.

L'inizio del differenziamento sessuale maschile è caratterizzato, prima ancora che dalla migrazione degli elementi germinali, da un continuato rapido aumento della *medulla*; questa disintegra letteralmente la regione corticale con numerose espansioni, aggirando le cellule germinali, di cui completa il follicolo, per lo più ancora incompleto nello stadio precedente. È in seguito a ciò che le cellule germinali vengono come strappate dalla *cortex* e sospinte in seno alla *medulla*. Così scompare la distinzione fra i due tessuti. Un comportamento analogo ha riscontrato Swingle in *Rana catesbeiana*. Questa è la causa per la quale il numero per sezione degli elementi somatici topograficamente corticali, nelle gonadi maschili dei primissimi stadi, si mantiene decisamente superiore che nelle gonadi femminili di età corrispondente (fig. 2).

Mi sembra che tale penetrazione della *medulla*, sia il primo segno della sua attivazione. Questa coincide con una inibizione dell'attività moltiplicativa degli elementi germinali, rivelata, più che dalla frequenza delle mitosi, dal conteggio degli elementi germinali. Infatti tali elementi, negli esemplari maschili, appaiono sempre in numero inferiore rispetto agli esemplari femminili, fino agli stadi più

tardivi, in cui la loro attività mitotica riprende attivamente in seno alla *medulla*, con formazione di nidi di spermatogoni (fig. 1).

L'inizio del differenziamento sessuale maschile non sembra contemporaneo in tutti gli esemplari. Inoltre esso è più precoce nella gonade destra, come ho potuto rilevare dal diverso comportamento della *medulla* nelle due gonadi e dal numero maggiore di elementi germinali per sezione, che si rinvencono a sinistra,

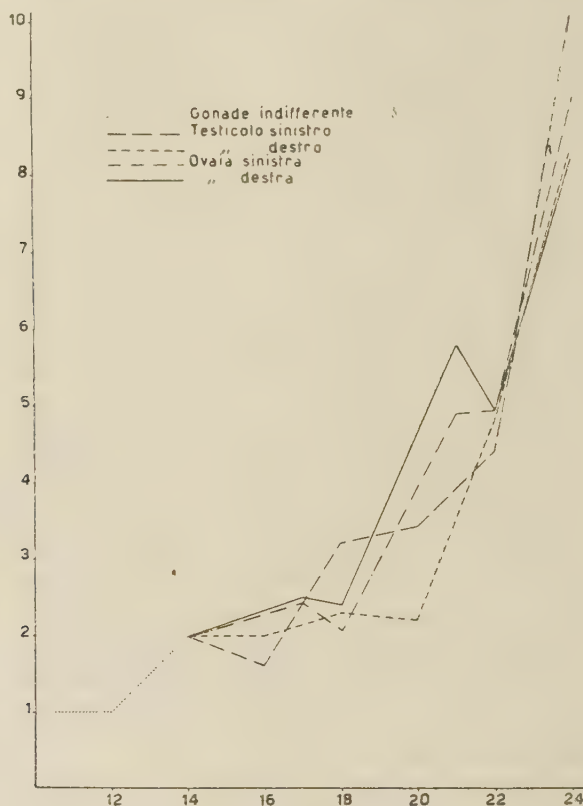


Fig. 1. - Curve indicanti le variazioni numeriche delle cellule germinali nel corso dello sviluppo e del differenziamento sessuale dei girini. Sulle ascisse l'età in giorni; sulle ordinate il numero medio delle cellule per sezione trasversale delle gonadi. Sono distinte con tratteggio differente le curve riferentisi alle gonadi indifferenti, maschili e femminili dei due lati.

indizio di una inibizione più tardiva della loro attività mitotica (fig. 1). Perciò a sinistra la regione topograficamente corticale si fa talora pluristratificata come succede regolarmente negli esemplari femminili. La gonade, in questi casi, si distende, e sono assai più frequenti le tracce di cavità genitale primaria beante, rarissime a destra. Il saldamento longitudinale dei cordoni midollari è più precoce negli esemplari maschili rispetto a quelli femminili.

Indizio sicuro del differenziamento femminile è la comparsa, nella *cortex*, di nidi di cellule germinali (ovogoni), che non si rinvencono mai nelle gonadi maschili. Tali nidi compaiono assai più tardi che i primi segni di orientamento

testicolare rilevabili nei maschi. Ritengo tuttavia che il comportamento dei cordoni midollari e l'attività mitotica delle cellule germinali, permettano una diagnosi del sesso femminile già in stadi più precoci. Infatti, fin dal periodo in cui si possono riconoscere le prime gonadi maschili, s'incontrano esemplari il cui probabile destino femminile sembra indicato dal numero relativamente basso di cellule midollari e dalla presenza di una evidente cavità genitale primaria fra *cortex* e

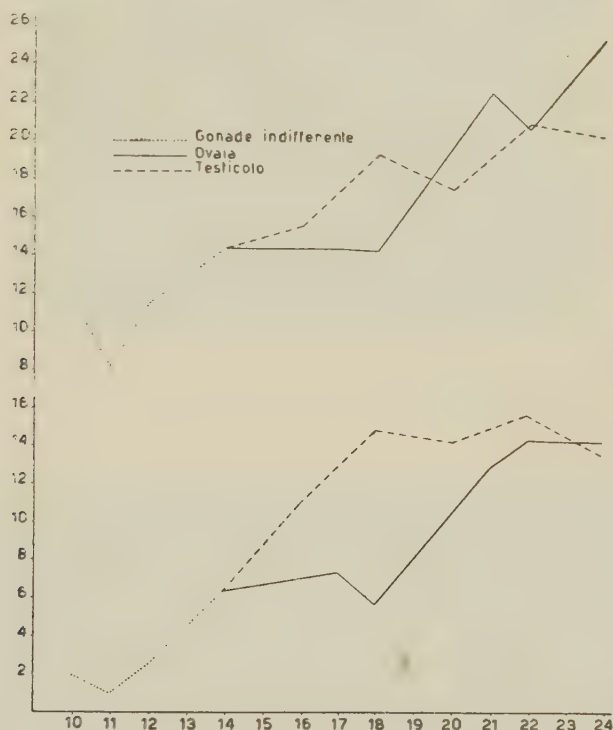


Fig. 2. - Curve indicanti le variazioni numeriche delle cellule somatiche delle gonadi nel corso dello sviluppo e del differenziamento sessuale dei girini. Sulle ascisse l'età in giorni; sulle ordinate il numero medio delle cellule per sezione trasversale delle gonadi. Il diagramma inferiore si riferisce alle cellule somatiche della *medulla*; quello superiore alle cellule somatiche della *cortex*. Sono distinte con tratteggio differente le curve riferentisi alle gonadi indifferenti, maschili e femminili. A partire dall'età di 18 giorni, i valori numerici riguardanti le gonadi maschili, vanno accolti con riserva, data l'intima compenetrazione dei tessuti corticale e midollare.

medulla in quasi tutte le sezioni. In queste stesse gonadi, anche in quelle sezioni in cui un abbondante tessuto midollare oblitera la cavità genitale primaria, esso non presenta mai nessuna tendenza a quella disintegrazione della regione corticale, con aggiramento degli elementi germinali, che è stata indicata come tipica per le gonadi che si orientano in senso maschile. Espansioni laterali della *medulla* sono assai rare e puramente casuali. Un tale comportamento hanno rilevato Bouin per *Rana temporanea* e Swingle per *Rana catesbeiana*.

Tale scarsità di *medulla* e il suo comportamento negli esemplari femminili, indicano una sua mancata attivazione e, probabilmente, l'entrata in azione dei

differenziatori femminizzanti di natura stimolatrice, a localizzazione corticale. Non ritengo infatti che in questo stadio si manifesti una inibizione sul tessuto midollare da parte della *cortex*. Ho già ricordato che alcune mie figure sembrerebbero piuttosto parlare in favore di una parziale assimilazione della *medulla* da parte della *cortex* stessa.

Più tardi, quando si sono già formati nidi di ovogoni, con l'aumentare della distensione della gonade, la *medulla* finisce col perdere la propria compattezza e comincia a scavarsi tappezzando la faccia profonda della *cortex*. Prende così origine la cavità genitale secondaria, destinata ad accrescersi con la comparsa degli ovociti.

I conteggi da me eseguiti dimostrano che, con l'aumentare di spessore della *cortex*, la media delle cellule somatiche corticali per sezione va facendosi più alta, e finisce col superare nettamente quella degli esemplari maschili. La media delle cellule midollari, come già detto, si mantiene sempre inferiore a quella degli esemplari maschili (fig. 2). Non ho riscontrato, negli esemplari femminili, quella differenza di comportamento nelle gonadi dei due lati, nei riguardi del differenziamento sessuale, che ho riscontrato negli esemplari maschili (fig. 1).

CONCLUDENDO, le osservazioni riferite dimostrano che, nelle primissime fasi di sviluppo, entro il tessuto somatico corticale della gonade si svolge una precoce immigrazione di quelle stesse cellule derivanti dal blastema interrenale, che più tardi formeranno la *medulla*. Anche nel corso dell'ulteriore sviluppo, i due tessuti somatici corticale e midollare presentano una parziale capacità di assimilarsi l'uno nell'altro.

Lo studio di tali fatti sembra portare qualche precisazione sull'attività svolta dai due tessuti durante il differenziamento sessuale. Perciò le osservazioni riferite possono essere inquadrare nell'ambito delle attuali concezioni sui fattori fisiologici regolanti lo sviluppo e la differenziazione delle gonadi, come verrà più ampiamente discusso nel lavoro per esteso, che è in corso di elaborazione.

Fisiologia. — *Ricerche sull'attività contrattile dei muscoli lisci intestinali.* — I. *Potenziamento dell'azione dell'acetilcolina per opera del 933 F (*)*. Nota di VIRGILIO MARTINI, presentata (**) dal Socio U. LOMBROSO.

La maggior parte delle ricerche sulla muscolatura dell'intestino è stata eseguita con due metodi fondamentali: l'osservazione dei movimenti delle anse intestinali di un animale laparatomizzato o la registrazione dell'attività contrattile di frammenti di intestino isolati e sospesi in un adatto bagno di soluzione salina.

In queste condizioni si registrano le risultanti delle contrazioni delle fibre longitudinali e delle fibre circolari: è stato ripetutamente tentato di scindere questi due differenti tipi di contrazioni usando speciali cannule che permettono di registrare le variazioni di lunghezza e di volume di un'ansa intestinale e di seguire quindi anche le contrazioni delle fibre circolari che sono particolarmente respon-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

sabili delle variazioni del calibro. Questo sistema però non permette un esatto giudizio dell'attività delle singole fibre.

Magnus⁽¹⁾, Demoor⁽²⁾ ed altri tentarono anche di isolare meccanicamente i vari strati della parete intestinale per studiarne le proprietà contrattili; ma i

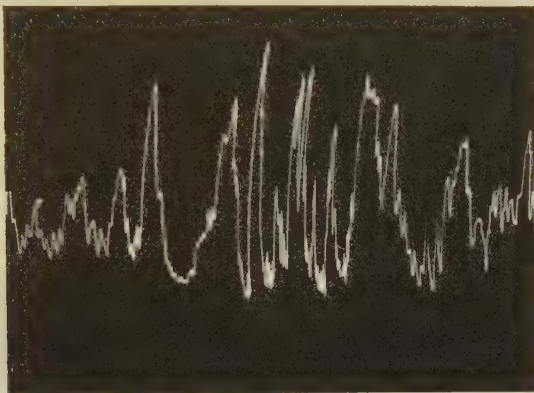


Fig. 1. — Intestino tenue di cane. Fibre «longitudinali» prelevate da poco tempo. Velocità del chimografo: mm 3 al m'. La velocità nei tracciati successivi è stata mantenuta sensibilmente costante.

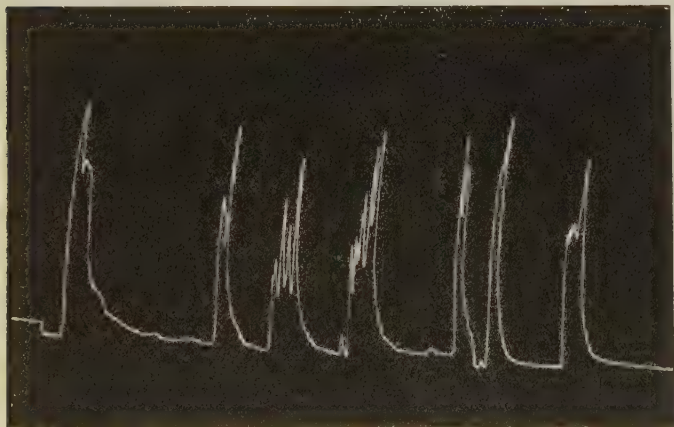


Fig. 2. — Intestino tenue di cane. Fibre «longitudinali». Contrazioni spontanee a tipo periodico.

risultati non furono sempre sicuri, probabilmente perchè i traumatismi portati alle tuniche muscolari potevano modificare notevolmente l'attività delle fibre muscolari stesse.

Per queste considerazioni mi parve utile ritornare alla tecnica più semplice, per lo studio isolato delle fibre longitudinali e circolari, ossia praticare il taglio

(1) R. MAGNUS, « Arch. f. die ges. Physiol. », 102, 349 (1904).

(2) J. DEMOOR, « Archives Intern. Physiol. », XXXIV, 380 (1931).

per l'isolamento del preparato di intestino, in direzione perpendicolare alla linea di inserzione del mesentere per ottenere un preparato di fibre circolari ed in senso parallelo per ottenere un preparato di fibre longitudinali.

Entrambi i lembi così isolati venivano collegati a due leve scriventi di eguale peso e lunghezza ed immersi in un bagno di Tirode ossigenato mantenuto a 38°.

Le prime osservazioni ci indicarono che i preparati di fibre longitudinali iniziavano quasi subito una serie di contrazioni spontanee, ampie e persistenti

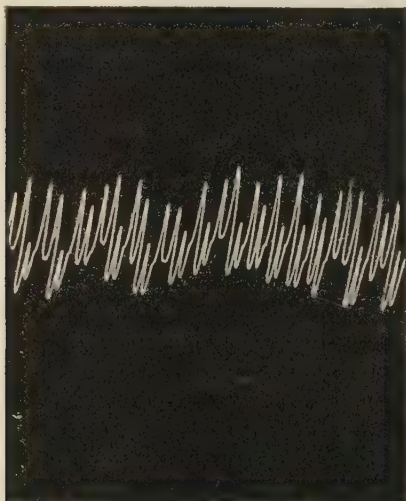


Fig. 3. - Intestino tenue di cane. Fibre «longitudinali» conservate per 24 h in ghiacciaia.

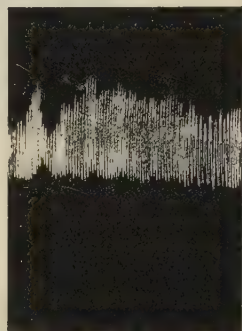


Fig. 4. - Intestino tenue di cane. Fibre «longitudinali» conservate per 48 h in ghiacciaia.

mentre i preparati di fibre circolari mostravano soltanto contrazioni molto piccole e talvolta completa immobilità.

In esperienze successive si notò anche che i due preparati avevano una differente sensibilità verso farmaci aggiunti al bagno: in genere le fibre longitudinali mostravano una sensibilità 10-100 volte maggiore rispetto alle fibre circolari.

Per questo fatto nelle esperienze successive posi i due preparati in due bicchierini eguali ma separati in modo da poter usare concentrazioni di farmaci adeguate ai due tipi di fibre.

Nella maggior parte delle esperienze preferii però studiare i vari fenomeni dapprima su preparati di fibre longitudinali che hanno una sensibilità e motilità molto più costante e ripeterli poi su preparati di fibre circolari.

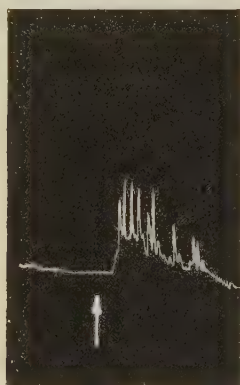
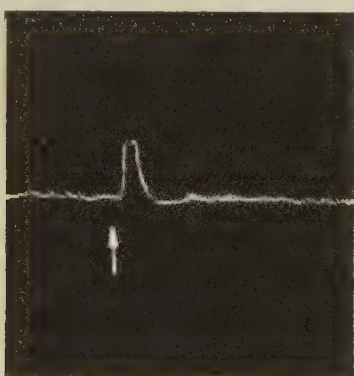
Dall'esame dei tracciati di preparati di fibre longitudinali (figg. 1-2) si nota la presenza di una serie di contrazioni spontanee di ampiezza e frequenza molto diverse da caso a caso e molto irregolari. Sovente si osservano alcune piccole contrazioni sovrapposte a contrazioni molto ampie. Questi due tipi di contrazioni spontanee erano stati interpretati dal Demoor come prova dell'attività contrattile dei due tipi di fibre muscolari intestinali: le contrazioni limitate corrispondereb-

bero all'attività delle fibre circolari e quelle di maggiore ampiezza all'attività delle fibre longitudinali.

Il tipo delle contrazioni varia anche notevolmente a seconda del tempo di conservazione dell'intestino.

I segmenti prelevati da poco presentano le normali contrazioni già ricordate, ma dopo un periodo variabile di conservazione in ghiacciaia essi mostrano contrazioni di minor ampiezza e vivacità ma più regolari (fig. 3) finchè molte volte il tracciato appare formato da una serie di contrazioni periodiche ritmiche e quasi perfettamente eguali una all'altra (fig. 4).

Prolungando ancora la conservazione in ghiacciaia (3-5 giorni) si nota che in genere scompare la motilità automatica e persiste ancora per qualche tempo (24-36 ore) la eccitabilità di fronte a farmaci aggiunti, ad esempio acetilcolina.



Figg. 5-6. - Intestino tenue di cane. Fibre «circolari». Bagno cc. 20.

Trattamento con 50 γ di acetilcolina

Si potrebbe supporre che la motilità spontanea sia prodotta dall'azione dei plessi nervosi parietali e che la reattività alle sostanze chimiche sia propria anche delle fibre muscolari lisce, più resistenti alla conservazione a bassa temperatura.

Fenomeni simili furono osservati anche da Ambache⁽³⁾ ed interpretati come conseguenza di un blocco esercitato dal freddo sulla liberazione di acetilcolina in corrispondenza del plesso di Auerbach. Viceversa Emmeling e Feldberg⁽⁴⁾ ammettono che il soggiorno a bassa temperatura danneggia anche le fibre muscolari e ne modifichi quindi l'attività e la reattività.

Dopo aver constatato la scarsa attività contrattile dei preparati di fibre circolari provai a modificare la direzione del taglio, in quanto secondo le ricerche di Franklin e Longhman⁽⁵⁾ le fibre longitudinali e le fibre circolari non sarebbero disposte in senso perfettamente perpendicolare ma formerebbero delle specie di anse disposte più o meno obliquamente una rispetto all'altra.

(3) N. AMBACHE, «Amer. Journ. of Physiol.», 104, 266 (1946).

(4) N. EMMELING e W. FELDBERG, «Amer. Journ. of Physiol.», 106, 482 (1947).

(5) K. J. FRANKLIN e G. P. MAHER LONGHAN, «Journ. of Physiol.», 94, 426 (1938).

Ho provato quindi a prelevare gli anellini di intestino obliquamente, sia in senso orale che aborale, per evitare di recidere le fibre oblique: i risultati sperimentali non sono stati migliori dei precedenti.

Successivamente modificai la composizione chimica del Tirode usato: Demoor consiglia infatti di usare per lo studio delle fibre circolari intestinali un bagno di Tirode contenente una quantità di Calcio ridotta alla metà.

King e collaboratori⁽⁶⁾ osservarono poi che le fibre muscolari circolari della «muscularis mucosae» del tenue di cane sono molto più vivaci se sono immerse in Tirode preparato con una quantità doppia di KCl (gr. 0,4 per litro) e senza l'aggiunta di sali di $MgCl_2$.

Ho provato quindi un Tirode preparato secondo Demoor e secondo King per lo studio delle fibre circolari, ma i risultati non furono molto più favorevoli.

Avendo a disposizione preparati di intestino che mi permettevano di studiare isolatamente la contrazione di due sistemi di fibre che si comportano in molti casi in senso antagonista, mi parve degno di studio provare se i due sistemi stessi si comportavano egualmente di fronte a sostanze agenti elettivamente sul sistema nervoso autonomo.

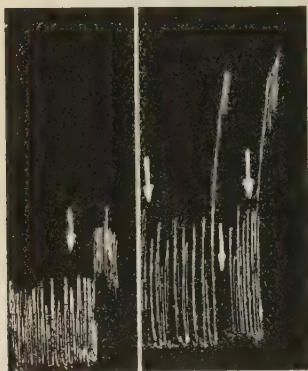


Fig. 7. - Intestino tenue di gatto.
Fibre «longitudinali».

Le frecce indicano:

1 = 0,25 γ acetilcolina

2 = 30 γ 933 F

3 = 0,25 γ acetilcolina

4 idem.

Questa indagine era in parte giustificata dal fatto che le sostanze para ed ortosimpaticomimetiche hanno molte volte un'azione duplice sull'intestino a seconda del modo di applicazione, della dose e così pure hanno un effetto duplice i nervi motori che si portano all'intestino (Spadolini)⁽⁷⁾.

Per queste ragioni saggiai l'azione dell'acetilcolina, dell'adrenalina e dei rispettivi farmaci inibitori od invertitori: 933 F ed atropina.

Le risposte ottenute furono simili a quelle date da preparati comuni di intestino isolato (figg. 5-6-7-8-9-10).

Le fibre longitudinali mostrano sempre una elevata sensibilità verso l'acetilcolina anche a forte diluizione (sino a 1/1.200.000.000) mentre le fibre circolari richiedono concentrazioni molto più elevate (1/400.000).

Il trattamento con adrenalina (1/400-500.000) produsse la caratteristica inibizione dei movimenti automatici e del tono, sia sulle fibre circolari che sulle longitudinali.

Risultati più interessanti mi diede lo studio dell'azione del 933 F. Questa sostanza, alla diluizione di 1/20.000.000-1/650.000, produce un effetto tonico sulle fibre muscolari longitudinali e ne provoca talvolta una lieve contrazione; a concentrazioni maggiori (1/40.000) produce un forte aumento della motilità spontanea e del tono muscolare (fig. 9).

(6) S. KING, B. GLASS e S. TOWNFORD, «Amer. Journ. of Physiol.», 148, 667 (1947).

(7) I. SPADOLINI, *La regolazione neuro-umorale dei visceri*. La nuova Italia, Firenze, 1946.

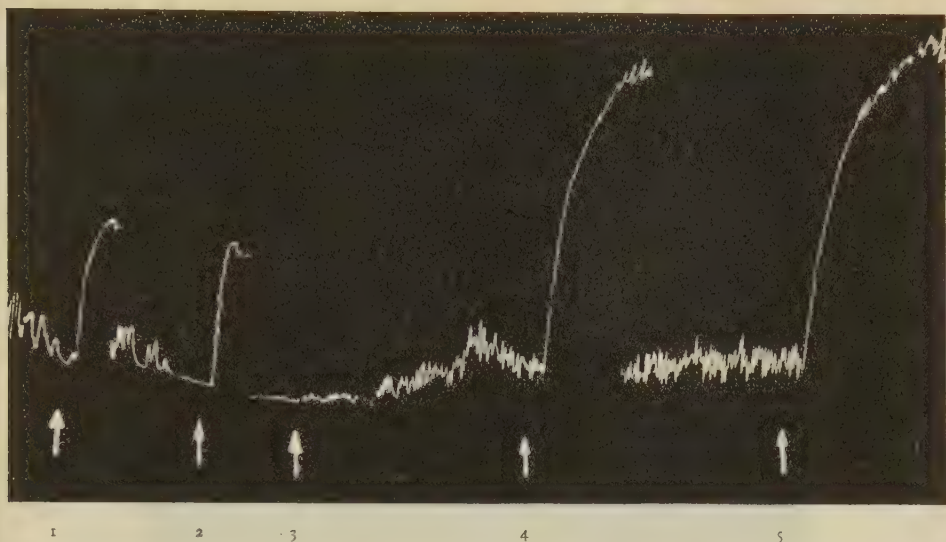


Fig. 8. — Bagno cc. 200. Intestino tenue di cane.

- 1 = 1 γ acetilcolina
 2 = 1 γ »
 3 = 10 γ 933 F
 4 = 1 γ acetilcolina
 5 = 1 γ »

È interessante notare che anche a dosi così elevate, capaci di far contrarre energicamente l'intestino, il 933 F non inibisce nè inverte l'azione dell'adrenalina.

Avendo osservato che a dosi appropriate il 933 F esercita un'azione contratturante sull'intestino analoga a quella di alcuni farmaci parasimpaticomimetici mi parve logico provare l'azione del 933 F stesso assieme o subito prima dell'acetilcolina.

A questo scopo provai piccole dosi di acetilcolina sino ad avere contrazioni piccole e costanti, successivamente lavai ripetutamente il preparato e lo trattai con piccole dosi di 933 F (figg. 7-8). Dopo nuovo lavaggio sino a rilasciamento del preparato prova le stesse dosi di acetilcolina usate poco tempo prima.

Dai tracciati 7-8-9-10-11 appare evidente che il 933 F produce un potenziamento dell'azione dell'acetilcolina sia sull'intestino tenue isolato di cavia, gatto, cane, sia su preparati di fibre longitudinali o circolari di gatto e di cane.

Il fenomeno del potenziamento dell'azione dell'acetilcolina per opera del 933 F si potrebbe spiegare, in via di ipotesi, molto semplicemente come prodotto dal blocco del sistema simpatico ad azione inibitrice sulla motilità intestinale.

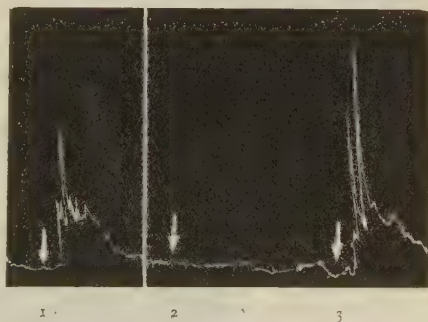


Fig. 9. — Intestino tenue di gatto. Fibre « circolari ». Bagno cc. 10.

- 1 = 50 γ acetilcolina
 2 = 200 γ 933 F
 3 = 50 γ acetilcolina

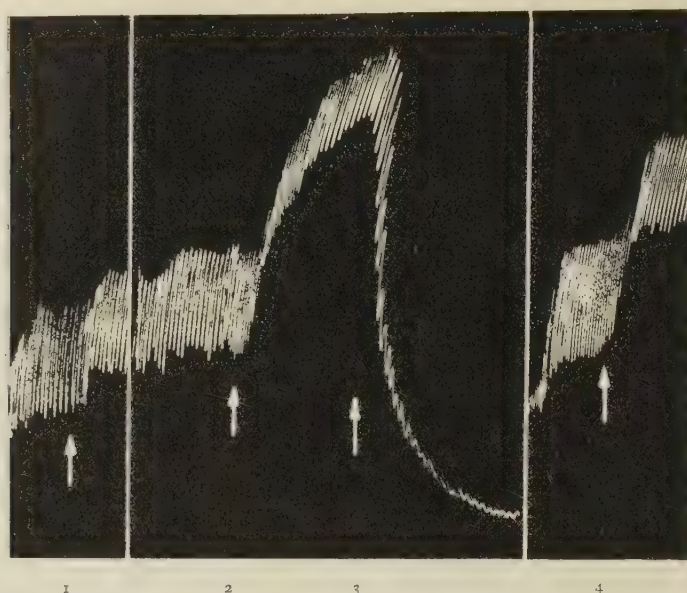


Fig. 10. - Intestino tenue di gatto.

- 1 = 0,05 γ acetilcolina
 2 = 500 γ 933 F
 3 = 50 γ adrenalina
 4 = 0,05 γ acetilcolina

A questa ipotesi si può obiettare che attualmente, nel caso dell'intestino, non si ammette più un antagonismo funzionale così rigido tra il sistema orto e parasimpatico.

Contro questa ipotesi sta anche il fatto che il potenziamento si ottiene anche con dosi abbastanza elevate di 933 F, che però sono sempre incapaci di bloccare

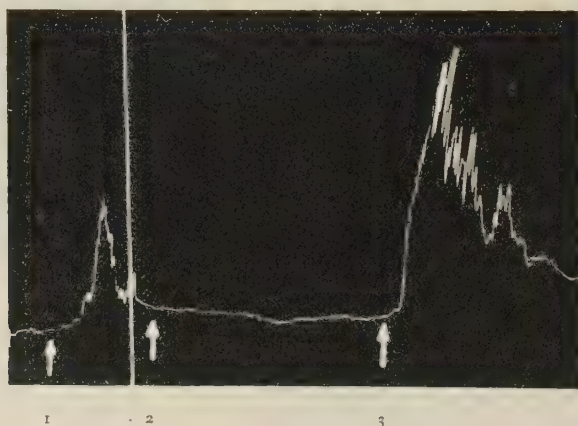


Fig. 11. - Intestino tenue di cavia. Fibre «circolari» eserinizate.

- 1 = 200 γ acetilcolina
 2 = 750 γ 933 F
 3 = 200 γ acetilcolina

l'effetto caratteristico dell'adrenalina (fig. 9) aggiunta al bagno, e quindi con molta probabilità saranno anche incapaci di bloccare la simpatina liberata dalle fibre ortosimpatiche nelle pareti intestinali.

Sempre in via di ipotesi si potrebbe tentare di spiegare il fenomeno suddetto del potenziamento come dovuto ad un blocco effettuato dal 933 F, sui recettori a tipo inibente (sostanza I secondo Spadolini⁽⁷⁾) e quindi con una maggiore efficacia dell'acetilcolina aggiunta sulle sostanze ad azione motrice (sostanze E secondo Spadolini).

Alla soluzione di questo problema intendo contribuire con ulteriori ricerche.

Fisiologia. — *Sulla sopravvivenza e motilità di segmenti isolati di intestino crasso e stomaco umani*^(*). Nota di UGO DACHÀ e VIRGILIO MARTINI, presentata ^(**) dal Socio U. LOMBROSO.

Recentemente uno di noi (V. Martini)⁽¹⁻²⁾ ha usato un metodo semplice per studiare l'attività contrattile delle fibre muscolari lisce longitudinali e circolari dell'intestino isolato ed ha esposto i risultati ottenuti studiando l'azione di alcuni farmaci (acetilcolina, atropina, adrenalina, 933 F, ergotamina, eserina, sali di Bario) su detti preparati.

Continuando le ricerche ci parve interessante estendere le esperienze allo stomaco ed all'intestino crasso ed, avendo uno di noi facilmente a disposizione frammenti di stomaco e di intestino umani prelevati durante operazioni chirurgiche, abbiamo creduto opportuno di studiarne le loro proprietà motorie con la tecnica descritta nelle altre Note.

Nella letteratura sono scarsissimi i dati sperimentali su preparati di intestino e stomaco umani isolati e le nostre ricerche servono pure a colmare questa lacuna.

Per lo stomaco abbiamo sperimentato con frammenti tratti dalla grande curvatura, dalla regione prepilorica e dal piloro. Tali frammenti, prelevati durante l'atto operatorio, venivano immersi subito in Tirode e conservati in ghiacciaia sino al momento del montaggio nel bagno salino caldo.

Di ogni pezzo si prelevava in genere qualche lembo muscolare tagliandolo in diverse direzioni e se ne saggiava la motilità spontanea e provocata con farmaci diversi.

Anche per l'intestino e lo stomaco umani si è potuto osservare la facile sopravvivenza (tre o quattro giorni) mantenendoli alla temperatura vicino allo zero. I preparati molto freschi presentavano quasi sempre movimenti spontanei assai vivaci che andavano poi attenuandosi con la conservazione a bassa temperatura, pur conservandosi ancora per più di un giorno la sensibilità verso i farmaci comuni.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) V. MARTINI, «Atti dell'Accademia dei Lincei», in corso di stampa.

(2) V. MARTINI, «Atti dell'Accademia dei Lincei», in corso di stampa.

Nel caso dello stomaco, prelevando un lembo muscolare in vicinanza della grande curvatura, ed in direzione parallela ad essa, si ottennero quasi sempre preparati molto vivaci che davano tracciati caratteristici (fig. 1) formati da gruppi di una ventina di piccole contrazioni ritmiche seguite poi da una ampia e rapida contrazione. Su questi preparati era difficile studiare l'effetto di farmaci contratturanti data la presenza di contrazioni spontanee massimali, ma si poté ugualmente dimostrarne l'effetto (ad esempio dell'acetilcolina) ricorrendo all'azione inibitoria dell'adrenalina.

Dalla figura 2 appare evidente come i movimenti spontanei vengano bloccati quasi completamente dall'adrenalina e che in tali condizioni l'aggiunta di acetil-



Fig. 1. - Stomaco di uomo. Fibre «longitudinali» prelevate parallelamente alla grande curvatura.

colina ($1/400.000.000$) provochi una contrazione seguita poi dalle contrazioni piccole già ricordate, che si prolungano per molto tempo senza che intervengano nuove contrazioni massimali.

Si può anche notare come il tracciato della normale attività del preparato (fig. 1) rassomigli moltissimo alle cosiddette « contrazioni da fame » registrate nello stomaco *in toto* di mammiferi.

Portando il nostro esame alle tuniche muscolari della regione prepilorica abbiamo notato che le fibre «longitudinali» presentano una serie di contrazioni ritmiche quasi eguali una all'altra, molto vivaci e regolari. Il trattamento con atropina ($1/200.000$) provoca un arresto iniziale delle contrazioni seguito da una ripresa dell'attività motoria, però non più regolare come prima (fig. 3).

Successivamente, su altri frammenti di fibre «longitudinali» della regione prepilorica, abbiamo saggiato anche l'azione dell'acetilcolina e dei sali di Bario.

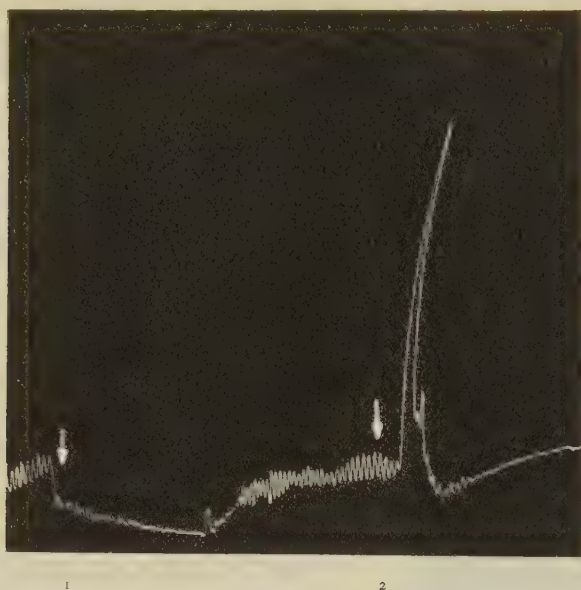


Fig. 2. — Continuazione del tracciato precedente.

1 = 50 γ adrenalina
2 = 0,05 γ acetilcolina

La prima, alla diluizione di 1/4.000.000, produce una netta contrazione iniziale (fig. 4) seguita poi da una serie di 4-5 contrazioni minori.

Il BaCl₂ alla diluizione solita di 1/40.000, provoca una serie di contrazioni molto ampie e vivaci, che scompaiono con un lavaggio ripetuto.

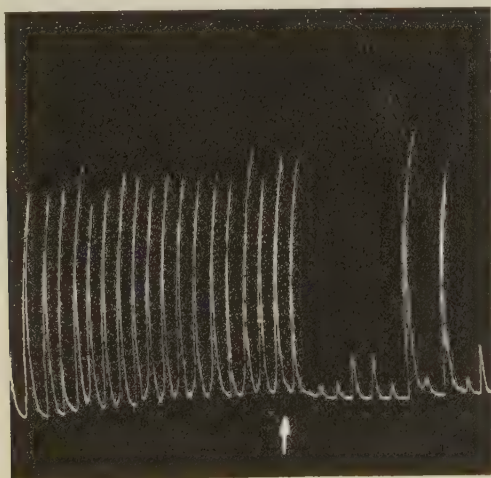


Fig. 3. — Stomaco di uomo. Fibre «longitudinali» della regione prepilorica.

1 = 100 γ atropina

Anche su questi preparati si è potuto confermare il fenomeno già osservato sull'intestino tenue del potenziamento dell'azione dell'acetilcolina per opera dei sali di Bario (fig. 4).

Lo studio della regione pilorica ci ha dato risultati analoghi a quelli dell'intestino, soltanto che, avendosi in questa regione un forte predominio numerico di fibre « circolari » sulle fibre « longitudinali », i preparati di queste ultime hanno dato contrazioni poco evidenti e piccole, mentre quelli di fibre circolari presentavano movimenti spontanei regolari sia pure di piccola ampiezza (fig. 5).

Il trattamento con acetilcolina ($1/4.000.000$) produce una contrazione iniziale vivace ed ampia seguita da un gruppo di contrazioni toniche e ritmiche che cedono col lavaggio ed a cui seguono contrazioni automatiche irregolari abbastanza ampie (fig. 5).

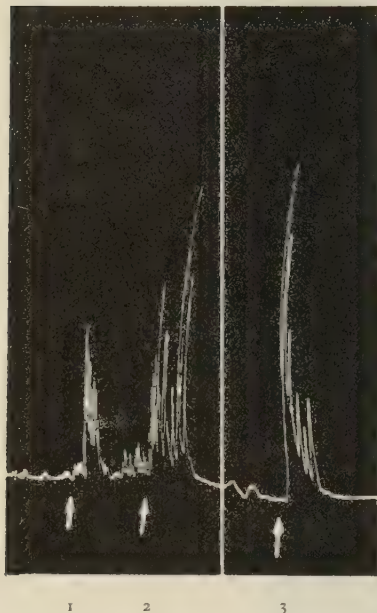


Fig. 4. - Stomaco di uomo. Fibre «longitudinali» regione prepilorica.

1 = 5 γ acetilcolina

2 = 500 γ $BaCl_2$

3 = 5 γ acetilcolina

Anche per lo studio della motilità dell'intestino crasso siano ricorsi a frammenti di intestino umano prelevati durante atti operatorii e conservati con le modalità prima riferite.

Abbiamo studiato particolarmente frammenti del sigma da cui abbiamo prelevato segmenti di « tenie », come esempi di muscolatura longitudinale, ed anelli trasversali di parete, come preparati di fibre « circolari ».

Le fibre « longitudinali » presentavano talvolta una motilità spontanea accentuata (figg. 6-7) consistente in contrazioni ampie e ritmiche

che si succedevano abbastanza regolarmente a contrazioni più piccole. Il quadro complessivo si rassomiglia alquanto a quello dato dai preparati di stomaco prelevati in vicinanza, ed in direzione parallela, alla grande curvatura (fig. 6).

Queste contrazioni periodiche si possono anche paragonare alle onde di 1°-2°-3° ordine osservate da Posey e collaboratori⁽³⁾ nel tenue e nel colon di uomo. Questi ricercatori infatti registrarono otticamente le variazioni di pressione del tenue e del colon umano introducendovi due palloni registratori attraverso aperture fistolose. Essi notarono tre tipi di variazioni di pressione: un primo tipo dato da « onde » piccole e ritmiche (onde di 1° ordine), un secondo tipo rappresentato da contrazioni improvvise ampie e brusche (onde di 2° ordine), ed infine alcune variazioni ampie dovute alla sovrapposizione di onde di 1° e di 2° ordine (onde di 3° ordine).

I risultati di questi autori erano anche in accordo con quelli ottenuti da Templeton⁽⁴⁾ e collaboratori studiando l'attività motoria dell'intestino crasso del

(3) F. L. J. POSEY, W. H. DEARING, W. G. SAUER, F. A. BARGEN, C. F. CODE, « Proceed. of Staff Meet. of Clin. Mayo », 23, 249 (1948).

(4) R. D. TEMPLETON, S. LAWSON, F. HAMPDEN, « Amer. Journ. of Physiol. », 96, 667 (1931).

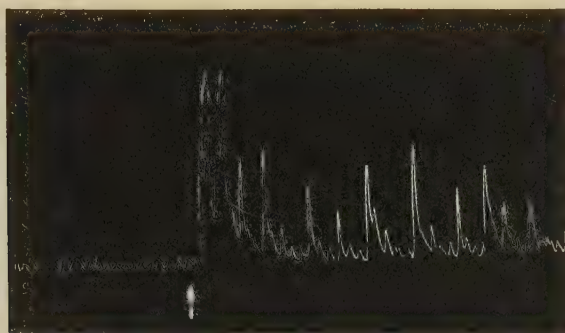


Fig. 5. - Stomaco di uomo. Fibre « circolari » del piloro.

1 = 0,5 γ acetilcolina

cane e con quelli di Adler, Atkinson, Ivy⁽⁵⁾ ricavati dallo studio della motilità del colon umano.

Sui preparati di fibre « longitudinali » abbiamo saggiato anche l'azione dell'acetilcolina, dell'adrenalina e dei sali di Bario.

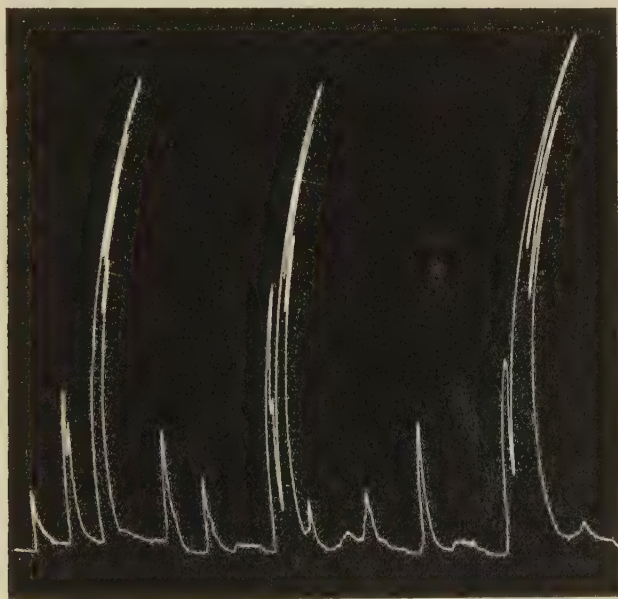


Fig. 6. - Sigma di uomo. Fibre « longitudinali ». Contrazioni spontanee.

La prima, alla diluizione di 1/2.000.000, produce un aumento rapido del tono ed una serie di vivaci contrazioni; l'aggiunta di adrenalina (alla concentrazione di 1/400.000) provoca la tipica caduta del tono e l'arresto dei movimenti spontanei (fig. 7).

(5) H. F. ADLER, A. J. ATKINSON, A. C. IVY, « Amer. Journ. Digest. Diseases. », 8, 197 (1941).

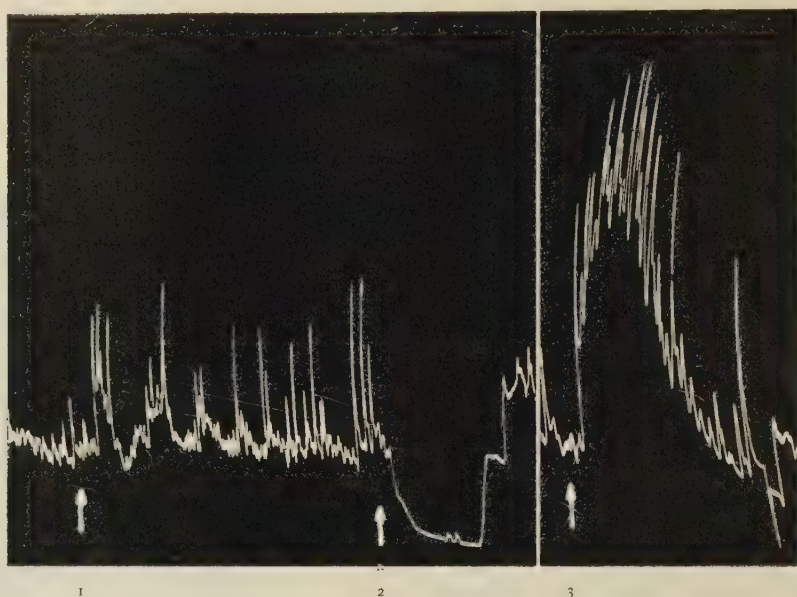


Fig. 7. — Sigma di uomo. Fibre «longitudinali».

1 = 10 γ acetilcolina
 2 = 50 γ adrenalina
 3 = 500 γ BaCl₂

I sali di Bario, alla diluizione di 1/40.000, provocano una forte contrazione iniziale seguita da un gruppo di contrazioni di carattere prevalentemente tonico, molto superiore a quello prodotto dalla acetilcolina alla diluizione precedentemente indicata.

I preparati di fibre «circolari» mostrarono una attività motoria molto più ridotta, per quanto sempre evidente, ed anche una minor sensibilità all'acetilcolina (fig. 8) e così pure verso i sali di Bario (1/40.000).

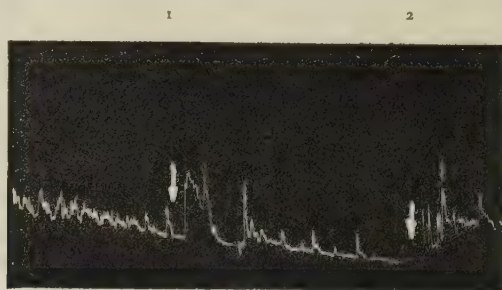


Fig. 8. — Sigma di uomo. Fibre «circolari».

1 = 50 γ acetilcolina
 2 = 500 γ BaCl₂

Dal complesso dei dati riferiti emerge anzitutto che i segmenti di intestino e di stomaco umano isolati presentano una attività spontanea molto cospicua ed in certi casi superiore a quella notata in preparati di altri animali. Inoltre essi risentono in modo particolare l'azione contratturante dell'acetilcolina, dei sali di Bario, dell'ergotamina e del 933 F e l'azione inibente dell'adrenalina e dell'atropina.

Patologia. — *Distribuzione della catalasi nel « Micrococcus lysodeicticus »* (*). Nota di GIORGIO CAVALLÒ, presentata(**) dal Corrisp. L. CALIFANO.

È noto il fenomeno scoperto da Penrose e Quastel⁽¹⁾ nel 1930 e cioè che, lisando con lisozima il *Micrococcus lysodeicticus*, si apprezza nel liquido di lisi una quantità di catalasi notevolmente più elevata di quella che si riesce ad apprezzare con il germe integro. Questo fatto è stato di recente utilizzato per la preparazione allo stato cristallino della catalasi batterica da parte di Herbert e Pinsent⁽²⁾, perchè la liberazione dell'enzima avviene in maniera quasi ideale e in modo altamente economico.

Il fenomeno di Penrose e Quastel è stato variamente interpretato, ma ancora non se n'è data una soddisfacente spiegazione. Questa è forse possibile adesso che sono più progredite le nostre conoscenze sulla disposizione a strati di vari componenti cellulari batterici.

Le presenti ricerche sono dirette a questo scopo e dimostrano probabile una disposizione della catalasi in almeno due strati: uno esterno, in immediato contatto con l'ambiente, ed uno più interno, situato probabilmente tra il primo strato di mucopolisaccaride ed un secondo strato di mucopolisaccaride, situato più all'interno e privo di tale enzima.

PARTE SPERIMENTALE. — Si è anzitutto determinata la catalasi batterica dei germi integri e del liquido di lisi di essi.

Il germe impiegato in queste ricerche è il *Micrococcus lysodeicticus*. I batteri provenienti da culture in agar di 24 o 36 ore erano sospesi in soluzione fisiologica e lavati tre volte alla centrifuga, quindi portati a torbidità corrispondente a quella di una soluzione di carbonato di bario all'1‰.

La catalasi veniva apprezzata in manometri di Warburg, versando cc. 0,2 di H₂O₂ 16 volumi, diluita dieci volte, dalla appendice laterale nella cavità principale del vaso, dove erano contenuti cc. 2 di emulsione batterica.

Nella tabella I sono riferiti i valori di X_{O₂}.

Nel liquido di lavaggio è dimostrabile una esigua quantità di enzima, che è risultata essere pari al 16,5‰ di quella del germe integro.

Risulta, inoltre, che il lavaggio dei germi con soluzione fisiologica allontana catalasi dai batteri, catalasi che evidentemente corrisponde a quella di cellule autolizzate e che è stata adsorbita labilmente. In genere il liquido del quinto lavaggio non presenta più traccia di enzima.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Microbiologia dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) M. PENROSE e J. H. QUASTEL, *Cell Structure and Cell Activity*. «Proc. Roy. Soc. London», B, 107, 168 (1931).

(2) D. HERBERT e A. J. PINSENT, *Crystalline bacterial catalase*. «Nature», 160, 125 (1945).

TABELLA I.

Esperimenti	Sospensione di germi non lisati	Sospensione di germi lisati
1	80	118
2	80	125
3	72	113
4	79	117
5	77	133
6	77	128
7	77	129
Valori medi . . .	78 100 %	123 157 %

Come si rileva dalla tabella, l'attività catalasica delle sospensioni microbiche aumenta considerevolmente in seguito alla bacteriolisi, conformemente a quanto avevano osservato Penrose e Quastel.

Questo fatto induce ad ammettere che uno strato di molecole di catalasi sia situato proprio sulla superficie batterica in immediato contatto con il mucopolisaccaride e che esso sia responsabile dell'attività catalasica che si ottiene con le cellule integre. Un secondo strato è sottostante al mucopolisaccaride e si dimostra quando questo è stato allontanato dal lisozima che agisce, come è noto, depolimerizzando il mucopolisaccaride. Con ciò si spiegherebbe la maggiore attività catalasica del liquido di lisi in cui sono contenuti entrambi gli strati di catalasi, quello superficiale e quello sottostante al mucopolisaccaride, mentre, come si è detto, l'attività catalasica del germe integro corrisponde soltanto allo strato più esterno.

TABELLA II.

Temperatura	Germi integri		Germi lisati	
	XO ₂	%	XO ₂	%
20°	78	100	136	100
58°	43	55	136	100
60°	40	51	136	100
70°	34	44	114	84
80°	26	33	108	80
90°	25	32	51	37
100°	0	0	0	0

AZIONE DEL CALORE. — Si è sperimentata l'azione del calore e si è determinata l'attività catalasica di germi integri e lisati dopo essere stati tenuti a temperature fra 20° e 100° C. per trenta minuti. Nella seconda tabella sono riportati i dati sperimentali mentre nella figura n. 1 sono riferiti i valori percentuali.

Dalla figura n. 1 si desume che, mentre la catalasi degli strati più superficiali del germe è inattivabile da temperature relativamente basse, l'attività catalasica del liquido di lisi è notevolmente più resistente, ciò che farebbe pensare che la minore resistenza al calore della catalasi, legata alla superficie del corpo batterico, non sia già espressione di maggiore sensibilità al calore, bensì dipenda dal fatto che essa resta inclusa nel mucopolisaccaride coagulato e la superficie enzimatica è così esclusa dal contatto con il substrato e quindi l'attività ne risulta

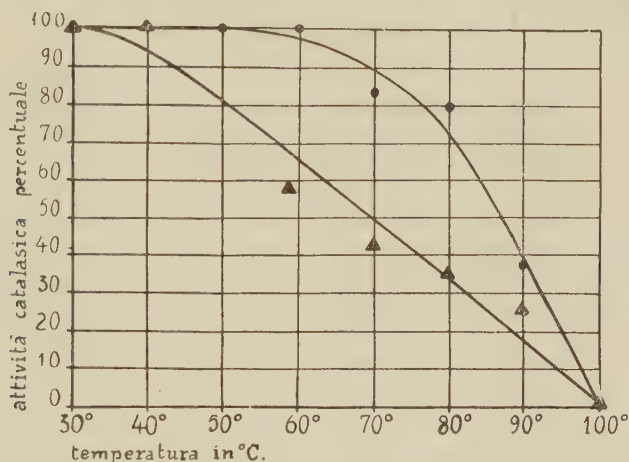


Figura n. 1.

- — ● Attività catalasica di liquido di lisi di germi esposti al calore.
- ▲ — ▲ Attività catalasica di germi integri esposti al calore.

inibita. Lisando, infatti, con lisozima i germi esposti al calore viene scisso il mucopolisaccaride, la catalasi imbrigliata nel coagulo viene liberata e riacquista così quell'attività precedentemente resa mascherata, cui si aggiunge probabilmente anche la catalasi degli strati più profondi forse non compresa o strettamente adiacente al mucopolisaccaride.

ATTIVITÀ CATALASICA DEI GERMI IN FUNZIONE DELLA LISI OTTICA. — Dimostrata la possibilità di distinguere la catalasi del *M. lysodeicticus* in due frazioni, una delle quali diviene reattiva in seguito alla lisi, si doveva chiarire il rapporto intercorrente tra liberazione dell'enzima e svolgimento del fenomeno litico.

A questo proposito Penrose e Quastel accennano al fatto che l'incremento dell'attività catalasica avviene precocemente e cioè a lisi non completa.

Si è perciò determinata l'attività catalasica durante la lisi, in funzione del tempo. Lo sviluppo di ossigeno è stato misurato con un micromanometro, secondo le norme di Penrose e Quastel, impiegando piccole quantità di sospensioni microbiche e valutando lo sviluppo di O_2 in mm^3 .

Si preparava una emulsione standard di *M. lysodeicticus* e si sottoponeva all'azione del lisozima (bianco d'uovo: diluizione finale 1/200; o 1/2000 o 1/10.000). Ogni 10' si prelevava 1 cc. di tale emulsione e si poneva in camera di reazione, in cui era compresa una vaschetta contenente cc. 0,6 di H_2O_2 a 5 volumi. Raggiunto l'equilibrio, si mescolava l' H_2O_2 con i germi e si misurava l' O_2 sviluppatosi nei due minuti primi successivi all'inizio della reazione.

Si teneva naturalmente conto del tempo intercorso per l'allestimento delle prove.

Si misurava inoltre l'attività catalasica del germe lavato e non lisato, subito dopo la preparazione della emulsione e dopo periodi vari di tempo.

Nella figura n. 2 sono riportati i risultati.

Come si vede, i germi integri mantengono costante la loro attività catalasica in funzione del tempo e quelli che vanno incontro a lisi dimostrano un aumento

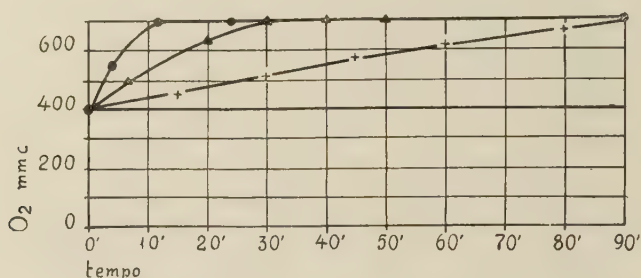


Figura n. 2.

- + - + - + Attività catalasica di germi trattati con lisozima 1/10.000.
- ▲ - ▲ - ▲ Attività catalasica di germi trattati con lisozima 1/2.000.
- - ● - ● Attività catalasica di germi trattati con lisozima 1/200.

di attività che procede tanto più rapidamente, quanto più celere è il progredire della lisi.

La prima di tali acquisizioni è in contrasto con quanto trovarono Penrose e Quastel, secondo i quali l'attività catalasica dei germi integri aumenta col tempo. Ma ciò può essere spiegato con eventuali fenomeni autolitici intervenenti nel corso delle determinazioni e forse anche da autolisi da lisozima, in quanto il *M. lysodeicticus* contiene tale principio, come è stato dimostrato da Mayer, Palmer, Thompson e Khorazo (3).

Per precisare i rapporti tra incremento dell'attività catalasica ed intensità della bacteriolisi, si è studiato l'attività catalasica del *M. lysodeicticus* in funzione della percentuale di lisi ottica. Si è adoperato come lisozima bianco d'uovo diluito 4000 volte, così da avere un processo di lisi sufficientemente lento.

Nella figura 3 è riportata la media dei risultati.

Risulta che l'attività catalasica aumenta parallelamente al progressivo illimpidimento dell'emulsione batterica fino a raggiungere il suo massimo quando la lisi è del 70 %. Da questo momento, in poi mentre non si ha ulteriore incre-

(3) K. MEYER, J. W. PALMER, R. THOMPSON e D. KHORAZO, *On the Mechanism of lysozyme action*. « J. Biol. Chem. », 113, 479 (1936).

mento del contenuto in catalasi, il processo di illimpidimento prosegue ancora fino a raggiungere il suo culmine dopo un certo tempo (in rapporto alla concentrazione dell'isozima), finchè di tutto il corpo batterico non restano che i cosiddetti residui, forse costituiti prevalentemente dai corpi nucleoidi.

Risulta così dimostrato che la liberazione di tutta la catalasi cellulare avviene prima che la lisi della cellula sia compiuta.

Questi risultati si possono forse interpretare sulla base di quanto ha di recente sostenuto Webb⁽⁴⁾, il quale suppone che nel *M. lysodeicticus* esistano due strati di mucopolisaccaride, uno esterno ed uno più interno, fatto che spiegherebbe la grande sensibilità di questo germe al lisozima in confronto ad altri batteri meno sensibili ad esso, perchè nel caso del *M. lysodeicticus* due strati (e cioè una cospicua

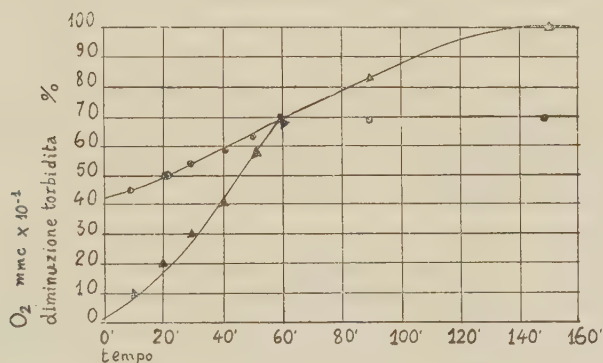


Figura n. 3.

● — ● Attività catalasica ($O_2 \text{ mmc} \times 10^{-1}$).
 ▲ — ▲ Percentuale della diminuzione di torbidità.

parte della cellula) possono essere depolimerizzati dal lisozima, mentre nel secondo caso il lisozima agirebbe su di una minore aliquota di materiale e determinerebbe quindi minore dissociazione dei corpi cellulari. Evidentemente quando il lisozima ha depolimerizzato il primo strato, si avverano le condizioni di liberazione di tutta la catalasi cellulare, che non più aumenta quando viene aggredito il secondo e più interno strato di mucopolisaccaride la cui depolimerizzazione contribuisce all'illimpidimento della soluzione, ma non porta ad ulteriore incremento della quantità di catalasi, perchè in quello strato nè in quelli sottostanti è contenuto tale enzima.

Risulta pertanto possibile figurarsi che uno strato di catalasi sia del tutto periferico con superfici attive esposte ed immediatamente capaci a reagire con il substrato. Questo strato di catalasi deve essere situato in immediato contatto con il mucopolisaccaride periferico. Un secondo strato di catalasi è situato più profondamente e se ne dimostra l'esistenza quando il mucopolisaccaride periferico è stato depolimerizzato dal lisozima. Il mucopolisaccaride centrale, inoltre, non contiene, nè copre ulteriori quantità di catalasi.

(4) M. WEBB, *The action of lysozima on heat Killed Gram-positive microorganisms*. « J. gen. Microb. », 2, 260 (1948).

RICERCA DELLA CATALASI NEI RESIDUI BACTERICI. - Dalla figura n. 3, come abbiamo detto, si può dedurre che i corpi nucleoidi, che di solito resistono ai fenomeni di lisi, non contengono catalasi.

Si usavano 10 cc. di germi e si lisavano con bianco d'uovo (diluizione finale 1/1000) Dopo 45' di permanenza in termostato a 37° la lisi era completa. Si centrifugava quindi tale liquido più volte ed ogni volta si esaminava il contenuto in catalasi nel liquido supernatante, che si prelevava con pipetta Pasteur in modo da lasciare nel fondo della provetta solo i residui cellulari. Questi venivano lavati alla centrifuga e quindi sospesi in minima quantità di soluzione fisiologica e saggiati per la eventuale attività catalasica.

Il risultato ottenuto è stato ripetutamente negativo, ciò che dimostra la mancanza di catalasi nei corpi nucleoidi batterici e in quegli altri costituenti cellulari che residuano ancora compatti dopo la lisi.

CONCLUSIONI. - Dal complesso delle indagini riferite risulta che:

1° L'attività catalasica del *M. lysodeicticus* lavato, costituisce soltanto una parte e cioè il 60 % dell'attività catalasica totale del germe, liberandosi il restante 40 % dopo la lisi da lisozima.

2° Nei terreni di cultura e nei liquidi di lavaggio dei germi è reperibile una modesta aliquota di catalasi, forse in dipendenza di fenomeni di autolisi.

3° La quota di catalasi che risulta reattiva nel germe integro è maggiormente sensibile al calore di quella che risulta reattiva solo dopo la lisi.

Ciò dipende probabilmente dal fatto che il calore, ancor prima di inibire l'enzima in questione, coagula lo acetilaminosaccaride, che essendo posto negli strati più esterni del germe copre o include le molecole di catalasi superficiali, mentre la catalasi più interna resta completamente attiva fino a quando non inizi la diretta inattivazione termica.

4° L'attività catalasica di sospensioni di *M. lysodeicticus* aumenta parallelamente alla diminuzione della torbidità, in seguito alla lisi da lisozima, raggiungendo il valore massimo quando la diminuzione della torbidità è giunta a valori del 70 %, ciò che dimostra che l'ulteriore illimpidimento della sospensione batterica, cioè l'ulteriore processo di lisi è senza effetto nella liberazione dell'enzima già completamente passato in soluzione.

5° I residui delle cellule lisate, dopo accurato e ripetuto lavaggio, risultano privi di attività catalasica.

È possibile forse in base ai risultati conseguiti schematizzare la posizione relativa della catalasi e del mucopolisaccaride, ammettendo che uno strato di enzima sia assai superficiale ed in immediato contatto con lo strato esterno di mucopolisaccaride, mentre un secondo strato di catalasi sia situato al disotto di questo e si liberi e divenga dimostrabile solo dopo la depolimerizzazione del mucoide ad opera del lisozima. Lo strato interno del mucoide non è in rapporto con la catalasi e la depolimerizzazione di esso non incrementa perciò il contenuto in catalasi del liquido di lisi.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente presenta alla Classe il fascicolo di marzo dei « Rendiconti » e si dichiara lieto che sia stato finalmente possibile ottenere quanto egli si era proposto da tempo: presentare cioè in ogni seduta il fascicolo relativo all'adunanza del mese precedente.

Comunica poi che il prof. G. Rabbeno ha ritirato la sua Memoria dal titolo: « Sulla proprietà dello spazio fisico » presentata dal Socio Armellini nella seduta dell'11 marzo u. s.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente, informa che i Colleghi d'Ancona e Remotti, impossibilitati ad intervenire alla presente seduta, nella quale sarà commemorato il compianto Socio Nazionale FILIPPO SILVESTRI, hanno inviato telegrammi di fervida adesione.

Prendono successivamente la parola i Soci Cotronei e Grandi che pronunciano i discorsi commemorativi, riferendosi rispettivamente all'opera del compianto Maestro come biologo generale e come entomologo.

Il Presidente ringrazia gli oratori per le loro interessanti e commosse rievocazioni dell'illustre scienziato scomparso e, rendendosi interprete dell'unanime sentimento della Classe, invia alla memoria dell'insigne Collega un reverente saluto rinnovando ai familiari del prof. Silvestri, presenti alla seduta, l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia per il gravissimo lutto che la morte del compianto Socio ha rappresentato per la scienza.

I discorsi commemorativi pronunciati dai Soci Cotronei e Grandi saranno pubblicati integralmente nei « Rendiconti ».

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta alla Classe due plichi suggellati inviati dal Col. Cesare Colangeli e la Classe, constatata l'integrità dei sigilli, dispone che i plichi stessi siano conservati nell'archivio accademico a disposizione dell'interessato.

Il Presidente presenta poi un plico del sig. Giuseppe Tupone e dà lettura di una lettera dello stesso Tupone in data 14 corr. con la quale il predetto chiede che il plico sia aperto nella presente adunanza; legge anche una seconda lettera del Tupone in data 15 corr. con la quale l'autore ha inviato all'Accademia, quale allegato alla predetta lettera, un complemento dello studio dal titolo « Traslazione per azione interna ».

Il Presidente procede quindi all'apertura del plico e alla ricognizione del contenuto che risulta di due fogli contenenti degli studi contrassegnati dai seguenti titoli: « Traslazione per azione interna e conseguente creazione di energia », « Meccanismo che anche come sistema isolato può acquistare una velocità angolare con forze meccaniche intrinseche » e « Realizzazione a doppio effetto ».

Il Presidente prega il Socio Signorini di riferire in proposito in una delle prossime sedute.

Il Socio Signorini accetta.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci Carnera, Bompiani, Cotronei, Miolati (per conto del Socio Straniero Hans von Euler), Crocco e Picone.

Il prof. Picone presenta anche una Memoria di Gaetano Fichera dal titolo: « I risultati concernenti le risoluzioni delle equazioni funzionali lineari dovuti all'Istituto Nazionale per le applicazioni del calcolo ». Per l'esame di detta Memoria viene nominata una Commissione composta dallo stesso Socio Picone e dal Collega Signorini.

Il Socio Signorini prende la parola per informare che egli, conoscendo già la Memoria, può subito pronunciarsi sul merito della stessa e stendere la relazione al riguardo.

Il Presidente, preso atto dei giustificati motivi per la pubblicazione a carattere d'urgenza della citata Memoria, propone che nella seduta odierna si approvi immediatamente la relazione in merito al lavoro di cui trattasi.

Poichè la Classe accede ad unanimità alla proposta del Presidente, il Socio Signorini dà lettura della relazione con la quale, anche a nome del Collega Picone, propone la pubblicazione della Memoria negli Atti accademici.

La relazione è approvata ad unanimità.

Il Socio Chiarugi presenta una Memoria di R. Pichi Sermolli dal titolo: « Ricerche botaniche - I. Le fanerogame raccolte nel bacino del Lago Tana, Semièn e Tukur Dinghià » che costituirà il vol. VII della Missione di Studi al Lago Tana.

Per l'esame di detta Memoria viene nominata una Commissione nelle persone del presentatore Socio Chiarugi e del Collega Negri.

Il Segretario accademico legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CROCCO G. A., Potenza di attraversamento della barriera del suono in aviazione.

EULER (von) HANS e BARGONI N., Sull'andamento della formazione di gruppi endiolici dal p-chinone e da alcuni pentosi (pres. dal Socio Straniero HANS EULER (von)).

BONI A., Notizie preliminari sulla stratigrafia del margine sud-orientale della regione fra il Sebino e l'Eridio (pres. dal Corrisp. GB. DAL PIAZ).

CAFIERO F., Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata. Nota II (pres. dal Corrisp. R. CACCIOPPOLI).

NICOLINI T., Indizi di corrispondenze tra fenomeni geofisici e moto polare. Nota II (pres. dal Socio L. CARNERA).

STEFANELLI A., I processi della rigenerazione del midollo spinale delle larve di Anfibi anuri nelle loro relazioni con la corda dorsale (pres. dal Socio G. COTRONEI).

URBANI E., Osservazioni preliminari sugli acidi nucleici e sulla natura della « massa di Giardina » nell'oocite di « *Dytiscus marginalis* ». Nota II (pres. dal Socio G. COTRONEI).

VILLA M. e VAONA G., Varietà quasi-asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario illustra le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare rilievo i tre volumi della edizione delle « *Obras completas de Luciano Pereira da Silva* » a cura della « *Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra* » e alcuni studi dei Soci A. Russo, Gutenberg e Lugeon.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 15 aprile 1950

- ALLARIA Giovan Battista. — *Aspetti medico-sociali della mortalità infantile*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, s. d. Pp. 122, in-8° (Collana di studi sui problemi medico-sociali, 5).
- BALLARIN Silvio. — *Proprietà geometriche delle linee di posizione della navigazione iperbolica e loro tracciamento sull'ellissoide di riferimento*. Edizione provvisoria in litografia. In-f.° (Istituto Idrografico della Marina Militare).
- BENIOFF Ugo. — *Seismic evidence for the fault origin of oceanic deeps*. Estr. da « Bulletin of the Geological Society of America », vol. LX, 1949.
- CLERICI Carlo. — *Paralipomeni di scienza d'oggi*. Lucino (Como), 1949, Pp. 29, in-8°.
- GUTENBERG Beno. — *Isostasy and its Meaning*. Estr. da « Tellus », vol. I, 1949, n. 2.
- *Structure of the Earth's Crust in the Continents*. Estr. da « Science », vol. III, 1950, n. 2872.
- HOWELL Benjamin F. Jr. — *Ground vibrations near explosions*. Estr. da « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. XXXIX, 1949, n. 4.
- Jubileusz 40 - Lecia dzialalnosci na Katedrze Uniwersyteckiej prof. Wacława Sierpiskiego*. Warszawa, Société Polonaise de Mathématique, 1949. Pp. 95, in-8°.
- LUGEON Maurice. — *Cent ans de Géologie vaudoise*. Estr. da « Suisse Contemporaine », 1949, n. 7-8.
- LUGEON Maurice. — *Elie Gagnebin, 1891-1949*. Estr. da « Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles », 1949.
- *Question de mode en géologie et autres histoires: le décoiffement*. Estr. da « Annales Hébert et Haug. », vol. VII, 1949.
- LUGEON Maurice, et VUAGNAT Marc. — *Quelques considérations sur le Flysch du soubassement de la Dent de Morcles...* Suivi par: VUAGNAT Marc. — *Quelques réflexions à propos de la planimétrie des microconglomérats en plaques minces*. Estr. da « Bulletin des Laboratoires de Géologie, Minéralogie, Géophysique, et du Musée Géologique de l'Université de Lausanne », 1949, n. 90.
- MORELLI Antonio. — *Il Consiglio Nazionale delle Ricerche*. Estr. da « Annuario del C. N. R. », 1950.
- PEREIRA DA SILVA Luciano. — *Obras completas*. Lisboa, Agência Geral das Colonias 1943-46. Voll. 3, in 8°, con figg. e tavv.
- RUSO Achille. — *Osservatorii marittimi e problemi della pesca costiera in Italia*. Estr. da « Rendiconti dell'Accademia Nazionale del XL », s. 4^a, vol. I.
- SALVATORE Leone. — *Della legislazione sulle ricerche e coltivazioni degli idrocarburi*. Estr. da « Atti del Congresso Minerario Italiano », 1948.
- VUAGNAT Marc. — Vedi: LUGEON Maurice et VUAGNAT Marc.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 maggio 1950

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Teoria degli insiemi. — *Sur les types ordinaux des ensembles linéaires.* Nota^(*) del Socio W. SIERPIŃSKI.

Nous dirons, d'après M. R. Fraïssé qu'un type ordinal φ est plus petit qu'un type ordinal ψ , et nous écrirons $\varphi < \psi$, si chaque ensemble du type φ est semblable à un sous-ensemble d'un ensemble du type ψ , mais pas réciproquement.

λ désignant le type ordinal de l'ensemble de tous les nombres réels ordonnés d'après leur grandeur, on démontre sans peine que pour qu'un ensemble linéaire (ordonné d'après la grandeur des abscisses de ses points) soit du type $< \lambda$, il faut et il suffit qu'il ne contienne aucun sous-ensemble parfait non vide.

À l'aide de l'axiome du choix on démontre les théorèmes suivants:

1. Quelle que soit la suite infinie $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ de types ordinaux, tels que $\varphi_i < \lambda$ pour $i = 1, 2, \dots$, il existe un type ordinal ψ , tel que $\varphi_i < \psi < \lambda$ pour $i = 1, 2, \dots$.

2. Il existe deux types ordinaux φ_1 et φ_2 de puissance du continu, tels que $\varphi_1 < \varphi_2 < \lambda$ et qu'il n'existe aucun type ordinal ψ , tel que $\varphi_1 < \psi < \varphi_2$.

3. Quel que soit le type ordinal φ de puissance du continu et $< \lambda$, il existe un type ordinal ψ de puissance du continu, tel que $\psi < \varphi$.

4. Si l'hypothèse du continu est vraie, il existe deux types indénombrables $\varphi_1 < \lambda$ et $\varphi_2 < \lambda$ tels qu'il n'existe aucun type indénombrable ψ tel qu'on ait $\psi < \varphi_1$ et $\psi < \varphi_2$ (tels sont par exemple le type ordinal de l'ensemble indénombrable dépourvu de sous-ensembles indénombrables non denses et celui de l'ensemble indénombrable ne contenant aucun sous-ensemble indénombrable de mesure nulle).

(*) Presentata nella seduta del 13 maggio 1950.

5. Il existe une suite transfinie de puissance du continu des types ordinaux croissants (respectivement décroissants) d'ensembles linéaires de puissance du continu.

On appelle d'après M. Fraïssé deux types ordinaux φ et ψ *incomparables*, si aucun ensemble de type φ n'est semblable à un sous-ensemble d'un ensemble de type ψ et si aucun ensemble de type ψ n'est semblable à un sous-ensemble d'un ensemble de type φ .

À l'aide de l'axiome du choix on démontre le théorème suivant:

6. Il existe une famille de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ de types ordinaux d'ensembles linéaires de puissance du continu deux à deux incomparables.

Les démonstrations de ces théorèmes paraîtront dans le vol. 37 du journal « *Fundamenta Mathematicae* ».

Meccanica. — *Turboelica e turbogetto.* Nota (*) del Socio G. ARTURO CROCCO.

Scopo di questa Nota è la formulazione di una semplice relazione tra la spinta di un propulsore ad elica, in Aviazione, e quella di un propulsore a reazione, quando si suppongano entrambi potenziati da una turbina a gas. Pertanto indichiamo i due congegni coi termini poco ortodossi ma molto espressivi di *turboelica* e *turbogetto*: i quali definiscono implicitamente ciò che essi hanno di comune e ciò che li differenzia.

Esula invece dallo scopo di questa Nota il confronto tecnico dei due congegni, riguardante questioni costruttive di peso, di ingombro e di regolazione; in quanto che tali questioni rimangono intimamente connesse alle caratteristiche d'impiego degli aerei cui i due congegni sono destinati.

Un solo coefficiente di natura costruttiva ci occorre per la relazione che vogliamo formulare ed è l'effettivo *rendimento della elica*, espresso dal rapporto tra la potenza utile e la potenza fornita dalla turbina sull'albero motore che muove gli ingranaggi riduttori dell'elica; in quanto che tale dispositivo meccanico manca nel turbogetto e riduce di alquanto il cosiddetto *rendimento propulsivo dell'elica*, misurato sul proprio albero motore.

Ora è notorio che tale rendimento propulsivo presenta generalmente un massimo per una predeterminabile velocità di traslazione; velocità che in un aereo moderno è compresa tra 400 e 700 Km/ora e per la quale il rendimento propulsivo, esclusi gli ingranaggi, raggiunge il 95%, rivelando la bontà di questa macchina operatrice. Ma è altresì notorio che tale cifra rapidamente si attenua col crescere della velocità dell'aereo, e più precisamente col crescere del suo rapporto colla velocità del suono alla quota di volo, cioè del cosiddetto *numero di Mach dell'aereo*; e più ancora col crescere del locale *numero di Mach dell'elica*, cioè del rapporto colla velocità del suono della *locale* velocità, risultante dalla rotazione e dalla traslazione che animano le estremità delle pale d'elica.

(*) Presentata nella seduta dell'11 marzo 1950.

Sicchè nell'anteguerra, e prima dell'avvento degli attuali aerei a reazione, si riteneva generalmente, in base ai risultati delle gallerie aerodinamiche, che superando i 700 Km/ora con la velocità di volo, e quindi superando l'unità col numero di Mach dell'elica, il rendimento propulsivo dovesse cadere quasi drasticamente. L'elica era pertanto ritenuta come il principale ostacolo verso le altissime velocità cui tende l'aviazione.

Tuttavia più attendibili esperimenti compiuti in volo su di un aereo attrezzato per la funzione di *banco prova volante* e quindi munito di misuratori di spinta e di coppia motrice, vennero a provare che il limite di accettabile rendimento poteva essere esteso ad 800 Km/ora. Si vennero così a calcolare rendimenti propulsivi di 80% ad 800 Km/ora; che caddero soltanto verso 62% a 950 Km/ora.

Poi, nell'immediato dopo guerra, furono trovati in Germania documenti di prove con eliche di forme speciali, imitanti per le pale la sagoma a freccia delle ali supersoniche; e in conseguenza fu incaricata la Curtiss Corporation di sperimentarle col suo banco prova volante, unitamente ad altri tipi di paragone.

La figura 1⁽¹⁾ presenta gli schemi di tre tipi, tra quelli sperimentati. Lo schema di *centro* delinea il tipo ad asse curvilineo, o, come fu chiamato, a *banana*. Lo schema di *destra* rappresenta il tipo convenzionale ad asse diritto e di spessore convenzionale, identico allo spessore del tipo a banana. Finalmente lo schema di *sinistra* è anch'esso del tipo a pala diritta convenzionale, ma di *spessore ridotto*. Si veniva così a porre in contrasto il vantaggio della forma a banana col vantaggio di un profilo più penetrante. I risultati sono stati favorevoli al tipo convenzionale di profilo più penetrante. Esso ha fornito un rendimento propulsivo di circa 89% a 900 Km/ora, contro l'88% del tipo a banana e contro l'82% del tipo convenzionale. Estrapolando cautamente la curva più alta sino a 1000 Km/ora si discende a 82,5%.

Ora il rendimento *effettivo* di cui abbiamo bisogno potrà ottenersi dal rendimento propulsivo aerodinamico operando una ulteriore riduzione che tenga conto della potenza assorbita dagli ingranaggi e che non supererà il 5%. Denomineremo pertanto con η_E questo rendimento effettivo.

Se pertanto chiamiamo con F_E la spinta dell'elica, in Kg; con Π la potenza assorbita in Kg/metri dall'albero che precede la scatola d'ingranaggi; con V la velocità traslatoria dell'aereo, in m/sec, potremo scrivere

$$(1) \quad F_E = \eta_E \frac{\Pi}{V}.$$

Immaginando poi che la potenza Π sia fornita da una turbina a gas, la precisiamo ricorrendo al ciclo termico sintetico che abbiamo indicato in un precedente studio⁽²⁾ del quale ricorderemo per completezza lo schema. Esso infatti considera un rendimento unico di compressione ed un rendimento unico di espansione; ed assume come indici delle varie potenze in gioco nel ciclo, supposto un calore

(1) Riprodotta da H. H. WARDEN, *Propeller consideration* «Aeronautical Engineering Review», October 1948.

(2) G. A. CROCCO, *Turbo-reattore d'alta quota*. Questi «Rendiconti», fasc. 2°, ser. VIII, vol. VI, 1949.

specifico del fluido mediamente costante, i successivi salti di temperatura al posto delle successive variazioni di entalpia. Se allora è $T_1 - T_0$ il salto corrispondente all'autocompressione dovuta alla captazione dell'aria, presa alla temperatura esterna T_0 ; $T_2 - T_1$ il salto corrispondente alla potenza assorbita dal compressore; $T_3 - T_2$ la sopraelevazione di temperatura nella camera di combustione,

$$\text{RENDIMENTO ELICA } \eta = \frac{\text{CAVALLI-SPINTA}}{\text{CAVALLI-ALBERO}}$$

IN FUNZIONE VELOCITA'-ARIA

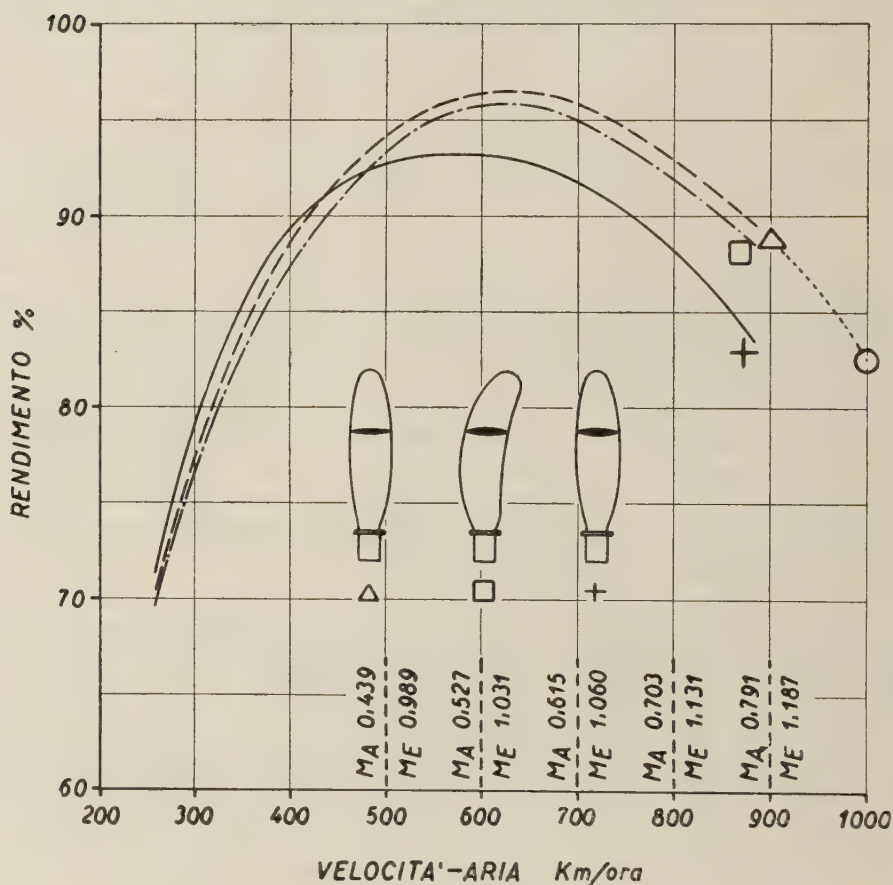


Fig. 1.

supposta a pressione costante; e se infine supponiamo che dalla massima temperatura T_3 il fluido, passando attraverso la turbina, si espanda in definitiva fino alla pressione esterna con una totale caduta di pressione $T_3 - T_5$, basterà sottrarre da questa caduta totale la caduta parziale nella turbina $T_3 - T_4 = T_2 - T_1$, per indicare la aliquota di potenza fornita alla turbina nell'alimentazione del compressore. Otterremo allora in definitiva nel residuo salto

$$(2) \quad \Theta = (T_3 - T_5) - (T_2 - T_1)$$

l'espressione della potenza utile disponibile; che verrà interamente assorbita dall'albero della turbina nel caso della turboelica o si trasformerà in energia cinetica del getto nel caso del turbogetto. Potremo allora scrivere con

$$(3) \quad \Pi = G \cdot E \cdot c_p \Theta$$

la potenza fornita agli ingranaggi che muovono la turboelica, essendo G il flusso in Kg/sec; E l'equivalente dinamico della caloria; c_p il calore specifico medio del fluido. Analogamente scriveremo nel caso del turbogetto, di cui chiameremo U la velocità di uscita,

$$(4) \quad \frac{U^2}{2g} = E \cdot c_p \Theta;$$

cosicchè la spinta F_G del turbogetto risulterà

$$(5) \quad F_G = \frac{G}{g} (U - V),$$

ove g è l'accelerazione della gravità in m/sec². Da (1), (3), (4) e (5) si ottiene allora

$$(6) \quad \frac{F_E}{F_G} = \frac{\eta_E g E c_p \Theta}{V(U - V)} = \frac{\eta_E U^2}{2V(U - V)} = \frac{\eta_E}{2v(1 - v)};$$

dove abbiamo indicato con v il rapporto della velocità dell'aereo V rispetto alla velocità del getto U . Come si vede, il rapporto tra le due spinte rimane imprecisato se non si conosce il coefficiente v .

Ma il risultato che si ottiene dalla (6) diviene interessante se si precisa tale coefficiente nella ipotesi che il turbogetto abbia potuto conseguire quel coefficiente v che corrisponde al suo massimo rendimento propulsivo; nel qual caso, come è notorio, dovrà essere U doppio di V , cioè $v = 0.5$. È questo per altro il valore di v che rende massimo il denominatore e pone quindi il turbogetto nelle migliori condizioni per il confronto.

Si perviene così alla semplice relazione

$$(7) \quad \frac{F_E}{F_G} = 2 \eta_E;$$

che fornisce il *minimo* rapporto conseguibile tra le due spinte considerate.

Numericamente supposto $\eta_E = 0.85$ (compresa la perdita negli ingranaggi) a 900 Km/ora sarà $F_E = 1.9 F_G$; cioè la turboelica sorpasserà del 90 per cento la corrispondente spinta del turbogetto; ed ancora a 1000 Km/ora, prendendo $\eta_E = 0.78$, la sorpasserà del 56 per cento. E ciò sempre a parità di consumo.

In realtà questa prevalenza potrà risultare maggiore perchè le velocità del getto sono superiori al loro valore ottimo per ragioni di minimo ingombro.

Nè il turbogetto potrà migliorare questa sua inferiorità con perfezionamenti che riguardino la turbina a gas esclusivamente, giacchè essi diverrebbero comuni ai due congegni e non riuscirebbero quindi a spostare la proporzione delle spinte. Il turbogetto può soltanto avvantaggiarsi della sua possibilità di scindere termicamente il flusso di gas che muove la turbina da quello che alimenta il getto, sciogliendosi così dai limiti di temperatura troppo severi imposti dalle condizioni

metallurgiche delle palette della turbina. Ricorrendo ad esempio al caso di *flusso bipartito* considerato nella Nota sopracitata e denominando con T_3 e T_x le due temperature rispettive del flusso di gas destinato alla turbina e di quello destinato al getto, si perviene agevolmente, usando la nostra formulazione, alla espressione, valevole per v optimum:

$$(8) \quad \frac{F_E}{F_G} = 2 \eta_E \frac{T_3}{T_x};$$

che, avvicinandosi la velocità critica, con $\eta_E = 0.78$, potrebbe ridursi a rappresentare parità di spinta per $T_x = 1.56 T_3$. Ma il consumo risulterebbe in questo caso aumentato quasi nella stessa proporzione.

Non sembra quindi che, allo stato attuale della tecnica e nel campo delle velocità subsoniche, possa il turbogetto correggere la sua deficienza di spinta di fronte alla turboelica. Nella lotta impegnatasi tra i due congegni l'elica si difende assai bene; e, valendosi degli stessi mezzi termomeccanici che han fatto trionfare il getto, e quindi accettando i maggiori consumi della turbina rispetto a quelli del motore alternativo, porta ormai sulla bilancia questo insopprimibile vantaggio di spinta sino alle massime velocità aviatorie sinora raggiunte.

Pensiamo quindi che l'applicazione della turboelica all'Aviazione civile, operata dalla Wickers nell'ultima edizione del suo *Viscount*, avrà seguito per velocità di cammino maggiori.

Rimane a considerare il campo, ancora praticamente inesplorato, delle velocità supersoniche. Potrà l'elica avervi accesso? Ed in caso affermativo quale sarà la inevitabile discesa del suo rendimento verso quel limite del *cinquanta* per cento che conduce alla parità di spinta col turbogetto?

Alla Tecnica la risposta.

Astronomia (Astrofisica). — *Altezza della cromosfera nell'anno 1949 ed andamento del ciclo solare* (*). Nota (**) del Socio GIORGIO ABETTI.

I risultati medi delle osservazioni dell'altezza della cromosfera solare eseguite con l'equatoriale di Amici in Arcetri nell'anno 1949 come usualmente, di 30° in 30° di latitudine, sono raccolti nella seguente tabella; i dettagli delle osservazioni stesse sono date nelle pubblicazioni dell'Osservatorio di Arcetri (1).

L'altezza media della cromosfera per il 1949 risulta così di **9".90** senza alcun particolare innalzamento in prossimità dei poli. La differenza con l'altezza ottenuta nel 1948 (10".48) è di $-0''.58$, quindi piuttosto notevole.

Si deve però notare, che parte di questa differenza può attribuirsi ai vari osservatori, che hanno eseguito le misure, non essendosi qui applicata la riduzione all'osservatore medio, perchè ciò verrà fatto globalmente dopo un certo numero

(*) Lavoro eseguito all'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.

(**) Presentata nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) Cfr. « Osservazioni e Memorie di Arcetri » e « Mem. S. A. I. » in corso di stampa.

di anni, come è già stato eseguito da Fracastoro per il periodo 1921-1946⁽²⁾. In ogni modo non dovrebbe esistere dubbio che l'altezza generale della cromosfera ha subito una diminuzione dallo scorso anno.

Arcetri (1949).

Latitudine	Altezza	Latitudine	Altezza
+ 90° N	9".6	— 90° S	10".2
+ 60 E	9 .5	— 60 W	10 .0
+ 30 E	9 .7	— 30 W	10 .0
0 E	9 .8	— 0 W	10 .2
— 30 E	9 .8	+ 30 W	10 .1
— 60 E	9 .7	+ 60 W	10 .2

Il prof. E. Gullón dell'Osservatorio astronomico di Madrid ci ha trasmesso le osservazioni da lui eseguite a quell'Osservatorio nel secondo semestre del 1947 in 16 giorni, di cui si dà qui la media:

Madrid (1947).

Latitudine	Altezza	Latitudine	Altezza
+ 90° N	9".7	— 90° S	9".5
+ 60 E	9 .5	— 60 W	9 .2
+ 30 E	9 .7	— 30 W	9 .4
0 E	9 .9	0 W	9 .5
— 30 E	9 .9	+ 30 W	9 .7
— 60 E	9 .5	+ 60 W	9 .4

La media generale è = 9".58.

La differenza Arcetri-Madrid per il 1947 risulta: + 0".90⁽³⁾. A parte la differenza sistematica, dipendente dallo strumento e dalle equazioni personali degli osservatori, l'andamento dell'altezza alle diverse latitudini è in completo accordo fra Arcetri e Madrid.

Le analoghe osservazioni di Catania⁽⁴⁾ del 1948, non sono in accordo con quelle di Arcetri⁽³⁾, sia per la diminuzione dell'altezza della cromosfera, che risulta dalle prime rispetto al 1947, mentre ad Arcetri non è stata osservata alcuna variazione in quei due anni, sia per la maggiore altezza ai poli misurata a Catania, mentre ad Arcetri è stata osservata una distribuzione uniforme. Non si hanno ancora elementi per discutere e trovare le eventuali ragioni di queste divergenze.

(2) Cfr. «Memorie S. A. I.», 19, p. 45, 1948 e «Osserv. e Mem. Arcetri», fasc. 64, p. 33 (1948).

(3) Cfr. questi «Rendiconti», ser. VIII, vol. IV, p. 358 (1948).

(4) L. TAFFARA, «Mem. S. A. I.», 20, p. 3 (1949).

L'area totale delle protuberanze dalle osservazioni di Arcetri risulta, per il 1949 di 1642 unità di protuberanza (area di 1" del bordo solare per 1" di altezza) con una diminuzione di 20 UP rispetto al 1948 e quindi, per quanto riguarda il fenomeno delle protuberanze, la loro attività è rimasta costante in questi due ultimi anni.

La media annua provvisoria per il 1949 dei « numeri relativi » o di Wolf, nel sistema di Zurigo, risulta $R = 136$; nel 1948 fu pure, secondo i dati definitivi di Zurigo, $R = 136$ e nel 1947 $R = 152$.

Il massimo di attività solare, per quanto riguarda il fenomeno delle macchie, resta determinato al 1947.5.

Il 5 agosto 1949 fu osservato alla torre solare e allo spettro-elioscopio un notevolissimo brillamento⁽⁵⁾, che presentò una larghezza massima della riga H_{α} di 7.5 *angstrom* ed una intensità di importanza 3 + con un massimo, misurato sugli spettroeliogrammi col microfotometro, di 4.3 volte la brillantezza della cromosfera in H_{α} nella regione vicina al brillamento, cioè circa 1.5 volte più brillante dello spettro continuo vicino.

Per l'andamento del ciclo in corso, che è il XVIII, a contare da quello in cui si cominciano ad avere numeri relativi sufficientemente sicuri, cioè dal ciclo che ha presentato il massimo nel 1750, si può dire che la sua intensità è stata notevolissima, avendo raggiunto il numero relativo massimo $R = 152$ (1947.5). Il solo ciclo, che di poco lo ha oltrepassato è quello del 1778 con $R = 154$.

Attualmente questo ciclo XVIII, che ha avuto inizio nel minimo del 1944.2, dopo il massimo di cui si è detto, ha presentato varie notevoli riprese con onde smorzate e si avvia decisamente verso il minimo. Le previsioni per il futuro andamento di questo ciclo, dato il carattere tanto variabile dei fenomeni solari, sono come è ben noto aleatorie, dello stesso tipo ed attendibilità di quelle meteorologiche, tuttavia essendo state richieste dai membri della conferenza per la radio-diffusione ad alta frequenza, in base all'esame dei precedenti XVII cicli, Righini e Fracastoro deducono che il minimo dovrebbe essere raggiunto verso il 1955.5 ed essere più basso della media (R min. compreso fra 2 e 4). Altre previsioni anticiperebbero un poco quell'epoca e darebbero un minimo meno basso.

Notiamo incidentalmente come per la radio-diffusione sembra si possa fissare un certo grado di attività solare, oltre il quale le condizioni della ionosfera presentano sensibili variazioni. Questo grado di attività solare può forse essere individuato con un certo numero relativo di macchie o dalla presenza di altri fenomeni solari di determinata intensità.

Se tale è il caso, il periodo undecennale, tolti gli anni di tranquillità o relativa tranquillità del Sole, si ridurrebbero ad un periodo più breve, che potrebbe essere in relazione con i cicli climatici di durata inferiore a undici anni, come quelli già varie volte messi in evidenza, e di recente in modo molto esplicito dal Polli⁽⁶⁾ con vari elementi geofisici e in tutte le regioni della Terra.

(5) V. BAROCAS, G. RIGHINI, *Observation of a solar flare: 1949 Aug. 5: Brilliant solar flares observed*, 1949 Aug. 5; « The Observatory », Dec. 1949, pp. 228-229.

(6) S. POLLI, *Il ciclo climatico di 8 anni e sua realtà fisica*. « Annali di geofisica », vol. III, n. 1, gennaio 1950, p. 63.

Geodesia. — *Sul più conveniente orientamento geodetico italiano.*

Nota (*) del Corrisp. GIOVANNI BOAGA.

Per molti problemi di ingegneria, di balistica esterna, di cartografia, ecc. è necessario poter disporre di un gran numero di punti della superficie terrestre definiti mediante coordinate geografiche. Ciò si realizza coprendo la regione che interessa (in generale tutto il territorio dello Stato) con una rete di triangoli, caratterizzando i vertici con punti salienti, misurando uno o più lati (*basi*) e tutti gli angoli, onde poter disporre di un numero sovrabbondante di elementi e compensare i risultati delle osservazioni, diminuendo così gli effetti degli inevitabili errori accidentali che si presentano nelle varie misurazioni. Dopo di ciò, osservate su uno di questi vertici (origine) le coordinate geografiche astronomiche, si trasportano tali coordinate sugli altri vertici, utilizzando per esempio le serie accorciate di Legendre, adottando per curvature, quelle risultanti da uno degli ellissoidi terrestri generalmente accettati (Bessel, Struve, Clarke, Hayford, ecc.). Si ottengono così le coordinate geografiche geodetiche o ellissoidiche dei singoli vertici.

Nell'origine la normale alla superficie matematica della terra (geoide), i cui coseni direttori si possono esprimere per mezzo delle coordinate geografiche astronomiche, si fa coincidere con la normale ellissoidica e si ottiene così l'*orientamento geodetico*. Se si effettuano in altri vertici le misure astronomiche delle coordinate geografiche, si nota che esse differiscono da quelle geodetiche, ottenute col procedimento accennato del trasporto delle coordinate dell'origine; ciò significa che le due normali, quella geoidica e quella ellissoidica non coincidono.

L'angolo Θ da esse formato prende il nome di *deviazione della verticale* o impropriamente *attrazione locale*. Le componenti di Θ : ξ meridiana e quella η normale alla meridiana, sono definite dalle

$$(1) \quad \xi = \varphi_a - \varphi_g \quad \eta = (\lambda_a - \lambda_g) \cos \varphi_g = (\alpha_a - \alpha_g) \cot \varphi_g$$

con φ, λ, α rispettivamente latitudine, longitudine, azimut (di un arco di geodetica uscente dal vertice considerato) e gli indici a e g simboli indicativi degli agettivi astronomico e geodetico rispettivamente.

È ovvio che, per la regione coperta dalla rete trigonometrica, l'ellissoide locale per cui risulta minima la somma dei quadrati delle deviazioni Θ è il più conveniente.

La rete geodetica italiana osservata negli ultimi venti anni del secolo scorso è stata orientata a Genova e per dimensioni dell'ellissoide di riferimento sono state considerate quelle risultanti dalle misure e dai calcoli di Bessel.

Come abbiamo segnalato in una nostra monografia dal titolo *La deviazione della verticale in Italia* (pubblicata dall'Istituto Geofisico Italiano), sono state

(*) Presentata nella seduta del 13 maggio 1950.

misurate da varii autori ben 111 latitudini, 36 longitudini e 45 azimut, in un certo numero di vertici alcuni dei quali considerati più volte. Col materiale ivi raccolto ci proponiamo di *determinare le più probabili componenti della deviazione totale nel punto origine, onde poter individuare la posizione del più conveniente orientamento per la rete geodetica italiana.*

Indicando allora con $\varphi_0, \lambda_0, \alpha_0$ i tre elementi fondamentali relativi al centro di emanazione (Genova) e con $d\varphi_0$ e $d\lambda_0$ le correzioni (incognite) di φ_0 e λ_0 , le componenti ξ, η di Θ per un generico vertice risultano funzioni di dette correzioni, le quali, per quanto detto, sono da determinare in base alla condizione:

$$(2) \quad \sum_i \xi_i^2 + \sum_i \eta_i^2 = \text{minimo}$$

col *metodo dei minimi quadrati* indipendentemente dalla legge di distribuzione delle Θ , le quali non hanno nessuna correlazione con classi di errori di osservazione, risultando esse quantità costanti determinabili con errori probabili molto inferiori alle loro grandezze.

Le (1), corrispondenti ad un vertice generico, con differenze

$$\Delta\varphi'' = \varphi - \varphi_0, \quad \Delta\lambda'' = \lambda - \lambda_0$$

dal punto di emanazione, si trasformano nelle seguenti, che si ricavano con metodo differenziale dalle serie di Legendre:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 \xi_0 + p_2 \eta_0 - (\varphi_a - \varphi_g) = \xi' \\ q_1 \xi_0 + q_2 \eta_0 - (\lambda_a - \lambda_g) \cos \varphi_g = \eta'_\lambda \\ r_1 \xi_0 + r_2 \eta_0 - (\alpha_a - \alpha_g) \cot \varphi_g = \eta'_\alpha \end{array} \right.$$

dove i singoli coefficienti sono espressi dalle (cfr. Pucci-Geodesia, volume II):

$$p_1 = 1 - 1/2 \Delta\lambda''^2 \cdot \text{arc}^2 1''$$

$$p_2 = -\Delta\lambda'' \cdot \text{sen } \varphi_0 \cdot \text{arc } 1''$$

$$q_1 = -p_2 + \Delta\varphi'' \cdot \Delta\lambda'' \cdot \cos \varphi_0 \cdot \text{arc}^2 1''$$

$$q_2 = -1/2 \Delta\varphi''^2 \cdot \text{arc}^2 1'' + p_1 \text{sen}^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0$$

$$r_1 = \Delta\lambda'' \cdot \text{cosec } \varphi_0 \cdot (1 - \Delta\varphi'' \cdot \cot \varphi_0 \cdot \text{arc } 1'') \cdot \text{arc } 1''$$

$$r_2 = 1 - \Delta\varphi'' \cdot \cot \varphi_0 \cdot \text{arc } 1'' + 1/2 \{ \Delta\varphi''^2 \cdot \text{cosec } \varphi_0 \cdot (1 + \cos^2 \varphi_0) - \Delta\lambda''^2 \} \text{arc}^2 1''.$$

$$\xi_0 = d\varphi_0, \quad \eta_0 = \cos \varphi_0 \cdot d\lambda_0.$$

Scritte tante equazioni del tipo (3) quante sono le stazioni astronomiche effettuate rispettivamente per la determinazione di φ, λ, α , si può risolvere rispetto ξ_0, η_0 con il metodo dei minimi quadrati il sistema complessivo che ne risulta, considerando i valori $\xi', \eta'_\lambda, \eta'_\alpha$ come errori residui di osservazioni provenienti da un sistema di equazioni generate, dello stesso peso, quantunque essi corrispondono a quantità fisiche determinabili con precisione assai grande, ma non sempre eguale.

Con riferimento a Genova per cui $\varphi_0 = 44^\circ 25' 08'', 24$ i coefficienti $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2$ dianzi ricordati assumono le seguenti forme assai comode per il calcolo numerico:

$$p_1 = 1 - \Delta\lambda'' \cdot [9.0701198 - 20]$$

$$p_2 = -\Delta\lambda'' \cdot [4.5306103 - 10]$$

$$q_1 = \Delta\varphi'' \cdot \Delta\lambda'' \cdot [9.2249948 - 20] - p_2$$

$$q_2 = 1 - \Delta\lambda'' \cdot [8.7601914 - 20] - \Delta\varphi'' \cdot [9.0701198 - 20]$$

$$r_1 = \Delta\lambda'' \cdot [4.8405391 - 10] - \Delta\varphi'' \cdot \Delta\lambda'' \cdot [9.5349232 - 20]$$

$$r_2 = p_1 - \Delta\varphi'' \cdot [4.6943841 - 10] + \Delta\varphi'' \cdot [9.4041041 - 20].$$

Indi, calcolando i coefficienti $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2$ (cfr. monografia accennata) per le 192 equazioni del tipo (3) risultanti per le 111 latitudini, 36 longitudini e 45 azimut provenienti dalle osservazioni astronomiche, si perviene al seguente sistema normale:

$$\begin{cases} + 110,9797 \xi_0 + 0,3740 \eta_0 = 150,0585 \\ + 0,3740 \xi_0 + 0,8325 \eta_0 = 23,3085 \end{cases}$$

che risolto fornisce le:

$$\xi_0 = 1'',35 \pm 0'',86 \quad , \quad \eta_0 = 0'',27 \pm 0'',99$$

a cui corrisponde la seguente deviazione totale

$$\Theta = 1'',38 \pm 1'',31$$

di azimut $11^\circ 27'$. Gli errori medi delle due incognite risultano in equilibrio con quelli provenienti dalle osservazioni astronomiche.

Il risultato conseguito ci dice che: la direzione della verticale all'origine (Genova) si inclina verso nord; conseguentemente l'ellissoide di riferimento di Bessel si allontana di circa $1'',35$ dal geoide medio italiano; si debbono perciò portare le seguenti correzioni agli elementi geodetici:

- 1) per la latitudine (dell'origine) — $1'',35$
- 2) per la longitudine (dell'origine) — $0'',38$.

Il calcolo numerico non può fornire la possibilità della individuazione del punto di emanazione per il quale tuttavia dall'esame dei dati raccolti si può ritenere giudiziosa la recente scelta, da parte della Commissione Geodetica, di Monte Mario, come punto di orientamento geodetico italiano, in quanto per tale vertice si ha, rispetto a Genova, $\xi = 1'',08$ molto prossimo al valore ξ_0 dianzi determinato.

A titolo di confronto rammentiamo che una ricerca analoga è stata elaborata dal Prof. K. Atumi per il Giappone (cfr. *La déviation de la verticale au Japon* « Journal of Astronomy and geodetic », vol. X n. 3) pervenendo ai valori $\xi_0 = -9'',46$, $\eta_0 = +9'',35$, mentre per le misure indiane con riferimento a Kalianpur (origine) si è trovato $\xi_0 = +0'',31$, $\eta_0 = +2'',89$.

Tenendo conto di tutte le misure astronomiche eseguite e dei corrispondenti errori medi, si hanno le:

riferimento a Genova, ellissoide di Bessel

$$\frac{1}{n} \sum_i \xi_i^2 + \frac{1}{n} \sum_i \eta_i^2 = 217 \pm 9,1$$

riferimento a Monte Mario, ellissoide di Bessel

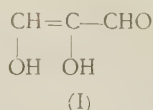
$$\frac{1}{n} \sum_i \xi_i^2 + \frac{1}{n} \sum_i \eta_i^2 = 193 \pm 9,1$$

da cui risulta che: *l'orientamento a Monte Mario (Roma) è preferibile.*

Ripetendo i medesimi calcoli prendendo quale ellissoide di riferimento quello internazionale, con origine Monte Mario, la somma indicata discende a $183 \pm 9,1$, sicchè è lecito concludere che: *per la rete italiana è più conveniente l'origine Monte Mario con ellissoide di riferimento quello internazionale.*

Chimica organica. — *Sull'andamento della formazione di gruppi endiolici dal p-chinone e da alcuni pentosi*^(*). Nota di HANS VON EULER e NORA BARGONI, presentata^(**) dal Socio Straniero H. VON EULER.

Circa sedici anni or sono veniva per la prima volta ottenuta, per riscaldamento del glucosio con idrato sodico diluito, una sostanza incolore e cristallina, avente la formola⁽¹⁾ $C_3H_4O_3$ ed alla quale, in base alle sue proprietà fisiche e chimiche, venne attribuita la formola di costituzione (I),



cioè di una aldeide 2,3 diossi-acrilica. A causa del suo spiccatissimo potere riducente, il nuovo composto venne chiamato «riduttone»; in seguito la denominazione di «riduttoni» fu data a parecchie altre sostanze di comportamento analogo.

Questo gruppo di sostanze, benchè di creazione relativamente recente, comprende già un numero abbastanza cospicuo di composti, alifatici ed aromatici, omociclici ed eterociclici⁽²⁾. I riduttoni presentano altresì un notevole interesse in quanto ad essi appartengono sostanze dotate di attività fisiologica (ad esempio l'acido ascorbico) e sostanze di cui fu osservata la formazione nel corso del metabolismo microbico.

Benchè della categoria dei riduttoni facciano parte anche le *en-diamine* (contenenti il raggruppamento $\begin{array}{c} -\text{C}=\text{C}- \\ | \quad | \\ \text{H}_2\text{N} \quad \text{NH}_2 \end{array}$) e gli *en-ditioli* (contenenti il raggrup-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Ricerche di Chimica Organica, Università di Stoccolmia.

(**) Nella seduta del 15 aprile 1950.

(1) EULER e C. MARTIUS, «Lieb. Ann.», 505, 73 (1933); «Sv. Kem. Tidskr.», 45, 73 (1933).

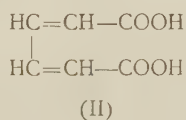
(2) EULER e H. HASSELQUIST, *Reduktone*. Enke, Stuttgart, 1950.

pamento $\begin{array}{c} -C=C- \\ | \quad | \\ HS \quad SH \end{array}$), l'interesse dei chimici è sinora rivolto particolarmente sugli en-dioli, il cui gruppo caratteristico è contenuto tanto nell'aldeide 2,3 diossiacrilica, quanto nell'acido ascorbico. La determinazione della struttura di questi en-dioli costituisce un notevole problema di natura teoretica, che viene attualmente affrontato alla luce delle moderne teorie elettroniche.

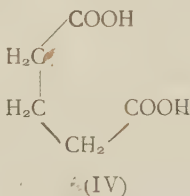
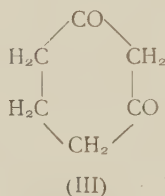
Prima di esporre i risultati delle nostre esperienze desideriamo passare brevemente in rassegna le modalità secondo le quali si può verificare la rottura di un anello aromatico od idroaromatico.

Secondo Harries per azione dell'ozono l'anello benzenico subisce un'ossidazione che si spinge fino alla formazione di gliossale. L'ossidazione avviene più facilmente se l'anello benzenico contiene dei sostituenti (ad esempio degli ossidrilili) o se l'anello stesso è parzialmente idrogenato; in tali casi possono venire impiegati, come agenti ossidanti, il permanganato potassico ed i perossiacidi.

Talvolta il prodotto di ossidazione contiene ancora tutti i sei atomi di carbonio che si trovavano presenti nell'anello benzenico; come si verifica ad esempio nella formazione di acido muconico (II)

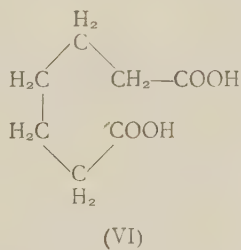
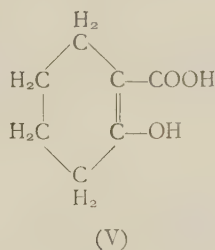


Nella maggior parte dei processi ossidativi vengono eliminate una o due molecole di CO_2 , come nella ossidazione della diidro-resorcina (III) ad acido glutarico (IV):



e nell'ossidazione dell'idrochinone, mediante permanganato, ad acido maleico.

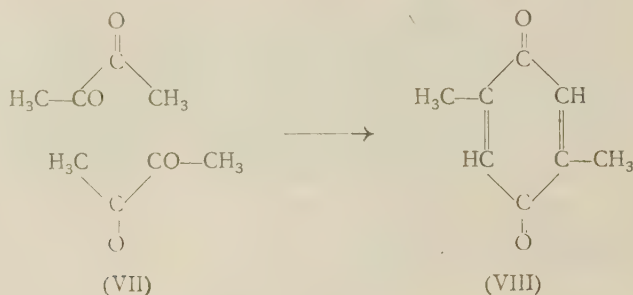
La formazione di acido pimelico (VI) dall'acido tetraidro-salicilico (V) costituisce invece un esempio di scissione idrolitica:



La formazione di sostanze endioliche per scissione alcalina del p-chinone rappresenta un particolare tipo di reazione.

Ulteriori esperimenti, eseguiti da Hasselquist hanno dimostrato che il reattivo di Tillmans ⁽³⁾ è ridotto in soluzione alcalina dal p-chinone, e che una molecola di reattivo di Tillmans viene impiegata per formare da una molecola di p-chinone due gruppi endiolici.

Euler e Hasselquist ⁽⁴⁾ hanno supposto che la scissione menzionata del p-chinone rappresenti la reazione opposta a una reazione descritta da lungo tempo da H. v. Pechmann ⁽⁵⁾. Questo autore ha trovato che il diacetile (VII) può in soluzione alcalina (attraverso ad un composto intermedio, che fu denominato dimetilchinogeno) venire condensato a p-xilochinone (VIII)



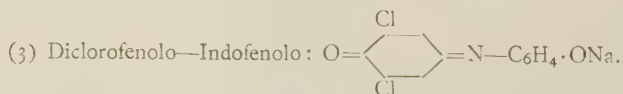
Non si conoscono attualmente i particolari circa la rottura alcalina del p-chinone, ma alcune ricerche recenti effettuate presso questa scuola hanno posto in evidenza il differente comportamento di alcuni chinoni sinora esaminati nei confronti di agenti ossidanti, quali il reattivo di Tillmans. Infatti il naftochinone riduce il reattivo di Tillmans (TR), solo nel rapporto di una molecola di TR per una molecola di naftochinone; l'antrachinone invece non reagisce affatto con il diclorofenol-indofenolo ⁽⁶⁾.

Questa differenza di comportamento ci ha spinto ad iniziare delle ricerche che potessero contribuire a chiarire il meccanismo della formazione di prodotti endiolici in processi di scissione ossidativa.

Abbiamo perciò eseguito alcuni esperimenti sull'influenza della concentrazione dell'alcali sulla scissione ossidativa del p-benzochinone.

METODO. - La soluzione del reattivo di Tillmans (RT), usata per i nostri esperimenti di titolazione, conteneva per litro 0,01 mol. (diclorofenolo-indofenolo) e 0,001 mol. NaOH.

La soluzione della sostanza in esame (chinone e pentosio) viene posta in un matraccio di Erlenmeyer, immerso in un termostato, la cui temperatura viene mantenuta costante durante ogni serie di esperienze. La reazione col RT viene effettuata in atmosfera di azoto.



(4) EULER e H. HASSELQUIST, «Sv. Vet. Akad. Arkiv f. Kemi», 1, n. 40 (1949).

(5) H. v. PECHMANN, «Ber. deut. chem. Ges.», 21, 1411 (1888).

(6) EULER, «Chimia», 3 209 (1949).

La soluzione di RT viene aggiunta per mezzo di una buretta, posta sopra al matraccio di Erlenmeyer. Di quando in quando viene aggiunto 1 cm³ della soluzione di RT e determinato il tempo necessario per la decolorazione (riduzione).

1. TITOLAZIONE DEL p-CHINONE IN SOLUZIONE ALCALINA PER MEZZO DEL REATTIVO DI TILLMANS. — Fu dimostrato che la scissione del chinone è una reazione ossidativa e che non viene effettuata per via idrolitica ad opera del solo alcali (7).

Abbiamo dapprima voluto determinare la velocità iniziale (il tempo necessario perchè avvenga 1/10 della reazione totale). Ma già le nostre esperienze preliminari hanno dimostrato che la reazione tra il chinone e il reattivo di Tillmans si svolge in due fasi. Questo fatto si vede distintamente se l'esperienza viene eseguita in

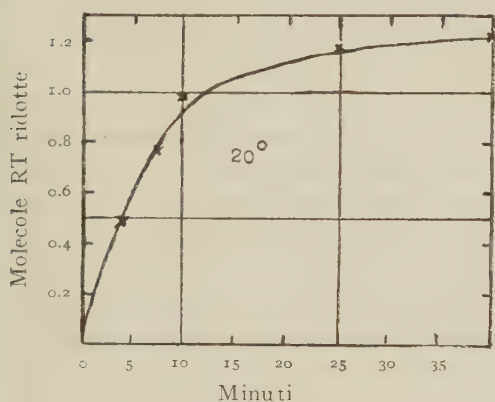


Fig. 1.

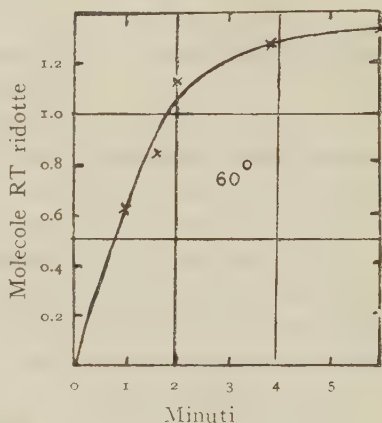


Fig. 2.

atmosfera di azoto alla temperatura di 20° e 60° in una soluzione 0,002 molare di chinone in 0,33 n. NaOH (fig. 1 e 2).

Una molecola di chinone riduce 1,7 molecole di RT (diclorofenolo-indofenolo). Circa una molecola di RT viene ridotta rapidamente (durante 10 minuti) nella prima parte della reazione e si può supporre che l'anello del chinone venga scisso con formazione di un gruppo endiolico, e che la catena così ottenuta reagisca poi lentamente con un'altra molecola di RT.

Se la prima reazione (reazione iniziale) viene eseguita con alcali a differente concentrazione, si vede che la velocità della reazione non è proporzionale alla concentrazione dell'alcali, ma aumenta più lentamente.

(7) Una scissione puramente idrolitica del chinone decorrerebbe secondo l'equazione:



e condurrebbe non al riduttore, ma al riduttore (l'alcool corrispondente).

Anche ad opera di un'altra sostanza ossidante (H₂O₂) la scissione ossidativa del chinone avviene in soluzione alcalina con una velocità assai grande. Pure in questo caso la formazione di un gruppo endiolico può essere dimostrata mediante la titolazione con il reattivo di Tillmans.

0,005 n. *p*-chinone. Temp. 20°

Concentrazione di NaOH	Velocità iniziale:
	Minuti necessari per la decolorazione del 10 % di RT pres.
0,05 n	5' 20''
0,10 n	7' 45''
0,50 n	19' 00''

Possiamo supporre che questa velocità sia una funzione della concentrazione dell'anione del chinone⁽⁸⁾. Secondo esperienze di Euler e Bolin⁽⁹⁾ il chinone è un acido molto debole, caratterizzato dalla costante di dissociazione di $1,2 \cdot 10^{-13}$.

2. VELOCITÀ DELLA FORMAZIONE DI RIDUTTONI DA PENTOSI. — Nelle prime ricerche sulla formazione di riduttoni⁽¹⁰⁾ fu osservato qualitativamente che alcuni pentosi reagiscono con il reattivo di Tillmans. Esperimenti quantitativi concernenti il ramnosio e lo xilosio furono eseguiti da Euler e Hasselquist⁽¹¹⁾.

Per ogni molecola di ramnosio gli autori hanno osservato la formazione di 0,9 molecole di endiolo. In un'altra esperienza hanno trovato che da una molecola di xilosio, alla temperatura di 65° e in soluzione di NaOH 0,02 n., si formano 2,03 molecole di endiolo, mentre si formano solamente 1,07 molecole di endiolo da una molecola di glucosio.

Nel corso delle nostre esperienze abbiamo osservato che anche i pentosi arabinosio e ribosio⁽¹²⁾ reagiscono in soluzione NaOH 0,1 n. analogamente allo xilosio. Una molecola di ognuno di questi pentosi riduce, ad una temperatura di 70–80°, due molecole di RT, e si può supporre che uno dei due gruppi riducenti appartenga al trioso-riduttone.

Analogamente a quanto abbiamo osservato nel caso del *p*-chinone, anche la reazione dei pentosi studiati avviene in due fasi: dapprima viene formata una molecola di endiolo con grande velocità, mentre la riduzione dell'altra molecola di RT avviene molto lentamente (ved. fig. 3).

Riteniamo perciò che il quadro delle reazioni venga complicato da altri fattori che possono essere influenzati dalla concentrazione dell'alcali. Così, se ammettiamo che nel corso della reazione si formi trioso-riduttone, dovrebbe originarsi contemporaneamente una sostanza contenente due atomi di carbonio, della cui natura nulla sappiamo. Essa potrebbe essere a sua volta dotata di potere riducente, e venire influenzata dalla concentrazione dell'alcali.

(8) EULER, *Homogene Katalyse*. Berlin W. de Gruyter. Sammlung Göschen (1931).

(9) EULER e I. BOLIN, «Zeitschr. f. physik. Chem.», 66, 71 (1909).

(10) EULER e E. KLUSMANN, «Sv. Vet. Akad. Arkiv f. Kemi etc.», 11 B, n. 8 (1933).

(11) EULER e H. HASSELQUIST, «Sv. Vet. Akad. Arkiv f. Kemi», 1, n. 24 (1949).

(12) Desossiribosio non reagisce con RT.

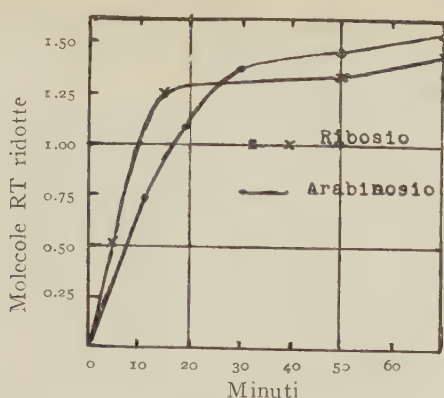


Fig. 3.

Da quanto abbiamo esposto risulta l'impossibilità di seguire tutto il corso delle reazioni tra pentosi e RT in ambiente alcalino. È stato invece possibile determinare le *velocità iniziali* di tali reazioni, e cioè i tempi necessari per la decolorazione del primo 20 % di RT; queste infatti mostrano dei valori relativi praticamente indipendenti dalla concentrazione dell'alcali. Ciò risulta dalla seguente tabella:

Pentosio 0,005 mol.

Tempo necessario per la decolorazione
di 0,001 mol. di RT. Minuti

in NaOH 0,01 n. in NaOH 0,03 n.

Xilosio	6	11
Arabinosio	14	24
Ribosio	10	35

Si può supporre che questi valori siano essenzialmente determinati dalla concentrazione delle molecole enolizzate, reagenti con la sostanza ossidante (RT).

Chimica. — *Ricerche strutturistiche sul manganimolibdato d'ammonio* (*). Nota di VINCENZO CAGLIOTI e ALFONSO M. LIQUORI, presentata (**) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

Nel corso di indagini chimico-fisiche sui complessi che si vanno effettuando nel nostro Laboratorio, ci siamo proposti di risolvere la struttura di un manganimolibdato di ammonio che per diversi anni fu oggetto di investigazioni da parte di vari ricercatori (Struve⁽¹⁾, Péchard⁽²⁾, Rosenheim e Itzig⁽³⁾, Friedheim e

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Roma - Centro di Chimica generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) STRUVE, «J. pr. Ch.», 61, 449 (1854).

(2) PÉCHARD, «Compt. rend.», 125, 29 (1897).

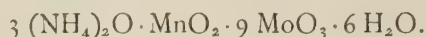
(3) ROSENHEIM e ITZIG, «Z. an. Ch.», 15, 76 (1898).

Samelson⁽⁴⁾, Friedheim e Allemann⁽⁵⁾, Hall⁽⁶⁾, Zambonini e Caglioti⁽⁷⁾), i quali proposero formule differenti per i prodotti che si ottenevano variando anche leggermente le condizioni di preparazione^{(4) (5)}.

Zambonini e Caglioti, attraverso una vasta ricerca estesa anche a composti analoghi, servendosi soprattutto dell'analisi cristallografica, fecero osservare come i differenti manganimolibdati d'ammonio preparati dai vari autori per ossidazione del manganese bivalente in presenza di paramolibdato d'ammonio, presentassero proprietà fisiche identiche e giunsero alla conclusione che si trattava di un unico composto, isomorfo coi corrispondenti sali di rubidio, potassio e argento e con il nichel molibdato di ammonio. Per l'analogia cristallografica di questo composto con i dodecamolibdati, assegnarono ad esso la formula:



Recentemente Schaal e Souchay⁽⁸⁾ hanno confermato con i metodi analitici l'esistenza di un unico manganimolibdato d'ammonio, assegnando però la formula



Hanno inoltre attribuito una analoga composizione al nichelmolibdato d'ammonio.

Poichè i metodi chimici, data la complessità e l'elevato peso molecolare di questi composti, non sono sufficienti, da soli, a definire in modo univoco la formula di essi, in quanto lievi differenze nei dati analitici, dell'ordine anche dell'1%, possono indurre ad una formulazione o all'altra, abbiamo ritenuto opportuno effettuare uno studio con i raggi X al fine di stabilire il peso molecolare e possibilmente la reale struttura del composto.

I cristalli esaminati sono stati preparati, col metodo già descritto in precedenza⁽⁷⁾, in forma di romboedri rossi ben sviluppati. Essi non mostrano alcun effetto piezoelettrico.

I fotogrammi ottenuti con il metodo del cristallo singolo hanno dato i seguenti risultati:

$$a = b = c = 10,015 \text{ \AA} \pm 0,015$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 104^\circ 24'.$$

Da tali valori sono stati calcolati i periodi della cella elementare esagonale:

$$a_H = 15,82$$

$$c_H = 12,3$$

controllati con fotogrammi Debye Sherrer.

(4) C. FRIEDHEIM e M. SAMELSON, «Z. an. Ch.», 24, 65 (1900).

(5) FRIEDHEIM e ALLEMANN, «Mitth. naturf. Ges. Bern.», 23 (1904).

(6) HALL, «J. Am. Chem. Soc.», 29, 600 (1907).

(7) ZAMBONINI e CAGLIOTI, «Gazz. Chim. Ital.», 59, 400 (1929).

(8) R. SCHAAL e P. SOUCHAY, «Anal. Chim. Acta», 3, 1 (1949).

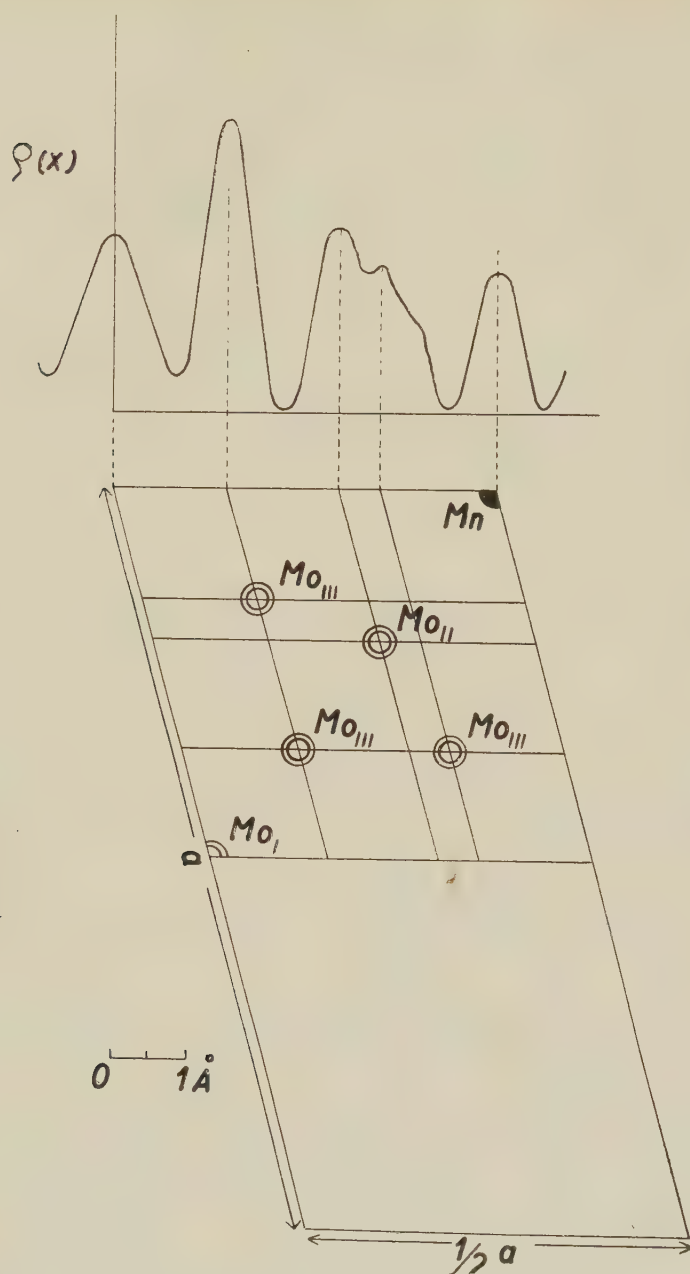


Fig. 1.

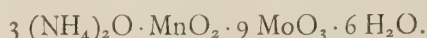
Gli indici esagonali h_H, k_H, l_H , attribuiti alle righe dello spettro di polveri sottostanno alla condizione: $3n = h_H - k_H + l_H$. I cristalli appartengono quindi al sistema romboedrico esagonale.

Dal volume della cella elementare esagonale e della densità $(3,028)^{(7)}$ si sarebbe potuto ammettere, nell'ambito degli errori sperimentali, che nella cella

stessa potessero essere contenute o due molecole del composto formulato $4 (\text{NH}_4)_2\text{O} \cdot \text{MnO}_2 \cdot 12 \text{MoO}_3 \cdot \text{MnMoO}_4 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$ oppure 3 molecole del composto formulato $3 (\text{NH}_4)_2\text{O} \cdot \text{MnO}_2 \cdot 9 \text{MoO}_3 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$.

Dal volume della cella elementare romboedrica, però, si calcola un peso molecolare di $1622/n$ che per $n = 1$ risulta in buon accordo con quello di 1646 corrispondente alla formula proposta da Schaal e Souhay.

E poichè tale cella è sicuramente primitiva si può senz'altro accettare per il composto la formula:



Risultava pertanto di notevole interesse stabilire la struttura di un tale composto che formalmente farebbe ritenere possibile l'esistenza di un manganese tetravalente coordinato con nove gruppi molibdici.

Il gruppo spaziale più probabile scelto sulla base degli elementi di simmetria del reticolo reciproco e della statistica dei riflessi è:

$$D_3 d^5 - R \bar{3} M.$$

La simmetria di tale gruppo spaziale è compatibile con varie possibili distribuzioni dei raggruppamenti atomici presenti nella molecola.

Ritenendo che un'analisi vettoriale Patterson potesse fornire con sufficiente esattezza almeno le coordinate degli atomi di Molibdeno e Manganese, dato il loro maggiore potere di diffrazione rispetto agli altri presenti, abbiamo effettuato tale sviluppo con i dati ottenuti dalle intensità dei riflessi registrati sul fotogramma Weissenberg intorno ad uno spigolo romboedrico. L'apprezzamento delle intensità è stato effettuato visualmente con l'aiuto di una scala campione senza alcuna correzione per l'assorbimento e l'estinzione secondaria.

Sono stati così localizzati i nove atomi di Molibdeno e l'atomo di Manganese presenti e in base: *a*) alle dimensioni della cella elementare; *b*) alle distanze $\text{Mo}^{\text{VI}}-\text{O}$, $\text{Mn}^{\text{IV}}-\text{O}$, $\text{O}-\text{O}$, della letteratura; *c*) alla simmetria del gruppo spaziale; è stato possibile assegnare al complesso in modo approssimato una configurazione spaziale risultante da una condensazione molto compatta fra poliedroni di atomi di ossigeno coordinati attorno agli atomi di Molibdeno e Manganese.

Benchè le coordinate attribuite agli atomi di ossigeno siano abbastanza incerte, abbiamo calcolato i fattori di struttura F_{hoo} , potendo ritenere in base ad alcune prove effettuate le costanti di fase non influenzate nè dagli errori sicuramente introdotti per gli atomi di ossigeno nè dall'aver trascurato i contributi delle sei molecole d'acqua e dei sei ioni ammonio.

La Fourier lineare sviluppata con gli F_{hoo} sperimentali, corretti con un fattore termico fittizio, onde affrettare la convergenza della serie, data l'esiguità dei termini impiegati, è riportata in fig. 2.

Si sono così ottenute le coordinate degli atomi di Molibdeno e Manganese riportate in tabella I.

Su questi dati sono stati dedotti i corrispondenti vettori relativi alle distanze $\text{Mo}-\text{Mo}$ e $\text{Mo}-\text{Mn}$, che riportati sulla mappa Patterson danno una conferma dell'interpretazione iniziale.



Fig. 2.

La distribuzione degli atomi di Molibdeno e Manganese è quella della fig. 3. Un atomo di Molibdeno (Mo_I) è al centro della cella elementare ed un atomo

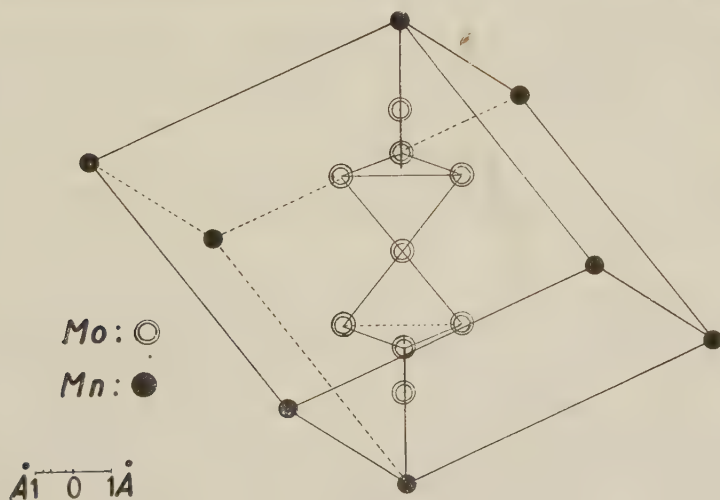
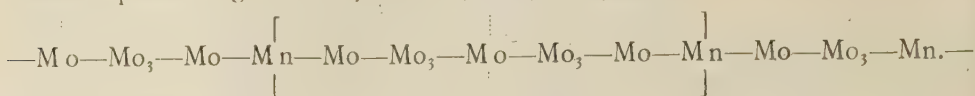


Fig. 3.

di Manganese a ciascun vertice. Sei atomi di Molibdeno (Mo_{III}) occupano i vertici di due tetraedri orientati secondo l'asse trigonale e aventi in comune un vertice occupato dall'atomo di Molibdeno centrale. Due atomi di Molibdeno sono disposti

simmetricamente lungo l'asse trigonale. In definitiva si può rappresentare la distribuzione spaziale degli atomi pesanti nel modo seguente:



La parentesi piena comprende gli atomi di Molibdeno contenuti in una cella elementare. La parentesi tratteggiata presenta un ordinamento analogo avente al centro il Manganese in luogo del Molibdeno.

TABELLA I.

	Å		x/a	y/b	z/c
Mo _I — Mo _{III}	3,28	Mo _I	0	0	0
Mo _{III} — Mo _{III}	3,25	Mo _{II}	0,3	0,3	0,3
Mo _I — Mo _{II}	3,69	Mo _{III}	0,155	0,155	0,355
Mn — Mo _{II}	2,46	Mo _{III}	0,155	0,355	0,155
Mo _{II} — Mo _{III}	2,06	Mo _{III}	0,355	0,155	0,155
		Mn	0,5	0,5	0,5

Daremo altrove i dettagli della struttura completa del complesso con le coordinate di tutti gli atomi presenti e le considerazioni sulle proprietà chimico-fisiche che se ne possono dedurre.

Ringraziamo sentitamente il dott. Cacciavillani e la Soc. I. B. M. per aver messo a nostra disposizione personale e macchinari per il calcolo automatico, a schede perforate degli sviluppi Patterson.

Geologia. — *Tettonica del metano e metaniti.* Nota (*) del Socio GAETANO ROVERETO.

La tettonica del metano è uno dei casi più distinti del particolare assetto derivato dagli spostamenti di materiale fluidabile per idratazione, assorbimento meccanico, incorporamento gassoso.

Sono proprie di questa tettonica parecchie condizioni ben distinte: rigonfiamenti profondi nei terreni sciolti, da cui derivano gli anticlinali gravimetrici dovuti all'accumulo del metano, del petrolio e dei gas del petrolio; la manifestazione delle *salse* secondo particolari condotti, e conseguente morfologia superficiale prodotta dal materiale portato all'esterno in regioni collinose; le emissioni dello stesso materiale in regioni deltizie, o altrimenti alluvionali, spinte talvolta sino ad uno scarico sottomarino.

(*) Presentata nella seduta del 13 maggio 1950.

Benchè nell'Appennino il prodotto delle *salse* occupi aree abbastanza estese, non esiste alcun rilievo geologico che lo distingua e ne precisi i confini; d'ordinario va unito all'insieme degli scisti argillosi del cretaceo e dell'eocene, con la imperfetta denominazione di *argille scagliose*.

Come è noto, questa denominazione è dovuta al Bianconi, che quando nel 1838-39 la introdusse, ne diede pure una figura, che rappresentava l'aspetto della roccia di Paderno alla quale il nuovo nome si riferiva; e questa è la figura di un tipico prodotto della emissione fangosa, ossia di argilla impastata con frammenti a forma di scaglia, di rocce non stemperabili, e più resistenti degli scisti argillosi dalla emissione attraversati, e il Doderlein per il primo (1862), e poi lo Störh (1868), lo Stoppani (1866 e 1870), il Fuchs (1878) lo considerarono di tale origine.

Ma in realtà il Bianconi (1839, 1867) aveva compreso nella sua distinzione una gran parte del *flysch* scistoso, che io ed altri abbiamo poi distinto in cretaceo e in eocenico, in autoctono e in alloctono, come pure in numerose varietà rocceose, alle quali si poteva, e si può tuttora applicare queste frasi del Pantanelli (1895) « i geologi dopo averle ballottate da un periodo ad un altro, hanno anche dubitato, che, invece di aversi veri strati sedimentari, non dovessero la loro origine a colossali eruzioni fangose ».

Il Bianconi però (1855), piuttosto che ad eruzioni fangose, preferì credere, per spiegare gli anormali giacimenti delle sue argille scagliose, all'influenza della *sortita* (ed era un concetto del Pareto esposto in quell'anno) delle serpentine.

È poi inesatto, in qualsiasi caso di tettonica metanica, di parlare di eruttività o di pseudovulcanismo, si tratta invece di *lutivomeità* e, come voleva il Gümbel, appunto per le *salse* appenniniche (1879), di *fontane di fango*.

Contemporaneamente all'opera del Gümbel, la bibliografia su questo argomento si fa abbondante, ma con una bordata verso tutt'altro fianco, e il Mantovani (1875), il De Stefani (1878-79), l'Uzielli (1879-1880), il Bombicci (1882) sostengono che le argille scagliose sono unicamente sedimentarie, e anche riccamente fossilifere, basandosi, per quest'ultima condizione, sulle argille di Brancaleone in Calabria, di cui il Seguenza (1878) aveva allora descritta la fauna, e riferitala al cenomaniano, stabilendo così un grande caposaldo per l'ordinamento delle rocce argillose appenniniche, del quale però subito si profittava male, e che poi si dimenticava del tutto.

E queste conoscenze non migliorarono con la « Carta Geologica della Provincia di Bologna » di G. Capellini (1881), e con le numerose Memorie e le carte geologiche del Sacco, incominciate dieci anni dopo, e nemmeno con la nuova edizione della « Carta Geologica d'Italia » al milionesimo.

Nel contempo però, dalla *morta gora* dei problemi che si credono risolti, emergevano le nuove ricerche dell'Anelli (1922-1927), e del Fossa-Mancini (1927), le cui sezioni mi servivano di guida per riconoscere con loro che le argille scagliose, dovute alle emissioni fangose, coprivano a mantello il miocene, il pliocene, e i terrazzi quaternari, sino a comprendere, come osservavo in val d'Arda, durante un Congresso Geologico, il terrazzo più basso.

Riconoscevo pure, che in una sola località dell'estesa formazione del *Flysch* ligure del versante meridionale (1923) esistevano i resti di una emissione fan-

gosa, avvenuta quando la valle di Sestri Levante aveva raggiunto, col suo fondo, il livello del quaternario medio; il restante era costituito da scisti calcareo-argillosi, scisti argillosi, scisti galestrini, scisti ardesiaci ed altri, distinzioni per ora empiriche, se si vuole, ma necessarie (1939). Fra esse solo quella degli scisti galestrini, o *galestro*, derivata da una distinzione del Savi (1838-1839), registrata nel suo *Index*, sino dal 1872, dello Studer, precisata poi dal Bombicci (1882), è ben definita.

Dopo queste mie affermazioni, il Sacco, pubblicando parecchi fogli della « Carta Geologica d'Italia » al centomila, dell'Emilia, ripeteva nelle didascalie l'indicazione di « scisti argillosi e argille scagliose », e per di più, nel foglio « Vergato », dopo revisioni del 1932-33, accennava anche ad una limitazione topografica fra le due rocce; era poco, ma era già qualche cosa, benchè affermasse nelle « Note illustrative » del foglio, che « la scagliosità è prodotta essenzialmente dal derivato dalle enormi pressioni subite da queste argille ».

Tuttavia i prodotti delle fontane fangose, dopo abolito, come ora suggerisco, quello di argille scagliose, mancano di un vocabolo distintivo; propongo quello di *metaniti*, che elimina qualsiasi equivoco, ed è parte essenziale della tettonica del metano.

Le metaniti variano alquanto di natura, a seconda dell'età, dell'energia produttiva, della struttura geologica, delle condizioni morfologiche in cui avvengono, o sono avvenute, da tempi più o meno remoti; nell'Appennino sono delle argille impastate con scaglie rocciose sparse, non comprese in pieghe, anche se queste sono postume; nella regione di Bacù, sul Caspio, formano in parte un brecciamme fortemente compresso, compreso nel fondo di sinclinali, di cui ho potuto avere le fotografie; le metaniti dei delta sono di fango, con materie organiche più o meno decomposte (delta dell'Indo e del Mississippi); quelle che artificialmente si producono con le perforazioni nella Pianura Padana sono di fango e sabbia: in complesso, quindi, il vocabolo metanite ha un significato principalmente fenomenologico, e solo secondariamente litologico.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi. - *Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata.* Nota II di FEDERICO CAFIERO, presentata (*) dal Corrisp. R. CACCIOPPOLI.

Ispirandosi ad una recente ricerca ⁽¹⁾ del prof. G. Scorza Dragoni, G. Stampacchia ha introdotto, per le successioni di funzioni misurabili rispetto ad una variabile e continue rispetto all'altra, il concetto di convergenza quasi uniforme in modo semiregolare, e, per le successioni di funzioni continue rispetto alle variabili separatamente, quello di convergenza uniforme in modo regolare. Ha quindi

(*) Nella seduta del 15 aprile 1950.

(1) G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto all'altra variabile.* « Rend. Sem. Matem. di Padova ». Anno XVII, pp. 102-106 (1948). Cfr. anche L. TIBALDO, *Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. II, pp. 146-152 (1947).

dato, per le successioni di funzioni linearmente assolutamente continue, un notevole criterio di compattezza rispetto alla convergenza quasi uniforme in modo regolare, utile in questioni di Calcolo delle variazioni ⁽²⁾.

In questa Nota, riprendendo le considerazioni dello Stampacchia e fruendo di risultati conseguiti nella Nota I, stabilisco il seguente criterio di compattezza, rispetto alla convergenza quasi uniforme in modo semiregolare, per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata ed assolutamente continue rispetto ad una variabile:

Sia $\{f_n(x, y)\}$ una successione di funzioni egualmente limitate ⁽³⁾ nel quadrato $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, ivi generalmente a variazione limitata ed assolutamente continue rispetto ad y per quasi tutti i valori di x in $(0, 1)$.

Esistano due numeri positivi, α e k , tali che per ogni n si abbia:

$$(1) \quad \int_0^1 V_x^{(n)}(y) dy < k, \quad \iint_D \left| \frac{\partial f_n}{\partial y} \right|^{1+\alpha} dx dy < k.$$

Allora dalla successione data se ne può estrarre una convergente uniformemente in modo semiregolare rispetto ad y ⁽⁴⁾.

Alla dimostrazione di tale teorema, come ho già preannunciato nella Nota I, premetto alcune semplici considerazioni su di un noto procedimento di approssimazione ⁽⁵⁾ per le funzioni integrabili (secondo Lebesgue), utili allo scopo di dimostrare il carattere invariante della condizione (1) della Nota I rispetto ad una qualunque rotazione degli assi.

1. Sia $f(x, y)$ integrabile (secondo Lebesgue) nel quadrato:

$$D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

allora per ogni h positivo, opportunamente piccolo, si può definire la funzione:

$$f_h(x, y) = \frac{1}{(2h)^2} \int_{x-h}^{x+h} \int_{y-h}^{y+h} f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

(2) Lav. cit. in nota (5) della Nota I.

Una successione di funzioni $\{f_n(x, y)\}$ definite in $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, ivi misurabili per quasi tutti gli $y[x]$ di $(0, 1)$ e continue per quasi tutti gli $x[y]$ di $(0, 1)$, converge in D quasi uniformemente in modo semiregolare rispetto ad $y[x]$, quando, fissato un $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un insieme $I_x[I_y]$ dell'asse delle $x[y]$, di misura minore di ε , tale che la successione converga uniformemente nell'insieme costituito dai punti di D la cui proiezione non appartiene ad $I_x[I_y]$.

Si dice poi che la detta successione converge in D quasi uniformemente in modo regolare, se converge in D quasi uniformemente in modo semiregolare sia rispetto ad x che rispetto ad y .

(3) Più in generale le funzioni della successione $\{f_n(x, y)\}$ possono suporsi egualmente quasi limitate in modo semiregolare rispetto ad y e cioè tali che, per ogni numero positivo ε , è possibile determinare un numero $H > 0$ in modo da aversi $|f_n(x, y)| \leq H$, ($n = 1, 2, \dots$), in tutti i punti di D eccettuati quelli di un insieme h_n la cui proiezione sull'asse delle x è di misura minore di ε .

(4) Analogo criterio può enunciarsi per la convergenza quasi uniforme del tipo semiregolare rispetto ad x .

(5) Cfr. ad esempio lav. cit. in nota (1) della Nota I.

in ogni punto (x, y) del quadrato:

$$D_h: h \leq x \leq 1-h, \quad h \leq y \leq 1-h.$$

Sono note⁽⁶⁾ le seguenti proposizioni:

a) La funzione $f_h(x, y)$ è continua in D_h .

b) Risulta:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h(x, y) = f(x, y)$$

quasi ovunque in D .

c) Sia $f(x, y)$ integrabile $1 + \alpha$ ($\alpha \geq 0$) in D , allora anche $f_h(x, y)$ è integrabile $1 + \alpha$ in D_h e si ha

$$\iint_{D_h} |f_h(x, y)|^{1+\alpha} dx dy \leq \iint_D |f(x, y)|^{1+\alpha} dx dy.$$

Osserviamo che:

d) La funzione $f_h(x, y)$ è assolutamente continua rispetto alle variabili separatamente.

Omettiamo la dimostrazione poichè la proposizione enunciata discende ovviamente dalla nota assoluta continuità dell'integral-funzione di $f(x, y)$.

Le note proposizioni enunciate e l'osservazione ora fatta ci permettono di pervenire al seguente teorema:

e) Sia $f(x, y)$ quasi continua e generalmente a variazione limitata in D . Allora la funzione $f_h(x, y)$ è assolutamente continua secondo Tonelli e si ha:

$$(2) \quad \iint_{D_h} \left| \frac{\partial f_h}{\partial x} \right| dx dy \leq \int_0^1 V_x(y) dy, \quad \iint_{D_h} \left| \frac{\partial f_h}{\partial y} \right| dx dy \leq \int_0^1 V_y(x) dx.$$

Acceniamo alla dimostrazione.

Per ogni suddivisione in parti dell'intervallo $(h, 1-h)$ mediante i punti:

$$h \equiv y_0 < y_1 < \dots < y_{j-1} < y_j < \dots < y_m \equiv 1-h,$$

si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |f_h(x, y_{j-1}) - f_h(x, y_j)| &\leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{-h}^{+h} \sum_{i=1}^m |f(\xi, y_{j-1} + \eta) - \\ &- f(\xi, y_j + \eta)| d\eta \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} V_y(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Essendo $f_h(x, y)$ assolutamente continua rispetto alle variabili separatamente [proposizione d], risulta quindi:

$$\int_h^{1-h} \left| \frac{\partial f_h}{\partial y} \right| dy \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} V_y(\xi) d\xi.$$

(6) Cfr. nota (5).

Analogamente si dimostra che:

$$\int_h^{x-h} \left| \frac{\partial f_h}{\partial x} \right| dx \leq \frac{1}{2h} \int_{y-h}^{y+h} V_x(\eta) d\eta.$$

Poichè $f_h(x, y)$ è continua in D_h [proposizione a)], dalle due ultime limitazioni, per l'enunciato c), segue ovviamente l'asserto.

2. Operata una rotazione degli assi (x, y) negli assi (X, Y) , indichiamo con \bar{D} il dominio corrispondente a D e con:

$$x = u(X, Y), \quad y = v(X, Y)$$

le formule della trasformazione inversa, avendo posto:

$$u(X, Y) = X \cos \varphi - Y \sin \varphi, \quad v(X, Y) = X \sin \varphi + Y \cos \varphi.$$

Orbene, ci proponiamo di far vedere che, *nella ipotesi che le variazioni di una successione $\{f_n(x, y)\}$ di funzioni, quasi continue e generalmente a variazione limitata in D , soddisfino alla condizione:*

$$(1') \quad \int_0^1 V_y^{(n)}(x) dx + \int_0^1 V_x^{(n)}(y) dy < k,$$

un'analogha limitazione è soddisfatta per le variazioni delle funzioni della stessa successione calcolate rispetto ai nuovi assi X ed Y ed in un qualunque dominio rettangolare $R: a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d$ interno a \bar{D} .

Per l'enunciato e) la funzione approssimante:

$$f_h^{(n)}(x, y) = \frac{1}{(2h)^2} \int_{x-h}^{x+h} \int_{y-h}^{y+h} f_n(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

è in D_h assolutamente continua secondo Tonelli.

Posto:

$$F_h^{(n)}(X, Y) = f_h^{(n)}[u(X, Y), v(X, Y)],$$

si ha:

$$\left| \frac{\partial F_h^{(n)}}{\partial X} \right| \leq \left| \frac{\partial f_h^{(n)}}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f_h^{(n)}}{\partial y} \right|$$

e quindi per la (2) ed (1') risulta:

$$(3) \quad \iint_{\bar{D}_h} \left| \frac{\partial F_h^{(n)}}{\partial X} \right| dX dY < k,$$

dove con \bar{D}_h abbiamo indicato il dominio corrispondente a D_h nella trasformazione operata.

Posto:

$$F_n(X, Y) = f_n[u(X, Y), v(X, Y)],$$

la $F_n(X, Y)$ è ancora generalmente a variazione limitata in R e si ha:

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} F_h^{(n)}(X, Y) = F_n(X, Y)$$

quasi ovunque in \bar{D} .

Detto E l'insieme dei punti di \bar{D} , di misura superficiale nulla, in cui la (4) non è verificata, indichiamo con E_n un insieme di punti di R , anch'esso di misura nulla, contenente E e tale che, trascurando i valori che la funzione $F_n(X, Y)$ assume in esso, le variazioni $V_Y^{(n)}(X)$ e $V_X^{(n)}(Y)$ risultino quasi ovunque finite, quasi continue ed integrabili rispettivamente in (a, b) ed in (c, d) .

Si ha ovviamente:

$$V_X^{(n)}(Y) \leq \lim'_{h \rightarrow 0} \int_a^b \left| \frac{\partial F_h^{(n)}}{\partial X} \right| dX,$$

e quindi, per la (3) ed in virtù di un noto lemma di Fatou, risulta:

$$\int_c^d V_X^{(n)}(Y) dY < k.$$

Poichè analoghe considerazioni si possono fare per $V_Y^{(n)}(X)$, il nostro asserto è provato.

3. Indichiamo con S la classe delle funzioni $f(x, y)$ definite in R : $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, ivi quasi continue rispetto ad x per quasi tutti i valori di y in (c, d) e continue rispetto ad y per quasi tutti i valori di x in (a, b) .

Ogni funzione $f(x, y)$ della classe S è, com'è noto⁽⁷⁾, quasi uniformemente equicontinua rispetto ad y , gode cioè della seguente proprietà:

I) Fissato un numero positivo ε è possibile determinare un insieme i di (a, b) di misura minore di ε e tale che $f(x, y)$ sia uniformemente continua rispetto ad y nella porzione di R costituita dai punti di R che non hanno l'ascissa in i .

Per semplicità di linguaggio introduciamo la seguente locuzione:

« Diremo che le funzioni, della classe S , di una data successione $\{f_n(x, y)\}$ godono in R uniformemente della proprietà I), quando per ogni coppia di numeri positivi ε ed ω è possibile determinare un $\delta > 0$ in modo tale che, per tutti gli x di (a, b) , eccettuati quelli di un insieme $e_x^{(n)}$ di misura minore di ε , si abbia:

$$|f_n(x, y') - f_n(x, y'')| < \omega$$

per ogni n e ogni coppia, y' ed y'' , di valori di y in (c, d) tali che $|y' - y''| < \delta$ ».

Ciò posto, dimostriamo il seguente teorema:

Sia $\{f_n(x, y)\}$ una successione di funzioni della classe S definite in R , ivi egualmente quasi limitate in modo semiregolare rispetto ad y ⁽⁸⁾ e godenti uniformemente della proprietà I).

(7) Cfr. lav. cit. in Nota (1).

(8) Cfr. nota (3).

Si supponga inoltre che per un insieme H , ovunque denso in (c, d) , di valori di y per i quali le funzioni $f_n(x, y)$ ($n = 1, 2, \dots$) risultano quasi continue, la data successione converga quasi dappertutto in (a, b) .

Allora dalla successione $\{f_n(x, y)\}$ se ne può estrarre una convergente in R quasi uniformemente in modo semiregolare rispetto ad y .

A tale scopo, per un noto teorema, basta far vedere che le funzioni della successione $\{f_n(x, y)\}$ sono egualmente quasi continue in modo semiregolare rispetto ad y ⁽⁹⁾.

Fissati due numeri $\varepsilon > 0$ ed $\omega > 0$ determiniamo un numero positivo δ in modo tale che, per tutti gli x di (a, b) , eccettuati quelli di un insieme $e_x^{(n)}$ tale che:

$$\text{mis } e_n^{(x)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

si abbia:

$$|f_n(x, y') - f_n(x, y'')| < \frac{\omega}{3}$$

per ogni n ed ogni coppia di valori di y in (c, d) soddisfacenti alla limitazione $|y' - y''| < \delta$.

Determinato m in modo tale che $(d - c)/m < \delta$, suddividiamo l'intervallo (c, d) in m parti eguali mediante i punti:

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{j-1} < y_j < \dots < y_m \equiv d$$

ed indichiamo con \bar{y}_j un punto di H interno all'intervallo $y_{j-1} \leq y \leq y_j$ ($j = 1, 2, \dots$).

Posto:

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, \bar{y}_j) = F_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

quasi ovunque in (a, b) , scegliamo una porzione perfetta E di (a, b) , di misura maggiore di $b - a - \varepsilon/4$ e tale che in E risultino continue tutte le funzioni $F_1(x)$, $F_2(x)$, \dots , $F_m(x)$.

Indichiamo inoltre con I una porzione perfetta di E , di misura maggiore di $b - a - \varepsilon/2$, tale che in essa, per ogni valore di j , la (5) valga uniformemente.

Scegliamo infine un numero positivo σ in modo tale che, se x' ed x'' sono punti di I soddisfacenti alla condizione $|x' - x''| < \sigma$, si abbia:

$$|F_j(x') - F_j(x'')| < \frac{\omega}{9} \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Per la uniforme convergenza in I della successione $\{f_n(x, \bar{y}_j)\}$ verso $F_j(x)$, si può determinare un indice ν in modo tale che si abbia:

$$|f_n(x, \bar{y}_j) - F_j(x)| < \frac{\omega}{9} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

(9) Le funzioni, della classe S , di una data successione $\{f_n(x, y)\}$ diconsi *egualmente quasi continue in modo semiregolare rispetto ad y in R* quando, per ogni coppia di numeri positivi ε ed ω , è possibile decomporre R in un numero finito di insiemi E_i in modo tale che l'oscillazione di ogni funzione $f_n(x, y)$ risulti minore di ω in ogni insieme E_i , prescindendo dai punti di un insieme e_n la cui proiezione sull'asse delle x abbia misura minore di ε .

Per il teorema applicato cfr. G. STAMPACCHIA, lav. cit. in nota (5) della Nota I.

per $n > \nu$ e per x in I . Quindi se x' ed x'' sono due punti di I tali che $|x' - x''| < \sigma$, per $n > \nu$ e per tutti i valori di j , risulta:

$$|f_n(x', \bar{y}_j) - f_n(x'', \bar{y}_j)| \leq |f_n(x', \bar{y}_j) - F_j(x')| + |F_j(x') - F_j(x'')| + |F_j(x'') - f_n(x'', \bar{y}_j)| < \frac{\omega}{3}.$$

Ciò posto, determinato un numero positivo r tale che $(b - a)/r < \sigma$, suddividiamo l'intervallo (a, b) in r parti uguali mediante i punti:

$$c \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_r \equiv d$$

ed indichiamo con R_{ij} il rettangolo:

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j.$$

Orbene, riesce facile far vedere che per $n > \nu^{(10)}$ risulta minore di ω la oscillazione di ogni $f_n(x, y)$ calcolata in ogni rettangolo parziale R_{ij} prescindendo dai punti dell'insieme $CI + e_x^{(n)}$ di misura minore di ε .

Siano infatti $P(x', y')$ e $P''(x'', y'')$ punti di uno stesso rettangolo le cui ascisse non appartengono all'insieme $CI + e_x^{(n)}$. Si ha allora per $n > \nu$:

$$|f_n(x', y') - f_n(x'', y'')| \leq |f_n(x', y') - f_n(x', \bar{y}_j)| + |f_n(x', \bar{y}_j) - f_n(x'', \bar{y}_j)| + |f_n(x'', \bar{y}_j) - f_n(x'', y'')| < \omega.$$

OSSERVAZIONE. - Nell'enunciato del teorema dimostrato in questo numero, all'ipotesi che la successione $\{f_n(x, y)\}$ converga quasi dappertutto in (a, b) per ogni y , in cui le funzioni $f_n(x, y)$ sono quasi continue, di un insieme ovunque denso in (c, d) , si può sostituire la seguente:

Per ogni y , in cui le funzioni $f_n(x, y)$ risultano quasi continue, di un insieme ovunque denso in (c, d) , dalla successione $\{f_n(x, y)\}$ se ne possa estrarre una convergente quasi ovunque in (a, b) .

4. Nelle ipotesi del teorema enunciato in prefazione, la sola seconda delle (1) basta, com'è noto⁽¹¹⁾, ad assicurare che le funzioni della successione $\{f_n(x, y)\}$ godano uniformemente della proprietà I).

Pe dimostrare il suddetto teorema, in virtù della proposizione stabilita nel numero precedente, basta allora far vedere che dalla successione $\{f_n(x, y)\}$ se ne può estrarre una convergente quasi dappertutto in D . Ciò, per il teorema stabilito nella Nota I, è d'immediata verifica in quanto, per la seconda delle (1), anche gli integrali:

$$(6) \quad \int_0^1 V_y^{(n)}(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

risultano equilimitati.

(10) Un numero finito di funzioni della classe S risultano sempre egualmente quasi continue in modo semiregolare rispetto ad y . Cfr. lav. cit. in nota (1).

(11) Cfr. G. STAMPACCHIA, lav. cit. in nota (5) della Nota I.

Infatti, per la disuguaglianza di Schwarz generalizzata si ha:

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial f_n}{\partial y} \right| dy \leq \left[\int_0^1 \left| \frac{\partial f_n}{\partial y} \right|^{1+\alpha} dy \right]^{1/1+\alpha}$$

e ciò dimostra che le variazioni $V_y^{(n)}(x)$ sono integrabili $1 + \alpha$ e che si ha:

$$\int_0^1 [V_y^{(n)}(x)]^{1+\alpha} dx \leq \int_D \left| \frac{\partial f_n}{\partial y} \right|^{1+\alpha} dx dy.$$

Infine osservando che, ancora per la disuguaglianza di Schwarz, risulta:

$$\int_0^1 V_y^{(n)}(x) dx \leq \left[\int_0^1 [V_y^{(n)}(x)]^{1+\alpha} dx \right]^{1/1+\alpha},$$

ne consegue l'asserto.

Analisi matematica. — *Su un problema di integrazione delle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti.*
Nota di FRANCESCO SBRANA, presentata (*) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. Ci proponiamo in questa Nota di risolvere in maniera particolarmente semplice il noto problema, che chiameremo problema I, di determinare una funzione $u(x, y)$, integrale regolare ⁽¹⁾ dell'equazione differenziale

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0,$$

con a, b, c costanti reali (alla quale può sempre ricondursi la più generale equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti, alle derivate parziali del 2° ordine in due variabili indipendenti), nel campo C del piano xy in cui

$$0 \leq x \leq l, \quad -\infty < y < +\infty,$$

e soddisfacente alle condizioni

$$(2_1) \quad \lim_{y \rightarrow \pm \infty} u(x, y) = 0,$$

$$(2_2) \quad u(0, y) = \varphi(y), \quad u(l, y) = \psi(y), \quad \text{per } -\infty < y < +\infty,$$

dove i secondi membri siano funzioni assegnate della y , rappresentabili per ogni y mediante l'integrale doppio di Fourier ⁽²⁾.

(*) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) Cioè continua con le sue derivate dei primi due ordini, in ogni campo interno a C , salvo eventualmente lungo qualche linea rettificabile, in ciascun punto della quale potrà avere una discontinuità di 1ª specie. In ciascuno di tali punti eventuali si assumerà come di solito per valore della funzione la semisomma dei limiti destro e sinistro. Queste discontinuità si presenteranno però solo nel problema II, in una maniera che preciseremo in seguito.

(2) Basterà per questo che ciascuna delle funzioni assegnate abbia integrale assolutamente convergente in ogni intervallo $(a, +\infty)$, e $(-\infty, b)$, con $a > 0, b < 0$. Cfr. G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*; parte seconda, G. SANSONE (1946), p. 147.

È sostanzialmente noto che il problema indicato ha in generale un'unica soluzione. Particolare attenzione richiede però il caso delle funzioni metaarmoniche di 2^a specie, in cui si può ritenere $a = 1, b = 0, c = k^2$, con k positiva. Si riesce allora a stabilire il teorema di unicità se $k < \pi/l$ ⁽³⁾.

È anche noto che alla soluzione si può pervenire (escludendo il caso delle funzioni metaarmoniche di 2^a specie) col metodo delle immagini di Lord Kelvin ⁽⁴⁾. Credo tuttavia che possa interessare ugualmente l'espressione ottenuta per la soluzione stessa, espressione che può forse prestarsi per eventuali applicazioni numeriche. Non so d'altra parte se la soluzione che fornisco nel caso delle funzioni metaarmoniche di 2^a specie, nell'ipotesi che risulti $k < \pi/l$, sia stata prima d'ora indicata.

Ho considerato per semplicità il solo problema di Dirichlet relativo al campo C; ma risulterà chiaramente che in modo analogo si può risolvere il problema di Neumann, o un problema misto [in cui si supponga per esempio assegnata la $u(0, y)$, e la $u_x(l, y)$].

Osservo inoltre che dalla soluzione ottenuta segue ovviamente quella del problema che chiamerò problema II, di determinare la funzione $u(x, y)$ integrale regolare della (1) nel campo E in cui $0 \leq x \leq l, y \geq 0$, con le condizioni (2) per $y \geq 0$, ed in più nel caso ellittico e parabolico l'altra condizione

$$u(x, 0) = 0, \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq l,$$

e nel caso iperbolico invece

$$u(x, 0) = u_y(x, 0) = 0, \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq l.$$

Anche per questo problema sussiste il teorema di unicità. La soluzione verrà conseguita, deducendola, come si è detto, da quella del problema I.

Sull'argomento mi riprometto di tornare in altra occasione, per indicare soluzioni analoghe di problemi al contorno per equazioni e sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali di ordine qualunque, e in un numero qualunque di variabili indipendenti.

(3) Posto $u(x, y) = w(x, y) \sin(px + q)$, con p, q costanti, soddisfacenti alle limitazioni

$$k < p < \frac{\pi}{l}, \quad 0 < q < \pi - pl,$$

se in un punto P interno a C la $w(x, y)$ acquista un valore w_0 positivo, mentre si annulla per $x = 0, x = l$, e $y \rightarrow \pm \infty, 0 \leq x \leq l$, è possibile determinare un rettangolo R limitato dalle rette $x = 0, x = l$, e da altre due rette convenienti $y = m, y = n$, contenente P nel suo interno, lungo il contorno del quale sia $|w| < w_0$. Dovrebbe allora $w(x, y)$ raggiungere un massimo positivo in un punto interno ad R; ma ciò è in contraddizione con la (1).

In modo analogo si trova che la $w(x, y)$ non può acquistare valori negativi in C.

(4) Nel caso iperbolico ho dato per primo la soluzione per mezzo di integrali definiti del problema più generale in cui siano assegnate anche condizioni iniziali arbitrarie, nel campo E considerato più sotto nel testo. Ved. *Sulle vibrazioni di una corda elastica in un mezzo resistente*. «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», ser. 5^a, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pp. 207-212, e 407-411. Lo stesso problema ho risolto col metodo funzionale di HEAVISIDE-GIORGI in una Memoria lincea del 1931, e col metodo delle immagini nel 1933, nei «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», to. LVII, pp. 1-16. Sullo stesso argomento ved. anche R. SERINI, «Rend. della R. Acc. dei Lincei», ser. 6^a, vol. XIII, 1° sem. 1931, pp. 354-358; F. SBRANA, «Acta Pontif. Acad. Scient.», anno III, vol. III, n. 11, (1939), p. 74 e seguenti.

2. Nei casi ellittico e parabolico la formula preannunziata è la seguente

$$(3) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\omega(y-\eta)} \left\{ \varphi(\eta) \frac{\sinh[(l-x)D(\omega)]}{\sinh[lD(\omega)]} + \right. \\ \left. + \psi(\eta) \frac{\sinh[xD(\omega)]}{\sinh[lD(\omega)]} \right\} d\eta,$$

con

$$D(\omega) = \sqrt{-(a\omega^2 + b\omega + c)},$$

dove ω è una variabile complessa, e l'integrazione rispetto ad ω è fatta lungo l'asse immaginario del piano complesso. Ora ed in seguito supporremo che il radicale sia preso con parte reale non negativa. La (3) può essere formalmente giustificata col metodo della separazione delle variabili, od anche mediante la trasformazione di Laplace. La funzione così definita soddisfa senz'altro alle condizioni (2₂). Ci occuperemo in seguito della (2₁). Proveremo inoltre che se (x, y) è interno a C si ha

$$(4) \quad u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \varphi(\eta) G(l-x, y-\eta) + \psi(\eta) G(x, y-\eta) \} d\eta,$$

con

$$(5) \quad G(x, y-\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\omega(y-\eta)} \frac{\sinh[xD(\omega)]}{\sinh[lD(\omega)]} d\omega.$$

Distingueremo i diversi casi, in corrispondenza dei particolari valori di a , b , c , ai quali notoriamente ci si può ridurre.

3. FUNZIONI ARMONICHE, E METAARMONICHE DI 1^a SPECIE. — Supposto $a = 1$, $b = 0$, $c = -k^2$, con k non negativa, e assunto $\omega = i\alpha$, si ha

$$(6) \quad \frac{\sinh[xD(\omega)]}{\sinh[lD(\omega)]} = e^{-(l-x)\sqrt{k^2+\alpha^2}} \frac{1 - e^{-2x\sqrt{k^2+\alpha^2}}}{1 - e^{-2l\sqrt{k^2+\alpha^2}}}.$$

Per conseguenza l'integrale (5) è convergente uniformemente rispetto ad η , e per $\varepsilon \leq x \leq l - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$. Si noti poi che posto $r = y - \eta$ si ha

$$2\pi r^2 G(x, r) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \cos r\alpha}{\partial \alpha^2} \frac{\sinh(x\sqrt{k^2+\alpha^2})}{\sinh(l\sqrt{k^2+\alpha^2})} d\alpha.$$

Con due successive integrazioni per parti si trova che il valore assoluto del 2° membro si mantiene, per $r \rightarrow \infty$, ed $\varepsilon \leq x \leq l - \varepsilon$, minore di un numero $N > 0$, indipendente da r .

Le stesse proprietà sussistono per la $G(l-x, y-\eta)$. E tutto ciò è largamente sufficiente a dimostrare la convergenza del 2° membro della (4), ed a verificare la condizione (2₁).

In modo simile si può provare la possibilità di derivare due volte rispetto ad x e ad y sotto il segno d'integrazione nella (4).

Volendo identificare la soluzione ottenuta con quella che è data dal metodo delle immagini, basta osservare che il 2° membro della (6) si può esprimere mediante la serie, equiconvergente per $\varepsilon \leq x \leq l - \varepsilon$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-[(2n+1)l-x]\sqrt{\alpha^2+k^2}} - e^{-[(2n+1)l+x]\sqrt{\alpha^2+k^2}} \right\}.$$

Uno sviluppo analogo si ottiene mutando x in $l-x$. Sostituendo nel 2° membro della (4) si trova la $u(x, y)$ espressa per mezzo di una serie di infiniti termini, che corrispondono a tutte le immagini del punto (x, y) rispetto alle rette $x=0, x=l$ del piano rappresentativo (5).

4. FUNZIONI METAARMONICHE DI 2ª SPECIE. - Supposto ora $a=1, b=0, c=k^2$, con $0 < k < \pi/l$, e posto sempre $\omega = i\alpha$, in luogo della (6) si ha la funzione

$$\frac{\operatorname{sen}(x\sqrt{k^2-\alpha^2})}{\operatorname{sen}(l\sqrt{k^2-\alpha^2})}, \text{ per } |\alpha| < k; \quad \frac{\operatorname{senh}(x\sqrt{\alpha^2-k^2})}{\operatorname{senh}(l\sqrt{\alpha^2-k^2})}, \text{ per } |\alpha| > k.$$

Consequentemente dalla (5) si trae

$$G(x, y-\eta) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^k \cos \alpha (y-\eta) \frac{\operatorname{sen}(x\sqrt{k^2-\alpha^2})}{\operatorname{sen}(l\sqrt{k^2-\alpha^2})} d\alpha + \right. \\ \left. + \int_k^\infty \cos \alpha (y-\eta) \frac{\operatorname{senh}(x\sqrt{\alpha^2-k^2})}{\operatorname{senh}(l\sqrt{\alpha^2-k^2})} d\alpha \right\}.$$

Siamo così condotti a conclusioni analoghe a quelle cui si è pervenuti nel numero precedente.

5. CASO PARABOLICO. - Supposto ora $a=0, b=1, c=0$, si ha

$$(7) \quad G(x, y-\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\omega(y-\eta)} \frac{\operatorname{senh}(x\sqrt{\omega})}{\operatorname{senh}(l\sqrt{\omega})} d\omega.$$

Osserviamo d'altra parte che

$$(8) \quad \frac{\operatorname{senh}(x\sqrt{\omega})}{\operatorname{senh}(l\sqrt{\omega})} = e^{-(l-x)\sqrt{\omega}} \frac{1 - e^{-2x\sqrt{\omega}}}{1 - e^{-2l\sqrt{\omega}}};$$

perciò la funzione integranda nella (7) è analitica regolare in tutta la regione chiusa del piano della variabile ω , a destra dell'asse immaginario, e per $|\omega| \rightarrow \infty$

(5) Il problema II nel campo E verrà risolto per mezzo della (4), in cui si ponga

$$\varphi(\eta) = -\varphi(-\eta), \quad \psi(\eta) = -\psi(-\eta), \quad \text{per } \eta < 0.$$

Con ciò si ottiene

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \{ \varphi(\eta) [G(l-x, y-\eta) - G(l-x, y+\eta)] + \psi(\eta) [G(x, y-\eta) - G(x, y+\eta)] \} d\eta.$$

Risulta così soddisfatta (a causa della parità di G come funzione di $y-\eta$) la condizione

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{per } 0 \leq x \leq l.$$

in questa regione tende esponenzialmente a zero, uniformemente per $y - \eta$ non minore di un numero positivo comunque prefissato, ed $\varepsilon \leq x \leq l - \varepsilon$. Risulta quindi che sotto queste ultime ipotesi è nullo il 2° membro della (7)⁽⁶⁾. La stessa proprietà sussiste per $G(l - x, y - \eta)$; cosicchè la (4) diviene ora

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^y \{ \varphi(\eta) G(l - x, y - \eta) + \psi(\eta) G(x, y - \eta) \} d\eta,$$

la $G(x, y - \eta)$ essendo data dalla (7).

È agevole anche in questo caso collegarsi col metodo delle immagini, come si è fatto nel numero (3)⁽⁷⁾.

6. CASO IPERBOLICO. — L'equazione (1) si può porre ora nella forma

$$(9) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0, \quad \text{con} \quad k \geq 0.$$

La formula risolutiva è del tipo (3), ma il cammino d'integrazione nel piano della ω è una parallela all'asse immaginario di ascissa q maggiore di k . Inoltre dell'integrale corrispondente si deve prendere il *valore principale*, (V. P.). All'interno di G si ha una formula come la (4), con

$$(10) \quad G(x, y - \eta) = \frac{1}{2\pi i} \text{V.P.} \int_{q-i\infty}^{q+i\infty} e^{\omega(y-\eta)} \frac{\sinh(x\sqrt{\omega^2 - k^2})}{\sinh(l\sqrt{\omega^2 - k^2})} d\omega.$$

È da notarsi che

$$(11) \quad \frac{\sinh(x\sqrt{\omega^2 - k^2})}{\sinh(l\sqrt{\omega^2 - k^2})} = e^{-(l-x)\sqrt{\omega^2 - k^2}} \frac{1 - e^{-2x\sqrt{\omega^2 - k^2}}}{1 - e^{-2l\sqrt{\omega^2 - k^2}}}.$$

D'altra parte avendosi

$$\omega(y - \eta) - (l - x)\sqrt{\omega^2 - k^2} = (y - \eta)(\omega - \sqrt{\omega^2 - k^2}) - (l - x - y + \eta)\sqrt{\omega^2 - k^2},$$

e, nella regione chiusa del piano ω a destra della linea d'integrazione,

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} (\omega - \sqrt{\omega^2 - k^2}) = 0,$$

analogamente a quanto si è rilevato per la (7), risulta

$$G(x, y - \eta) = 0, \quad \text{per} \quad \eta > x + y - l.$$

In modo simile si trova che

$$G(l - x, y - \eta) = 0, \quad \text{per} \quad \eta > y - x.$$

(6) La proprietà sussiste per integrali del tipo (7) sotto condizioni meno restrittive. Cfr. per esempio D. GRAFFI, *Considerazioni sul metodo degli operatori funzionali*. «Memoriae Pont. Acad. Scient. Novi Lyncaei», ex serie III, vol. II, pp. 222-223. La proprietà riscontrata per la funzione (7) non sussiste per le analoghe funzioni considerate nei due numeri precedenti; in questi casi infatti la funzione integranda ha infinite singolarità, lungo tutto l'asse reale positivo.

(7) Il problema II nel campo E si risolve con la formula ottenuta per $u(x, y)$, ritenendovi $\varphi(\eta) = 0, \psi(\eta) = 0$, per $\eta < 0$. Con ciò si trova verificata la condizione iniziale $u(x, 0) = 0$, per $0 < x < l$.

Risulta dunque

$$(12) \quad u(x, y) = \int_{-\infty}^{y-x} \varphi(\eta) G(l-x, y-\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{x+y-l} \psi(\eta) G(x, y-\eta) d\eta,$$

la funzione $G(x, y-\eta)$ essendo data dalla (10).

Il problema II per la (9) si risolverà ponendo

$$\varphi(\eta) = \psi(\eta) = 0, \quad \text{per } \eta < 0.$$

Ma allora dalla (12) segue che la $u(x, y)$ è nulla per

$$y-x \leq 0, \quad x+y-l \leq 0;$$

in particolare restano soddisfatte le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_y(x, 0) = 0, \quad \text{per } 0 \leq x \leq l^{(8)}.$$

Analisi. — *Un'osservazione sugli integrali dell'equazione $y'' + A(x)y = 0$ nel caso $A(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow \infty$ (*)*. Nota di GIOVANNI PRODI, presentata (**) dal Corrisp. G. SANSONE.

Il comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $y'' + A(x)y = 0$ nella ipotesi in cui $A(x)$ sia non decrescente e tenda a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$, è stato oggetto di numerosi studi. Molti di questi sono stati rivolti ad assegnare condizioni sufficienti a garantire il verificarsi di quella che, intuitivamente, pare la proprietà più plausibile: che tutti gli integrali tendano a zero per $x \rightarrow +\infty$. Sono ben noti i criteri di G. Sansone e L. Tonelli⁽¹⁾, che richiedono alla funzione $A(x)$ particolari condizioni di regolarità. Non mi risulta però che sia stata fatta finora la semplice osservazione contenuta nel seguente:

TEOREMA. — *Nella sola ipotesi che $A(x)$ sia non decrescente e sia $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = +\infty$, esiste sempre un integrale, almeno, dell'equazione $y'' + A(x)y = 0$ non identicamente nullo e tendente a zero per $x \rightarrow +\infty$.*

Dimostriamo il teorema dapprima nel caso in cui $A(x)$ sia assolutamente continua in ogni intervallo finito. Poniamo⁽²⁾:

$$\begin{cases} y = c(x) \sin \theta(x) \\ y' = c(x) \sqrt{A(x)} \cos \theta(x) \end{cases}$$

con $c(x) > 0$. In tal modo $c(x)$ risulta univocamente determinata. Per $\theta(x)$ si ha la relazione: $\tan \theta(x) = y(x) \sqrt{A(x)} / y'(x)$ da cui anche $\theta(x)$ risulterà deter-

(8) Sarebbe agevole collegarsi nuovamente col metodo delle immagini, che questa volta intervengono in numero finito (cfr., anche per le indicazioni bibliografiche, la mia Nota del «Circ. Matem. di Palermo» citata in principio).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 13. maggio 1950.

(1) *Scritti matematici offerti a L. Berzolari* (1936), G. SANSONE, pp. 385-403, L. TONELLI, pp. 403-404.

(2) Per una posizione analoga vedi D. GRAFFI. «Boll. U. M. I.», (1) vol. XVII, p. 225 (1938).

minata, a meno di uno stesso multiplo di 2π , quando sia fissato il suo valore in un punto iniziale e gli altri ne siano dedotti per continuità. Sostituendo otteniamo il sistema di due equazioni differenziali del primo ordine che valgono quasi ovunque:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dx} = \sqrt{A(x)} + \frac{\sin 2\theta(x)}{4} \frac{A'}{A} \\ \frac{d \log c(x)}{dx} = -\frac{1}{2} \cos^2 \theta(x) \frac{A'}{A}. \end{cases}$$

Consideriamo due integrali linearmente indipendenti $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Il loro Wronskiano, che, come è noto, si mantiene costante, si potrà esprimere così:

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} c_1(x) \sin \theta_1(x) & c_2(x) \sin \theta_2(x) \\ c_1(x) \sqrt{A(x)} \cos \theta_1(x) & c_2(x) \sqrt{A(x)} \cos \theta_2(x) \end{vmatrix} = \\ &= c_1(x) c_2(x) \sqrt{A(x)} \sin(\theta_1(x) - \theta_2(x)). \end{aligned}$$

Le funzioni $c_1(x)$ e $c_2(x)$, come si vede subito dalla seconda equazione del sistema, sono positive non crescenti; nel caso in cui una almeno di esse tenda a zero il teorema risulta verificato. Sia dunque:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c_1(x) = c_1 > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c_2(x) = c_2 > 0 \quad \text{sarà:} \quad \begin{cases} c_1(x) \geq c_1 \\ c_2(x) \geq c_2 \end{cases}$$

perciò:

$$|\sin(\theta_1(x) - \theta_2(x))| \leq \frac{|W|}{c_1 c_2 \sqrt{A(x)}}$$

da cui $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\theta_1(x) - \theta_2(x)) = 0$.

Per la continuità di θ_1 e θ_2 possiamo dedurre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\theta_1(x) - \theta_2(x)) = k\pi, \quad \text{con } k \text{ intero.}$$

Possiamo anzi supporre, senza sostanziale restrizione (cioè considerando - al più - al posto di uno, degli integrali il suo opposto in segno) che sia:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\theta_1(x) - \theta_2(x)) = 0.$$

Consideriamo ora l'integrale:

$$\bar{y}(x) = \frac{y_1(x)}{c_1} - \frac{y_2(x)}{c_2} = \frac{c_1(x) \sin \theta_1(x)}{c_1} - \frac{c_2(x) \sin \theta_2(x)}{c_2}$$

che non sarà identicamente nullo per la supposta indipendenza di $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Potremo scrivere:

$$\bar{y}(x) = \frac{c_1(x)}{c_1} (\sin \theta_1(x) - \sin \theta_2(x)) + \left(\frac{c_1(x)}{c_1} - \frac{c_2(x)}{c_2} \right) \sin \theta_2(x)$$

da cui:

$$|\bar{y}(x)| \leq \frac{c_1(x)}{c_1} |\sin \theta_1(x) - \sin \theta_2(x)| + \left| \frac{c_1(x)}{c_1} - \frac{c_2(x)}{c_2} \right|.$$

Perciò $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{y}(x) = 0$ e il teorema, in questa prima ipotesi di $A(x)$ assolutamente continua, risulta provato.

Per passare al caso generale dimostriamo il seguente:

LEMMA. - Se l'equazione $\ddot{y} + A(x)y = 0$ ammette una coppia di integrali linearmente indipendenti, di cui uno limitato tra un certo x_0 e $+\infty$, l'altro tendente a zero per $x \rightarrow +\infty$, anche l'equazione:

$$\ddot{y} + (A(x) + Q(x))y = 0$$

dove $Q(x)$ è assolutamente integrabile nell'intervallo infinito, ammette una coppia di integrali linearmente indipendenti con le stesse proprietà.

È ben noto⁽³⁾ che, nella nostra ipotesi, tutti gli integrali dell'equazione $\ddot{y} + (A(x) + Q(x))y = 0$ sono limitati: basterà dimostrare che ne esiste uno tendente a zero. Siano $\bar{y}_1(x)$ e $\bar{y}_2(x)$ due integrali della prima equazione, linearmente indipendenti, e sia: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{y}_2(x) = 0$. Inoltre sia uguale a -1 il loro

Wronskiano: $y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$. Applicando noti metodi, otteniamo l'equazione integrale equivalente:

$$y(x) = K_1 \bar{y}_1(x) + K_2 \bar{y}_2(x) + \int_{x_0}^x Q(\xi) [\bar{y}_1(\xi) \bar{y}_2(x) - \bar{y}_1(x) \bar{y}_2(\xi)] y(\xi) d\xi$$

con K_1 e K_2 costanti arbitrarie. Se prendiamo nell'integrale l'estremo inferiore infinito, avremo una equazione integrale:

$$y(x) = K_1 \bar{y}_1(x) + K_2 \bar{y}_2(x) - \int_x^\infty Q(\xi) [\bar{y}_1(\xi) \bar{y}_2(x) - \bar{y}_1(x) \bar{y}_2(\xi)] y(\xi) d\xi,$$

che sarà ancora equivalente alla nostra equazione differenziale, essendo per ipotesi $Q(x)$ assolutamente integrabile e $\bar{y}_1(x)$ e $\bar{y}_2(x)$ limitati. Prendiamo ora $\bar{K}_1 = 0$, $\bar{K}_2 = 1$. Avremo:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \bar{y}_2(x) - \int_x^\infty Q(\xi) [\bar{y}_1(\xi) \bar{y}_2(x) - \bar{y}_1(x) \bar{y}_2(\xi)] y_2(\xi) d\xi = \\ &= \bar{y}_2(x) + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$y_2(x)$ non è identicamente nullo, perchè anche $\bar{y}_2(x)$ dovrebbe essere tale (annullandosi identicamente l'integrale improprio che compare nell'equazione) contro l'ipotesi. Resta dunque provato l'asserto.

Per passare, nel nostro teorema, al caso generale basterà osservare che la funzione $A(x)$ dell'enunciato si può approssimare, a meno di una funzione assolutamente integrabile, nell'intervallo infinito, mediante una funzione assolutamente continua: e questo è possibile, ad esempio, prendendo una funzione lineare a tratti di ovvia costruzione.

(3) G. ASCOLI, « Rendiconti dei Lincei » (16), 22, pp. 234-243 (1935).

Equazioni differenziali. — *Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee.*

Nota I (*) di EUGENIO LEVI, presentata (**) dal Corrisp. G. ASCOLI.

Già da molti anni è stato oggetto di studio la ricerca di condizioni sotto le quali le soluzioni di un sistema differenziale lineare omogeneo, di coefficienti $a_{ij}(x)$ conservano — in un senso da precisare caso per caso — il proprio comportamento asintotico per $x \rightarrow +\infty$ quando ai coefficienti si aggiungano determinate funzioni $\varphi_{ij}(x)$. In particolare, è stato molto approfondito il caso in cui le a_{ij} sono costanti (sistema (C)) e le φ_{ij} assolutamente integrabili sino all'infinito.

Per questo caso si è dimostrato:

a) che se le radici caratteristiche della matrice $\|a_{ij}\|$ sono tutte a parte reale non positiva, e quelle a parte reale nulla sono semplici, tutte le soluzioni del sistema « variato » (C') sono limitate (Cesari) (1);

b) che se le radici sono semplici, si può trovare un sistema fondamentale di soluzioni di (C') che si comporta asintoticamente come un sistema fondamentale di soluzioni del sistema (C) (Ghizzetti, Faedo, Levinson) (2).

Per il caso delle radici multiple si sono avuti invece i seguenti risultati:

a) Levinson considera il caso che le radici multiple siano a parte reale negativa, $< -\beta$, e dimostra che in tale caso esiste per il sistema (C') un sistema fondamentale di soluzioni, di cui quelle corrispondenti a radici semplici sono asintotiche alle corrispondenti del sistema (C), mentre per le altre sussiste la condizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_i e^{\beta x} = 0;$$

b) Faedo, supponendo l'ipotesi più restrittiva della assoluta integrabilità delle espressioni $\varphi_{ij} x^{\nu-1}$ dove ν è la massima tra le molteplicità delle radici, dimostra che il sistema (C') possiede un sistema fondamentale di soluzioni che, in un senso « vettoriale » che sarà più avanti precisato, è asintotico ad un sistema fondamentale di soluzioni del sistema (C).

Nella presente Nota il risultato di Faedo viene dimostrato sotto l'ipotesi più larga della assoluta integrabilità sino all'infinito delle quantità $\varphi_{ij} x^{\mu-1}$, dove

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto matematico dell'Università di Milano. L'Autore ringrazia vivamente il prof. G. Ascoli per i preziosi suggerimenti avuti per la redazione della presente Nota.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) L. CESARI, *Un nuovo criterio di stabilità per le soluzioni delle equazioni differenziali*, « Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa » (2), 9, p. 163-186 (1940).

(2) A. GHIZZETTI, *Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, lineari ed omogenee*, « Giornale di Matematiche » (4), 77 (1947); S. FAEDO, *Proprietà asintotiche delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari omogenei*, « Annali di Matematica » (4), 26, pp. 207-215 (1947); N. LEVINSON, *The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations*, « Duke Math. Journ. », 15, pp. 111-126 (1948).

μ è il massimo tra gli esponenti dei divisori elementari della matrice caratteristica. Per il caso di un'unica equazione differenziale di ordine n , tale ipotesi coincide, come è noto, con quella di Faedo.

Il procedimento dimostrativo non si discosta molto da quello usato dalla maggior parte dei ricercatori: riduzione del sistema ad equazioni integrali e loro risoluzione per approssimazioni successive. A questo proposito ho creduto opportuno esporre il principio generale di questa risoluzione in un teorema molto semplice (Lemma I), che penso possa rendersi utile in molti casi analoghi. Così pure, ho dato, in forma assai più generale di quanto sarebbe occorso per lo scopo prefissomi, un teorema (Lemma II), relativo al caso in cui la matrice $\|a_{ik}\|$ ha forma diagonale, che sembra anch'esso suscettibile di svariate applicazioni.

1. Indichiamo con (S) l'insieme costituito dalle n -uple $\{\varphi_i\} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ di funzioni definite in un intervallo $I = a^- + \infty$, quasi continue e limitate, e quindi assolutamente integrabili in ogni parte finita di I .

Siano poi $K_{ij}(x, \xi)$ n^2 funzioni, definite in I^2 , e, per ogni x , assolutamente integrabili in I rispetto a ξ ; inoltre, per ogni elemento $\{\varphi_i\}$ di (S), gli integrali

$$\psi_i(x) = \sum_j \int_a^\infty K_{ij}(x, \xi) \varphi_j(\xi) d\xi,$$

certamente definiti, costituiscano un elemento di (S).

Vale allora il

LEMMA I. - Nelle condizioni poste, ed essendo inoltre, per ogni x ,

$$(A) \quad \sum_j \int_a^\infty |K_{ij}(x, \xi)| d\xi < \lambda < 1, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

per ogni elemento $\{f_i\}$ di (S) il sistema di equazioni integrali

$$(I) \quad y_i(x) = \sum_j \int_a^\infty K_{ij}(x, \xi) y_j(\xi) d\xi + f_i(x)$$

ammette in (S) una ed una sola soluzione.

Per la dimostrazione si applichi alle (I) un procedimento di approssimazioni successive, partendo, per esempio da $y_i^0 = 0$ e costruendo le successioni definite da:

$$y_i^{s+1}(x) = \sum_j \int_a^\infty K_{ij}(x, \xi) y_j^s(\xi) d\xi + f_i(x).$$

Si verifica subito, per induzione, che le y_i^s sono definite e appartengono ad (S), e che se $|f_i| < M$ risulta

$$|y_i^{(s)}| < M(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{s-1}) \quad , \quad |y_i^{s+1} - y_i^s| < M\lambda^s.$$

Ne segue che le y_i^t tendono uniformemente ad una funzione y_i e che $\{y_i\}$ appartiene ad (S) e soddisfa alle (1).

Si prova l'unicità della soluzione dimostrando che il sistema omogeneo

$$(1') \quad y_i(x) = \sum_j \int_a^{+\infty} K_{ij}(x, \xi) y_j(\xi) d\xi$$

ha in (S) solo la soluzione nulla. Basta per questo supporre $|y_i| < M$; con successive sostituzioni nel secondo membro delle (1') si ottiene subito

$$|y_i| < M\lambda, \quad |y_i| < M\lambda^2, \dots$$

donde segue l'asserto (3).

Osservazioni. — I. Il teorema dimostrato si può utilizzare per la ricerca delle soluzioni di un sistema del tipo (1) che siano $\mathcal{O}(\mu_i(x))$, essendo le $\mu_i(x)$ determinate funzioni positive, definite in I. Ovviamente, basta per questo trasformare le (1) mediante le posizioni

$$y_i(x) = \mu_i(x) z_i(x).$$

II. Si possono anche trattare mediante il lemma I sistemi di equazioni del tipo di Volterra:

$$y_i(x) = \sum_j \int_{a_{ij}}^x K_{ij}(x, \xi) y_j(\xi) d\xi + f_i(x)$$

ove gli α_{ij} sono compresi tra a e $+\infty$, estremi inclusi. Basta per questo prolungare le K_{ij} con valori nulli nelle regioni di I^2 per le quali ξ cade fuori del corrispondente intervallo di integrazione. La corrispondente condizione (A) risulta allora:

$$\sum_j \int_{(\alpha_{ij}, x)} |K_{ij}(x, \xi)| d\xi < \lambda < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

dove il simbolo (α_{ij}, x) vuole indicare che l'integrazione procede dal minore al maggiore dei due limiti indicati.

2. Dato il sistema differenziale lineare omogeneo a coefficienti costanti

$$(C) \quad y_i' = \sum_j a_{ij} y_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

è ben noto come la teoria dei divisori elementari della matrice $A = \|a_{ij} - \delta_{ij} \rho\|$ permetta di ottenere una trasformazione lineare invertibile

$$(2) \quad y_i = \sum_j b_{is} Y_s$$

(3) È pressochè inutile osservare che il lemma ora dimostrato si inquadra immediatamente nella teoria delle trasformazioni di uno spazio metrico normale: si tratta precisamente della ricerca di un elemento unito in una « contrazione » di un tale spazio. Per la bibliografia rimaniamo alle recenti lezioni di C. MIRANDA, *Problemi di esistenza in Analisi funzionale*. « Quaderni matematici della Scuola Norm. Super. di Pisa », 1948-49.

a coefficienti costanti, che riduce il sistema (C) alla forma canonica (J) di Jordan. Con ciò esso si spezza in un certo numero p di sistemi parziali, senza incognite comuni, ciascuno dei quali ha la forma:

$$Y'_{r+1} = \rho Y_{r+1}, Y'_{r+2} = \rho Y_{r+2} + Y_{r+1}, \dots, Y'_{r+\lambda} = \rho Y_{r+\lambda} + Y_{r+\lambda-1},$$

dove ρ è una radice caratteristica della matrice $\|a_{ij}\|$, λ l'esponente di uno dei divisori elementari ad essa relativi. Scriveremo brevemente:

$$(J) \quad Y'_i = \rho_i Y_i + \varepsilon_i Y_{i-1}$$

dove ε_i vale 1 per tutte le equazioni del gruppo, salvo per la prima per cui vale 0.

Si trova subito che un tale gruppo dà luogo a λ soluzioni indipendenti del sistema (J), date da

$$Y_{r+v} = e^{\rho x}, Y_{r+v+1} = e^{\rho x} \frac{x}{1!}, Y_{r+v+2} = e^{\rho x} \frac{x^2}{2!}, \dots, Y_{r+\lambda} = e^{\rho x} \frac{x^{\lambda-v}}{(\lambda-v)!}$$

$$(v = 1, 2, \dots, \lambda)$$

mentre le altre incognite sono nulle. Nel complesso, le soluzioni così ottenute costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni di (J).

Per esprimere ciò concisamente si indicherà in seguito:

con ρ_i la radice caratteristica corrispondente al gruppo in cui cade l'equazione di posto i ;

con λ_i il numero delle equazioni del gruppo di cui tale equazione fa parte;

con α_i il numero d'ordine dell'equazione nel proprio gruppo;

e si userà il simbolo ε_{ij} col significato seguente:

$\varepsilon_{ij} = 1/(i-j)!$ se gli indici i e j appartengono allo stesso gruppo e $i \geq j$
 $\varepsilon_{ij} = 0$ in ogni altro caso ⁽⁴⁾.

Con queste notazioni le n soluzioni di (J) considerate più sopra possono indicarsi con

$$(3) \quad h Y_i = e^{\rho_h x} x^{\alpha_i - \alpha_h} \varepsilon_{ih} = e^{\rho_h x} x^{i-h} \varepsilon_{ih} \quad (i, h = 1, 2, \dots, n)$$

essendo h il numero d'ordine della soluzione.

Ci sarà utile verificare la relazione:

$$(4) \quad \sum_h \varepsilon_{ih} \varepsilon_{hj} (-1)^{i+h} = \delta_{ij}$$

la quale è evidente se i e j appartengono a gruppi diversi, oppure se, appartenendo allo stesso gruppo, è $i < j$, giacchè in tal caso dei due fattori $\varepsilon_{ih}, \varepsilon_{hj}$ uno almeno è nullo. Se invece i e j appartengono allo stesso gruppo ed è $i \geq j$, $\varepsilon_{ih} \cdot \varepsilon_{hj}$ è diverso da zero solo se $i \geq h \geq j$, e il sommatorio, ove si ponga $h = j + v$ diviene:

$$\sum_0^{i-j} \frac{(-1)^{i+j+v}}{v! (i-j-v)!} = \frac{(-1)^{i+j}}{(i-j)!} \sum_0^{i-j} (-1)^v \binom{i-j}{v} = \delta_{ij}.$$

(4) Si noti che se i e j appartengono allo stesso gruppo è $i-j = \alpha_i - \alpha_j$, mentre in caso opposto è $\varepsilon_{ij} = 0$; ne risulta, qualunque sia la funzione f , $\varepsilon_{ij} f(i-j) = \varepsilon_{ij} f(\alpha_i - \alpha_j)$. Sarà utile tener presente per il seguito questa osservazione.

3. Se nella matrice A gli esponenti dei divisori elementari sono uguali ad 1 (in particolare se le radici sono semplici), la forma canonica (J) del sistema (C) si riduce alla forma diagonale

$$(D) \quad Y_i' = \rho_i Y_i$$

che ha il sistema fondamentale di soluzioni

$${}_h Y_i = e^{\rho_i h} \delta_{ih}.$$

Diciamo ora che con una sostituzione lineare – a coefficienti non costanti – si può passare dalla forma (J) alla forma (D). Si ponga:

$$(5) \quad Y_i = \sum_s \varepsilon_{is} x^{i-s} v_s$$

e si osservi che il sistema fondamentale (3) di (J) si ottiene dalle (5) ponendo in esse:

$$v_s = e^{\rho_s x} \delta_{sh} = {}_h v_s;$$

ora queste costituiscono appunto un sistema fondamentale per il sistema diagonale (D).

Ma ci conviene per il seguito una verifica diretta. Si ha dalle (5):

$$Y_i' = \sum_s \varepsilon_{is} (i-s) x^{i-s-1} v_s + \sum_s \varepsilon_{is} x^{i-s} v_s'$$

od anche

$$Y_i' = \varepsilon_i Y_{i-1} + \sum_s \varepsilon_{is} x^{i-s} v_s'$$

perchè dalla definizione delle ε_{is} segue subito che $\varepsilon_{is}(i-s) = \varepsilon_{i-1,s}$ se $\varepsilon_i = 1$, mentre vale 0 se $\varepsilon_i = 0$.

Dal confronto con le (J) risulta allora:

$$(6) \quad \sum_s \varepsilon_{is} x^{i-s} v_s' = \rho_i \sum_s \varepsilon_{is} x^{i-s} v_s = \sum_s \rho_s \varepsilon_{is} x^{i-s} v_s;$$

l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che se $\varepsilon_{is} \neq 0$ è certo $\rho_i = \rho_s$.

Per risolvere questo sistema rispetto alle v_s' si moltiplichi per $(-1)^{l-i} \varepsilon_{li} x^{l-i}$ e si sommi rispetto ad i ; risulterà successivamente:

$$\begin{aligned} \sum_{s,i} (-1)^{l-i} \varepsilon_{li} \varepsilon_{is} x^{l-s} v_s' &= \sum_{s,i} (-1)^{l-i} \varepsilon_{li}' \varepsilon_{is} x^{l-s} \rho_s v_s \\ \sum_s x^{l-s} v_s' \sum_i (-1)^{l-i} \varepsilon_{li} \varepsilon_{is} &= \sum_s x^{l-s} \rho_s v_s \sum_i (-1)^{l-i} \varepsilon_{li} \varepsilon_{is} \end{aligned}$$

da cui, tenendo conto della (4), segue subito

$$\sum_s \delta_{ls} x^{l-s} v_s' = \sum_s \delta_{ls} x^{l-s} \rho_s v_s, \quad v_l' = \rho_l v_l$$

come si era annunciato.

4. Si consideri ora il sistema « variato »:

$$(C') \quad y_i' = \sum_j [a_{ij} + \varphi_{ij}(x)] y_j$$

e si operi su di esso la sostituzione (2); si otterrà il sistema:

$$(J') \quad Y'_i = \rho_i Y_i + \varepsilon_i Y_{i-1} + \sum_j \bar{\varphi}_{ij}(x) Y_j$$

dove le $\bar{\varphi}_{ij}$ sono combinazioni lineari a coefficienti costanti delle φ_{hk} . La sostituzione (5) porta poi questo in un nuovo sistema che si ottiene operando su (J') come nel numero precedente si è operato su (J); si ottiene così:

$$v'_i = \rho_i v_i + \sum_{i,j,s} \varepsilon_{il} \varepsilon_{js} (-1)^{l-i} x^{l-i+j-s} \bar{\varphi}_{ij}(x) v_s$$

che può scriversi, scambiando i con l , j con s ,

$$(D') \quad v'_i = \rho_i v_i + \sum_j \psi_{ij}(x) v_j$$

avendo posto:

$$(7) \quad \psi_{ij}(x) = \sum_{l,s} \varepsilon_{il} \varepsilon_{sj} (-1)^{i-l} x^{i-l+s-j} \bar{\varphi}_{ls}(x).$$

Geometria. — *Varietà quasi-asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale.* Nota di MARIO VILLA e GUIDO VAONA, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. Date due varietà V_k, V_m ($k > m$), tali che V_m appartenga a V_k , una curva γ di V_m si dirà *quasi-asintotica a tre indici* $\gamma_{p,q,r}$ di (V_k, V_m) quando in un suo punto generico lo spazio congiungente l'S(p) osculatore a V_k , l'S(q) osculatore a V_m e l'S(r) osculatore ad essa ($p < q < r$) ha dimensione minore del massimo corrispondente ai valori assegnati di k, m, p, q, r ⁽¹⁾.

(*) Nella seduta del 15 aprile 1950.

(1) Com'è notissimo dicesi S(r) osculatore ad una varietà V_k in un suo punto P lo spazio lineare di dimensione minima che contiene il punto P e i punti derivati fino a quelli di ordine r . Sono già state considerate e studiate curve e varietà quasi-asintotiche a due indici (BOMPIANI, VILLA ed altri). Ricordiamo che una varietà V_m , situata su una varietà V_k ($k > m$), è quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ per V_k quando l'S(r) osculatore a V_k in un punto generico di V_m e l'S(s) ivi osculatore a V_m hanno uno spazio congiungente di dimensione minore del massimo corrispondente ai valori assegnati di k, m, r, s .

Il BOMPIANI ha considerato anche curve quasi-asintotiche a più indici di una varietà, ma tale nozione è completamente indipendente dall'attuale (BOMPIANI, *Geometria proiettiva di una equazione a derivate parziali, lineare omogenea*, questi « Rendiconti », ser. VI, vol. XXVIII, p. 283, 1938).

Osserviamo inoltre che casi banali di $\gamma_{p,q,r}$ sono offerti dalle curve di V_m in ogni punto delle quali l'S(p) osculatore a V_k e l'S(q) osculatore a V_m hanno uno spazio congiungente di dimensione minore dell'ordinario. Queste curve sono già state considerate e rientrano nella definizione di *striscia quasi-asintotica* (VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali degeneri*, « Mem. dell'Acc. delle Sc. di Bologna », ser. IX, vol. IX, p. 19, 1942).

Casi particolari di $\gamma_{p,q,r}$ sono pure ovviamente costituiti dalle curve quasi-asintotiche $\gamma_{p,r}$ di V_k , situate su V_m , e dalle curve quasi-asintotiche $\gamma_{q,r}$ di V_m .

Si può subito notare che la definizione posta rientra, come caso particolare, in quella di *curva pluriassiale* introdotta dal Bompiani⁽²⁾. Data una varietà V_m , associato ad ogni suo punto uno spazio lineare, il Bompiani chiama *curva pluriassiale* una curva di V_m in ogni punto della quale lo spazio $S(s)$ osculatore, per un prefissato valore di s , ha incidenza maggiore della normale allo spazio lineare associato a quel punto. È allora chiaro che le nostre curve quasi-asintotiche a tre indici $\gamma_{p,q,r}$ sono curve pluriassiali di V_m per le quali lo spazio associato ad ogni punto di V_m è lo spazio congiungente l' $S(p)$ osculatore alla V_k e l' $S(q)$ osculatore alla V_m in quel punto.

La considerazione delle curve quasi-asintotiche a tre indici si presenta spontaneamente quando si consideri la rappresentazione, sulla varietà di Segre, delle curve caratteristiche di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari.

Data una trasformazione puntuale T fra due spazi S_r, S'_r , se V_r è la varietà rappresentativa di T sulla $V_{2,r}$ di Segre che rappresenta le coppie di punti dei due spazi, si ha infatti (n. 3):

Le curve di V_r che rappresentano le coppie di curve caratteristiche corrispondenti di T sono tutte e sole le curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$ di $(V_{2,r}, V_r)$ ⁽³⁾.

In altri lavori⁽⁴⁾ è posto in luce il fatto assai notevole che importanti condizioni relative alle trasformazioni puntuali T (come l'annullarsi dell'Jacobiano, l'indeterminazione delle rette caratteristiche) si riflettono in un comportamento quasi-asintotico della V_r rappresentativa di T sulla $V_{2,r}$ di Segre. Dal presente lavoro segue che anche la considerazione delle curve caratteristiche di T porta a fatti analoghi sulla $V_{2,r}$ di Segre, cioè a curve quasi-asintotiche, estendendo però questa nozione nel modo indicato.

Per il teorema enunciato, la conoscenza delle curve caratteristiche di particolari trasformazioni (ad esempio trasformazioni cremoniane), porge esempi di curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$ ⁽⁵⁾.

(2) Si veda: BOMPIANI, *Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà*, questi «Rendiconti», ser. VI, vol. V, p. 383 (1927). Si veda pure: BOMPIANI, *L'intorno del 2° ordine e i sistemi pluriassiali di una superficie qualsiasi*, «Memorie dell'Acc. delle Sc. di Bologna», ser. VIII, vol. IV (1926-27); *Sistemi coniugati e sistemi assiali di linee sopra una superficie dello spazio ordinario*, «Boll. U. M. I.», ser. I, vol. III (1924); ENEA BORTOLOTTI, *Sistemi assiali e connessioni nelle V_m* , questi «Rendiconti», ser. VI, vol. V, p. 390 (1927).

(3) Escluse banali $\gamma_{1,2,3}$ indicate nella⁽⁸⁾.

(4) Si veda: VILLA, *Sulle superficie quasi-asintotiche della V_4^6 di S_8 che rappresenta le coppie di punti di due piani*, «Rend. dell'Acc. d'Italia», ser. VII, vol. I, p. 228 (1940); *Sull'annullarsi, in un punto, della matrice Jacobiana di m funzioni in n variabili*, «Rend. dell'Acc. d'Italia», ser. VII, vol. III, p. 209 (1941); op. cit. nella⁽²⁾; *Superficie della V_4^6 di Segre e relative trasformazioni puntuali*, «Memorie dell'Acc. delle Sc. di Bologna», ser. IX, vol. IX, p. 71 (1942); *Sulle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale*, «Memorie dell'Acc. delle Sc. di Bologna», ser. IX, vol. X, p. 7 (1942).

In quest'ultimo lavoro, considerando in un punto P di V_r gli $S(1,3)$ osculatori a V_r (cioè gli spazi congiungenti gli S_3 osculatori in P alle curve di V_r per P aventi ivi una medesima tangente), si perviene al seguente risultato che lascia intravedere il teorema del n. 3: *Gli unici $S(1,3)$ osculatori in P a V_r che appartengono all' $S_{r+(s)/2}$, individuato dall' $S(2)$ osculatore in P a V_r e dall' S_{2r} tangente in P a $V_{2,r}$, sono quelli relativi alle direzioni che rappresentano le direzioni caratteristiche di T uscenti dalla coppia di punti di cui P è l'immagine.*

(5) È in corso di stampa nel «Boll. U. M. I.» una nostra Nota sulle curve caratteristiche. Si veda pure la nota⁽⁷⁾.

Nel n. 4 viene esteso ulteriormente il concetto di curva o varietà quasi-asintotica.

2. Data fra due spazi lineari S_r, S'_r una trasformazione puntuale T , diciamo *curva caratteristica* di T ogni curva γ di $S_r (S'_r)$ tale che la tangente in un punto generico di γ sia retta caratteristica di T uscente da quel punto.

Siccome da ogni punto di $S_r (S'_r)$ escono, in generale, $2^r - 1$ rette caratteristiche⁽⁶⁾, le curve caratteristiche di $S_r (S'_r)$ costituiscono, in generale, un sistema $(2^r - 1)$ -plo ∞^{r-1} di curve.

Se x_1, x_2, \dots, x_r e y_1, y_2, \dots, y_r sono rispettivamente le coordinate proiettive non omogenee in S_r, S'_r , la trasformazione T è rappresentata dalle equazioni

$$(1) \quad y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_r) \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

dove le f_i sono funzioni (derivabili fin che occorre) a Jacobiano non nullo in tutto il campo di definizione.

Il sistema differenziale delle curve caratteristiche

$$(2) \quad x_j = x_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

di S_r è quello costituito dalle equazioni, nelle funzioni incognite x_j , che si ottengono annullando i minori del 2° ordine estratti dalla matrice

$$(3) \quad \left\| \begin{array}{c} \sum_j x'_j f_i^j \\ \sum_{j,h} x'_j x'_h f_i^{jh} \end{array} \right\| \quad (i, j, h = 1, 2, \dots, r),$$

dove

$$x'_j = \frac{dx_j}{dt}, \quad f_i^j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad f_i^{jh} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_h} \quad (7).$$

3. Se V_r è la varietà che rappresenta T sulla V_{2r} di Segre rappresentativa delle coppie di punti dei due spazi $S_r (x_1, x_2, \dots, x_r), S'_r (y_1, y_2, \dots, y_r)$, sussiste il teorema:

Le curve di V_r che rappresentano le coppie di curve caratteristiche corrispondenti di T sono tutte e sole le curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$ di (V_{2r}, V_r) ⁽⁸⁾.

(6) Si veda: VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*. - I. *Intorno del secondo ordine*, questi «Rendiconti», ser. VIII, vol. IV, p. 55 (1948).

(7) In una trasformazione quadratica fra due piani le curve caratteristiche, in ciascun piano, sono le rette dei tre fasci aventi per centro i punti fondamentali. In una trasformazione cubica in S_3 (CREMONA, *Opere*, Hoepli, Milano, vol. III, pp. 64-65 e pp. 245-246), le curve caratteristiche, in ciascun S_3 , sono le corde della sestica base del sistema omaloidico. Più in generale: nella trasformazione cremoniana fra due S_r , relativa ad un sistema omaloidico d'ipersuperficie d'ordine r passanti per una V_{r-2} (GODEAUX, *Sur une correspondance crémonienne entre deux espaces à r dimensions*, «Rend. dell'Ist. Lombardo», ser. II, vol. XLIII, p. 116, 1910), le curve caratteristiche, in ciascun S_r , sono le rette $(r-1)$ -seganti la V_{r-2} base.

Le immagini delle coppie di curve caratteristiche corrispondenti sulla V_{2r} di Segre sono coniche. Esse sono perciò $\gamma_{1,3}$ per la V_r e quindi casi particolari di $\gamma_{1,2,3}$ di (V_{2r}, V_r) [cfr. nota (1)]. Nel lavoro preannunciato, che apparirà nel «Boll. U. M. I.», verranno determinate invece curve caratteristiche a cui si collegano $\gamma_{1,2,3}$ non banali.

(8) Escluse le curve situate sulla V_{r-1} immagine delle coppie a Jacobiano nullo (varietà che si indicherà con J_{r-1}), nei punti delle quali la V_r ha comportamento quasi-asintotico $\sigma_{1,2}$ per la V_{2r} e che sono quindi banali $\gamma_{1,2,3}$ [cfr. nota (1)].

Sia

$$X(x_1, x_2, \dots, x_r; y_1, y_2, \dots, y_r)$$

il punto generico della V_{2r} di Segre; si ha

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 X}{\partial y_i \partial y_j} = 0 \quad (9).$$

Il punto generico della V_r rappresentativa di T è

$$X(x_1, x_2, \dots, x_r; f_1, f_2, \dots, f_r).$$

Consideriamo una curva γ di V_r , non appartenente alla J_{r-1} immagine delle coppie a Jacobiano nullo di T ,

$$x_j = x_j(t),$$

e poniamo

$$X^i = \frac{\partial X}{\partial x_i}, \quad X^{r+i} = \frac{\partial X}{\partial y_i}, \quad X^{i, r+j} = \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial y_j}.$$

L' S_{2r} tangente a V_{2r} in un punto generico $P(t)$ di γ è lo spazio individuato da P e dai $2r$ punti

$$(4) \quad X^i, X^{r+i},$$

dove le derivate si intendono calcolate in P . L' $S(2)$ osculatore in P a V_r è lo spazio individuato da P , dai punti derivati primi

$$X^i + \sum_j X^{r+i} f_j^i$$

e dagli $r(r+1)/2$ punti derivati secondi

$$(5) \quad \sum_j (X^{i, r+j} f_j^h + X^{h, r+j} f_j^i) + [X^{r+k}] \quad (i, j, h, k = 1, 2, \dots, r),$$

dove con $[X^{r+k}]$ si denota una combinazione lineare dei punti X^{r+k} e le derivate sono calcolate in P . L' $S(3)$ osculatore in P a γ è lo spazio individuato da P e dai punti

$$\frac{dX}{dt}, \quad \frac{d^2 X}{dt^2}, \quad \frac{d^3 X}{dt^3}.$$

Affinchè γ sia quasi-asintotica $\gamma_{1,2,3}$ per (V_{2r}, V_r) occorre che lo spazio congiungente l' S_{2r} tangente a V_{2r} , l' $S(2)$ osculatore a V_r e l' $S(3)$ osculatore a γ , in un suo punto generico P , abbia dimensione minore di $r(r+5)/2 + 1$. Lo spazio congiungente l' S_{2r} tangente a V_{2r} e l' $S(2)$ osculatore a V_r è individuato da P e dai punti (4) e (5). Questi punti sono linearmente indipendenti poichè, nell'ipotesi opposta, la V_r avrebbe in P comportamento quasi-asintotico $\sigma_{1,2}$ per la V_{2r} e ciò implicherebbe che P fosse immagine di una coppia di punti corrispondenti di T a Jacobiano nullo⁽¹⁰⁾, mentre si è supposto che γ non appartenga a J_{r-1} .

(9) Si veda ad esempio: VILLA, il 1° dei lav. cit. nella (4), p. 230.

(10) Si veda: VILLA, il 2° dei lav. cit. nella (4).

Affinchè si verifichi la condizione richiesta occorre e basta che il punto $d^3 X/dt^3$ sia linearmente dipendente da P e dai punti (4) e (5). Tale dipendenza lineare equivale alla dipendenza lineare di $d^3 X/dt^3$ e dei punti

$$(6) \quad P, X^i, X^{r+i},$$

$$(7) \quad \sum_i (X^{i, r+i} f_j^h + X^{h, r+i} f_j^i).$$

Si ha poi

$$\frac{d^3 X}{dt^3} = \sum_{ij} (X^{i, r+i} x'_i \sum_{hk} f_j^{hk} x'_h x'_k) + \frac{1}{2} \sum_{ih} [(x'_i x'_h + x'_i x''_h) \sum_j (X^{i, r+i} f_j^h + X^{h, r+i} f_j^i)] + [X^i, X^{r+i}],$$

dove $[X^i, X^{r+i}]$ è una combinazione lineare dei punti X^i, X^{r+i} . La dipendenza lineare richiesta equivale a quella dei punti (6), (7) e del punto

$$(8) \quad \sum_{ij} (X^{i, r+i} x'_i \sum_{hk} f_j^{hk} x'_h x'_k).$$

Ma i punti (7) e il punto (8) individuano uno spazio sghembo con quello dei punti (6)⁽¹¹⁾. Affinchè i punti (6), (7) e (8) siano linearmente dipendenti devono quindi esserlo i punti (7) e (8). D'altra parte questi $r(r+1)/2 + 1$ punti sono combinazioni lineari degli r^2 punti $X^{i, r+i}$, fra loro linearmente indipendenti. Si conclude che deve essere nulla la matrice M dei coefficienti delle $X^{i, r+i}$ nelle (7) e (8).

Si supponga dapprima $r = 2$. Si ha allora che deve essere nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} f_1^1 & f_2^1 & 0 & 0 \\ f_1^2 & f_2^2 & f_1^1 & f_2^1 \\ 0 & 0 & f_1^2 & f_2^2 \\ x'_1 F_1 & x'_1 F_2 & x'_2 F_1 & x'_2 F_2 \end{vmatrix},$$

dove $F_i = \sum_{hk} x'_h x'_k f_i^{hk}$ ($i, h, k = 1, 2$). Supposto $x'_1 \neq 0$ (analogamente si procede se è $x'_1 = 0$ e $x'_2 \neq 0$ ⁽¹²⁾), si aggiungano alla terza e quarta verticale rispettivamente la prima e seconda moltiplicate per $-x'_2/x'_1$. Quindi si sommino alla prima orizzontale, preventivamente moltiplicata per x'_1 , la seconda moltiplicata per x'_2 e la terza per $(x'_2)^2/x'_1$. Si ottiene

$$(9) \quad \begin{vmatrix} H_1 & H_2 & 0 & 0 \\ f_1^2 & f_2^2 & f_1^1 - \frac{x'_2}{x'_1} f_1^2 & f_2^1 - \frac{x'_2}{x'_1} f_2^2 \\ 0 & 0 & f_1^2 & f_2^2 \\ F_1 & F_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

(11) Infatti i punti (7) e (8) sono combinazioni lineari dei punti $X^{i, r+i}$ che individuano uno spazio sghembo con l' S_{2r} tangente a V_{2r} .

(12) Non può essere $x'_1 = x'_2 = 0$ essendo il punto generico P di γ non singolare.

dove $H_i = \sum_j x'_j f_i^j$ ($i, j = 1, 2$). Dalla (9), essendo $J = \begin{vmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{vmatrix}$ per ipotesi $\neq 0$, scende

$$\begin{vmatrix} H_1 & H_2 \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione coincide coll'equazione differenziale (3) delle curve caratteristiche e quindi il teorema è dimostrato.

Per $r > 2$ si procede in modo analogo. La matrice M si forma considerando gli $X^{i, r+j}$ nell'ordine che si ha ponendo $i = 1$ e successivamente $j = 1, 2, \dots, r$, poi $i = 2$ e $j = 1, 2, \dots, r$ ed infine $i = r$ e $j = 1, 2, \dots, r$. Inoltre si considerano le (7) nell'ordine ottenuto ponendo $i = 1$ e successivamente $h = 1, 2, \dots, r$, poi $i = 2$ e $h = 2, 3, \dots, r$ ed infine $i = r$ e $h = r$; e per ultima la (8). Se $x'_i \neq 0$, posto $H_i = \sum_j x'_j f_i^j$ e $F_i = \sum_{j,h} x'_j x'_h f_i^{jh}$, si può sempre operare sulla matrice M in modo che i primi r elementi della prima ed ultima orizzontale coincidano con H_1, H_2, \dots, H_r ed F_1, F_2, \dots, F_r rispettivamente e i rimanenti delle stesse orizzontali siano tutti zeri. Si dimostra poi che la matrice ottenuta sopprimendo la prima ed ultima orizzontale e le prime r verticali non è nulla nella ipotesi $J = |f_i^j| \neq 0$ (13).

Scende quindi che condizione necessaria e sufficiente per l'annullarsi di M è che sia nulla la matrice

$$(10) \quad \begin{vmatrix} H_i \\ F_i \end{vmatrix},$$

e ciò, per la (3) dimostra il teorema.

4. Naturalmente il concetto di curva quasi-asintotica a tre indici, esposto nel n. 1, si può estendere considerando più in generale *varietà quasi-asintotiche a tre indici*.

(13) Nel caso $r = 3$ la matrice M si compone di 7 orizzontali e 9 verticali. Sommando alle verticali 4^a, 5^a, 6^a rispettivamente la 1^a, 2^a, 3^a, moltiplicate per $-x'_2/x'_1$, e alle verticali 7^a, 8^a, 9^a la 1^a, 2^a, 3^a moltiplicate per $-x'_3/x'_1$, aggiungendo alla 1^a orizzontale, preventivamente moltiplicata per x'_1 , la 2^a e 3^a moltiplicate rispettivamente per x'_2 e x'_3 , e la 4^a, 5^a moltiplicate per $(x'_2)^2/x'_1$, $x'_2 x'_3/x'_1$, e la 6^a moltiplicata per $(x'_3)^2/x'_1$, M diviene

H_1	H_2	H_3	0	0	0	0	0	0
f_1^2	f_2^2	f_3^2	$f_1 - \frac{x'_2}{x'_1} f_1^2$	$f_2 - \frac{x'_2}{x'_1} f_2^2$	$f_3 - \frac{x'_2}{x'_1} f_3^2$	$-\frac{x'_3}{x'_1} f_1^2$	$-\frac{x'_3}{x'_1} f_2^2$	$-\frac{x'_3}{x'_1} f_3^2$
f_1^3	f_2^3	f_3^3	$-\frac{x'_2}{x'_1} f_1^3$	$-\frac{x'_2}{x'_1} f_2^3$	$-\frac{x'_2}{x'_1} f_3^3$	$f_1 - \frac{x'_3}{x'_1} f_1^3$	$f_2 - \frac{x'_3}{x'_1} f_2^3$	$f_3 - \frac{x'_3}{x'_1} f_3^3$
0	0	0	f_1^2	f_2^2	f_3^2	0	0	0
0	0	0	f_1^3	f_2^3	f_3^3	f_1^2	f_2^2	f_3^2
0	0	0	0	0	0	f_1^3	f_2^3	f_3^3
F_1	F_2	F_3	0	0	0	0	0	0

Se $J \neq 0$, la matrice M' , ottenuta sopprimendo la 1^a ed ultima orizzontale e le prime 3 verticali, non è nulla. La dipendenza lineare fra le righe di M' implicherebbe infatti quella fra le righe di J .

Date due varietà V_k, V_m ($k > m$) tali che V_m appartenga a V_k , una varietà V_t di V_m ($t < m$) si dirà *quasi-asintotica a tre indici* $\sigma_{p,q,r}$ di (V_k, V_m) quando in un suo punto generico lo spazio congiungente l' $S(p)$ osculatore a V_k , l' $S(q)$ osculatore a V_m e l' $S(r)$ osculatore a V_t ($p < q < r$) ha dimensione minore del massimo corrispondente ai valori assegnati di k, m, t, p, q, r .

Il concetto si può ancora estendere, considerando, invece di tre varietà, un numero qualunque n di varietà $V_{k_1}, V_{k_2}, \dots, V_{k_n}$ ($k_1 > k_2 > k_3 > \dots > k_n$) tali che la V_{k_i} appartenga alla $V_{k_{i-1}}$ per $i = 2, 3, \dots, n$. Si dirà che V_{k_n} è una *varietà quasi-asintotica ad n indici* $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ di $(V_{k_1}, V_{k_2}, \dots, V_{k_{n-1}})$ quando in un suo punto generico lo spazio congiungente l' $S(\rho_1)$ osculatore a V_{k_1} , l' $S(\rho_2)$ osculatore a V_{k_2}, \dots , l' $S(\rho_n)$ osculatore a V_{k_n} ($\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n$) ha dimensione minore del massimo corrispondente ai valori k_j, ρ_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

Va da sè che anche questo concetto di varietà quasi-asintotica a più indici rientra nel concetto generale di *varietà pluriassiale* del Bompiani. La V_{k_n} quasi-asintotica di $(V_{k_1}, V_{k_2}, \dots, V_{k_{n-1}})$ è *varietà pluriassiale* di $V_{k_{n-1}}$ quando si associa ad un punto generico di $V_{k_{n-1}}$ lo spazio congiungente gli $S(\rho_1), S(\rho_2), \dots, S(\rho_{n-1})$ osculatori in quel punto a $V_{k_1}, V_{k_2}, \dots, V_{k_{n-1}}$.

Geometria algebrica. — *Remarques sur les formes qui contiennent une variété algébrique donnée.* Nota di FRANÇOIS JONGMANS, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

I. Dans une Note récente ⁽¹⁾, M. Roth a indiqué des conditions suffisantes pour qu'une variété irréductible V_d d'un espace projectif S_r ⁽²⁾ appartienne à des hypersurfaces d'ordre n assigné; il soumet toutefois r et n à certaines restrictions: r est impair, ou $n \leq r + 1$. Nous nous proposons de montrer que les restrictions peuvent être levées, grâce à des propriétés d'existence des hypersurfaces qui possèdent des section hyperplanes imposées. Ces propriétés sont en fait l'objet principal de notre Note.

Le théorème de M. Roth découle aisément du lemme suivant:

S'il existe $n-1$ hyperplans Σ^i de S_r contenant autant de variétés $V_{r-2}^{(i)}$ d'ordre n ($i = 1, 2, \dots, n-1$) aptes à servir de section hyperplanes à une hypersurface V_{r-1}^n de S_r , le système linéaire de toutes les W_{r-1}^n menées par les $V_{r-2}^{(i)}$ est irréductible et de dimension $r+1$.

C'est dans ce lemme que M. Roth introduit les restrictions dont il a été question plus haut, et que nous n'avons pas reprises ici. Leur rôle tient au mode de raisonnement employé par l'auteur, qui évalue la dimension du système linéaire $|W_{r-1}^n|$ au moyen d'une formule de postulation sans correction de surabondance.

(*) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) *Sulle forme che contengono una data varietà algebrica.* (« Rendic. Lincei », ser. 8°, vol. III, fasc. 5-6, pp. 541-545 (1947).

(2) Nous supposerons que le domaine fondamental soit le corps des complexes, bien que cette limitation ne soit pas essentielle.

Outre qu'un tel calcul n'est pas démonstratif, il ne donne pas le résultat escompté quand la dimension virtuelle obtenue est manifestement inférieure à la dimension effective, par exemple négative; de là les restrictions sur r, n .

M. Roth étend le lemme précédent au cas où le nombre t des Σ^i ou des $V_{r-2}^{(i)}$ est un entier inférieur ou égal à $n-1$. Nous nous placerons d'emblée dans ces conditions plus générales et nous admettrons même que t prenne la valeur n .

2. Soient t variétés $V_{r-2}^{(i)}$ d'ordre n ($0 < t \leq n$), irréductibles ou non, situées dans t hyperplans Σ^i ($i = 1, 2, \dots, t$) et soumises pour l'instant à la seule hypothèse de ne pas avoir deux à deux de composante commune. Une telle composante ne pouvant être que l'espace d'intersection S_{r-2} des hyperplans Σ^i correspondants, notre hypothèse dit que tout S_{r-2} commun à deux Σ^i fait partie d'au plus une $V_{r-2}^{(i)}$. Dans ces conditions, le système linéaire des hypersurfaces W_{r-1}^n , qui admettent les $V_{r-2}^{(i)}$ comme sections hyperplanes a pour dimension $\binom{n-t+r}{r}$ ou $\binom{n-t+r}{r} - 1$; la seconde valeur s'obtient uniquement quand tous les Σ^i sont des composantes fixes. En effet, $|W_{r-1}^n|$ peut admettre comme composantes fixes un certain nombre k des Σ^i . Si $k = t$, la dimension obtenue est celle de la totalité des formes d'ordre $n-t$ de S_r . Dans le cas opposé ($0 \leq k < t$), la partie résiduelle de $|W_{r-1}^n|$ admet comme base imposée $n-k$ sections hyperplanes totales dont aucune ne contient plus d'espace S_{r-2} commun à deux des Σ^i restants, comme on le voit avec un peu d'attention. Cette partie résiduelle admet pour variété fondamentale monovalente l'ensemble des Σ^i restants, donc elle est irréductible et de dimension $\binom{n-t+r}{r}$.

Dans le cas usuel où aucun S_{r-2} commun à deux hyperplans Σ^i ne fait partie d'une $V_{r-2}^{(i)}$, le nombre des composantes fixes Σ^i est nécessairement 0 ou t , de sorte qu'alors la dimension prend l'une ou l'autre valeur suivant que $|W_{r-1}^n|$ est irréductible ou non. Cette remarque est d'application notamment quand les $V_{r-2}^{(i)}$ sont supposées irréductibles, ou encore quand on postule l'existence d'une W_{r-1}^n irréductible qui ne contienne pas les S_{r-2} en question.

Remarque. — La propriété obtenue est en défaut lorsque plusieurs $V_{r-2}^{(i)}$ peuvent avoir une composante commune S_{r-2} . Par exemple, les cubiques planes menées par deux ternes alignés sont ∞^3 , mais elles deviennent ∞^4 si les deux ternes ont un point commun. On peut cependant sauvegarder la propriété en affectant un S_{r-2} commun à k $V_{r-2}^{(i)}$ de la multiplicité k pour les W_{r-1}^n ; ainsi, les cubiques douées d'un point double et de quatre points alignés par couples sur le précédent sont réductibles et ∞^2 . Mais cette introduction de multiplicités nous détourne de notre objet, de sorte que nous n'approfondirons pas ceci.

3. Demandons-nous maintenant quel sens peut être attribué à l'expression « aptes à servir de sections hyperplanes à une hypersurface V_{r-1}^n de S_r », qui intervient dans l'énoncé du lemme du numéro 1. Si nous entendons par là qu'il existe une hypersurface irréductible V_{r-1}^n dont les $V_{r-2}^{(i)}$ soient des sections hyper-

planes⁽³⁾, le lemme résulte immédiatement du n. 2 dont il est un cas très particulier, et sans aucune restriction sur r, n (sinon les conditions banales $r > 1, n > 1$). Mais on observera que le mode de raisonnement de M. Roth ne fait pas vraiment appel à l'existence de V_{r-1}^n ; comme l'auteur le laisse entendre, il se borne à exploiter le fait que deux $V_{r-2}^{(i)}$ ont toujours en commun une section hyperplane V_{r-3}^n , trois $V_{r-2}^{(i)}$ une V_{r-4}^n , quatre $V_{r-2}^{(i)}$ une V_{r-5}^n , et ainsi de suite. Si nous restreignons à cette propriété le sens de la locution « aptes à... », le lemme du numéro 1 ou son extension ne sont plus des conséquences immédiates du numéro 2; il reviennent alors à affirmer que la propriété attribuée aux intersections des $V_{r-2}^{(i)}$ entraîne l'existence d'au moins une hypersurface irréductible qui admet les $V_{r-2}^{(i)}$ pour sections hyperplanes. Si cela a lieu, le système $|W_{r-1}^n|$ est bien de dimension $\binom{n-t+r}{r}$.

En fait, nous allons réduire encore les hypothèses et démontrer que: *Etant donnés trois entiers naturels: r, n supérieurs à 1, t au plus égal à n , il existe un système linéaire complet irréductible $\infty \binom{n-t+r}{r}$ d'hypersurfaces W_{r-1}^n de S_r admettant comme sections hyperplanes t variétés données $V_{r-2}^{(i)}$ d'ordre n , irréductibles ou non, situées dans t hyperplans différents Σ^i ($i = 1, 2, \dots, t$), sous la réserve que deux $V_{r-2}^{(i)}$ quelconques aient toujours une section hyperplane totale V_{r-3}^n commune⁽⁴⁾ et que trois quelconques d'entre elles n'aient jamais en commun une section hyperplane ou un espace linéaire à $r-3$ dimensions⁽⁵⁾.*

Le théorème se vérifie par récurrence sur t . De démonstration aisée pour $t=1$, supposons-le acquis pour une valeur $t-1 \leq n-1$. Par $t-1$ des $V_{r-2}^{(i)}$, par exemple celles qui répondent aux valeurs $1, 2, \dots, t-1$ de i , passe un système linéaire irréductible $|\bar{W}|$ d'ordre n et dimension $\binom{n-t+r+1}{r}$. Puisque $|\bar{W}|$ et l'ensemble des hypersurfaces d'ordre $n-t+1$ de S_r possèdent le même reste par rapport à Σ^t , à savoir le système des formes d'ordre $n-t$ (à des parties fixes Σ^i près), la dimension du système \bar{w} découpé sur Σ^t par $|\bar{W}|$ excède d'une unité celle de la totalité des hypersurfaces d'ordre $n-t+1$ de Σ^t et vaut donc $\binom{n-t+r}{r-1}$. En vertu du numéro 2, $|\bar{w}|$ est complet et contient dès lors $V_{r-2}^{(t)}$. Les hypersurfaces \bar{W} qui admettent $V_{r-2}^{(t)}$ comme section hyperplane par Σ^t forment ainsi un système linéaire de dimension

$$\binom{n-t+r+1}{r} - \binom{n-t+r}{r-1} = \binom{n-t+r}{r},$$

(3) L'hypothèse du n. 2 sur les composantes communes à deux $V_{r-2}^{(i)}$ peut être satisfaite en prenant génériques les hyperplans Σ^i .

(4) Cette hypothèse exclut que $V_{r-2}^{(i)}$ admette comme composante l'espace S_{r-2} commun à l'hyperplan Σ^i correspondant et à un autre Σ^i .

(5) Cette hypothèse équivaut à l'existence d'une V_{r-4}^n commune à trois $V_{r-2}^{(i)}$ quelconques, à la réserve du cas où le S_{r-3} commun à trois Σ^i appartient à deux des trois $V_{r-2}^{(i)}$ correspondantes.

comme il a été annoncé. L'irréductibilité de $|W_{r-1}^n|$ en résulte, car les hypersurfaces W_{r-1}^n réductibles sont évidemment astreintes à contenir les t hyperplans Σ^i dès qu'elles en contiennent un seul, mais ne dépendent plus alors que de $\binom{n-t+r}{r} - 1$ paramètres.

Que les conditions imposées aux ternes de variétés $V_{r-2}^{(i)}$ dans l'énoncé soient indispensables pour la validité du théorème ressort de l'exemple élémentaire des surfaces cubiques de S_3 à trois sections planes imposées. Celles-ci sont censées avoir deux à deux trois points communs; lorsque leurs plans passent par une même droite ou que les trois sections planes ont un point commun, il n'existe généralement aucune surface cubique irréductible qui réponde à la question.

On voit combien notre résultat est plus significatif que ceux de M. Roth. Indépendamment de la plus grande latitude laissée aux entiers r, n, t , il contient le minimum d'hypothèses requis pour la validité de l'énoncé. En particulier, il n'est pas nécessaire de supposer que $k > 3$ variétés $V_{r-2}^{(i)}$ aient une V_{r-k-1}^n commune; le théorème lui-même affirme cette propriété, sans d'ailleurs exclure le cas où cette variété commune acquerrait une dimension supérieure à $r - k - 1$.

4. La propriété démontrée au numéro précédent conduit à une forme précisée et complétée des théorèmes donnés par M. Roth aux numéros 4 et 5 de son travail:

Si les hypersurfaces d'ordre s de S_r découpent un système complet sur une variété irréductible donnée V_d , et que la section hyperplane de V_d appartienne à des V_{r-2}^{s+t} de manière qu'en choisissant convenablement t hyperplans et une de ces V_{r-2}^{s+t} dans chaque hyperplan, les t V_{r-2}^{s+t} obtenues aient deux à deux une section hyperplane V_{r-3}^{s+t} commune et trois à trois une V_{r-4}^{s+t} commune, alors V_d appartient à ∞^{k+1} formes irréductibles (au moins) d'ordre $n = s + t$, en appelant k la dimension du système des hypersurfaces d'ordre s qui contiennent V_d ; en particulier, quand V_d n'appartient à aucune forme d'ordre s , elle est située sur au moins une forme irréductible d'ordre $s + t$. La seule restriction imposée à s, t est d'être positifs.

En effet, par les t variétés V_{r-2}^{s+t} de l'énoncé passent $\infty^{\binom{s+r}{r}}$ formes irréductibles d'ordre $s + t$, qui découpent sur V_d le système complet, de dimension $\binom{s+r}{r} - k - 2$, marqué par les formes d'ordre s .

Pour $t = 1$, nous retrouvons un théorème plus particulier donné par nous antérieurement à la Note de M. Roth ⁽⁶⁾.

(6) *Contribution à la théorie des variétés algébriques* (« Mém. Soc. Royale des Sc. de Liège », t. VII, 1947), chap. IV, n. 8. Le chapitre indiqué contient d'autres théorèmes relatifs au même ordre d'idées.

Meccanica. — *Sui «meccanismi calcolatori» di Svoboda.* Nota di LUIGI SOBRERO, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

In una sua recente monografia⁽¹⁾ lo Svoboda ha indicato un metodo di approssimazioni successive per lo studio di alcuni dispositivi cinematici che egli denomina «meccanismi calcolatori». Il metodo appare assai laborioso; e, in esso, ha larga parte l'intuito e la genialità dell'Autore. In questa Nota, premesse alcune definizioni introduttive, mostreremo che un procedimento assai più elementare può fornire un primo e proficuo orientamento per lo studio di quei meccanismi.

I. MECCANISMI CALCOLATORI. — Un «meccanismo calcolatore» può idealmente presentarsi come una cassetta dalla quale fuoriescono alcuni perni cilindrici,

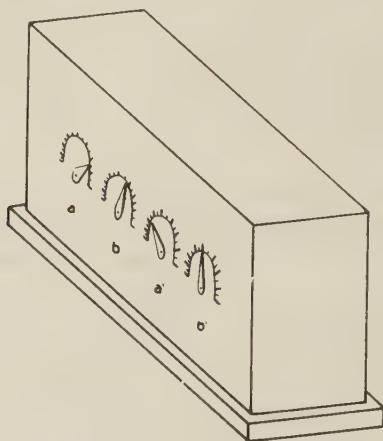


Fig. 1.

$a, b, \dots, a', b', \dots$, girevoli nelle rispettive sedi. Le rotazioni $\alpha, \beta, \dots, \alpha', \beta', \dots$ di questi perni si possono leggere in graduazioni segnate sulla cassetta, e si possono eventualmente ricevere (o rinviare), mediante opportuni collegamenti, alle macchine che comandano (o utilizzano) il meccanismo calcolatore.

Le rotazioni dei perni non sono indipendenti, ma legate l'una all'altra da un conveniente dispositivo cinematico; per modo che, imponendo a un certo numero di perni (per esempio a quelli indicati con a, b, \dots) arbitrarie rotazioni α, β, \dots (scelte colla sola condizione di esser comprese nell'ambito delle rispettive scale graduate) i perni restanti (a', b', \dots) effettuano automaticamente le rotazioni α', β', \dots legate ad α, β, \dots dalle relazioni:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha' = f(\alpha, \beta, \dots) \\ \beta' = g(\alpha, \beta, \dots) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) A. SVOBODA, *Computing Mechanism and Linkages*, «Massachussets Institute of Technology, Radiation Laboratory Series», vol. 27, Mc Graw-Hill Book Company, New York and London, 1948.

in cui $f(\alpha, \beta, \dots)$, $g(\alpha, \beta, \dots)$, \dots designano prestabilite e note funzioni degli argomenti α, β, \dots .

Col semplice movimento di alcune manopole il dispositivo consente, dunque, di determinare i valori assunti dalle funzioni f, g, \dots in corrispondenza ad un arbitrario gruppo di valori delle variabili α, β, \dots . Di qui il nome di «meccanismo calcolatore» con cui viene designato il dispositivo. Con espressivo neologismo si potrebbe anche dire che il dispositivo «meccanizza» le funzioni $f(\alpha, \beta, \dots)$, $g(\alpha, \beta, \dots)$, \dots .

I parametri che si scelgono come variabili indipendenti (α, β, \dots) son detti «parametri d'ingresso»; i restanti (α', β', \dots) «parametri d'uscita». Quando i parametri siano due soltanto (uno d'ingresso e uno d'uscita) il meccanismo può — in certo senso — ritenersi equivalente ad una tabella numerica nella quale, accanto ad ognuno dei valori che può assumere il parametro d'ingresso, siano indicati i corrispondenti valori del parametro d'uscita. Un meccanismo calcolatore con tre parametri (due d'ingresso e uno d'uscita) equivale, analogamente, a una tabella numerica a doppia entrata.

È tuttavia evidente che i requisiti e gli impieghi di una tabella numerica sono assai differenti da quelli di un meccanismo calcolatore. Le tabelle presentano, sui meccanismi, il vantaggio di poter indicare i valori del parametro d'uscita con una precisione irraggiungibile dai mezzi meccanici. I meccanismi calcolatori, a loro volta, offrono il vantaggio di poter trasmettere direttamente e automaticamente i risultati del calcolo alle macchine, o strumenti, che quei risultati debbono utilizzare.

Lo studio di un meccanismo calcolatore pone il seguente problema: attraverso quali dispositivi cinematici dobbiamo collegare i perni $a, b, \dots, a', b', \dots$ se vogliamo che le rotazioni $\alpha, \beta, \dots, \alpha', \beta', \dots$ di questi perni siano mutualmente vincolate dalle relazioni (1)?

Anche quando ci si contenti di soluzioni approssimate (e la Tecnica non esige normalmente di più) il problema si presenta difficilissimo; nè pare che, sino ad oggi, siano stati indicati, per la sua risoluzione, procedimenti di carattere generale. Pur limitandosi (in gran parte della sua monografia) al caso particolare — ma importante — di meccanismi con due soli parametri (uno d'ingresso e uno d'uscita) lo Svoboda non indica che un procedimento di approssimazioni successive, lungo e laboriosissimo, anche se pienamente soddisfacente nei suoi ultimi risultati.

Noi abbiamo avuto occasione di osservare⁽²⁾ che (sempre nel caso di meccanismi con due soli parametri) è possibile ottenere, per via assai elementare, soluzioni che coincidono, o sono molto prossime, o sono addirittura migliori, di quelle indicate dallo Svoboda. Di tale osservazione vogliamo qui brevemente riferire. Avvertiamo esplicitamente che ci asterremo da ogni dettaglio di calcolo, e che ci limiteremo alla pura e semplice esposizione del metodo.

2. SOLUZIONE TEORICA. — Siano C e C' due corpi rigidi, giacenti sopra un medesimo piano fisso π e, rispettivamente, girevoli intorno a due punti, O ed O' , di questo piano. A partire da un determinato istante i due corpi entrino simul-

(2) Cfr. L. SOBRERO, *Lezioni di Meccanica, Parte I, Cinematica*, p. 284 (Trieste, 1948-49).

taneamente in rotazione, con convenienti leggi orarie; per modo che gli angoli α ed α' da essi rispettivamente descritti dopo un generico intervallo di tempo risultino legati dalla relazione

$$(2) \quad \alpha' = f(\alpha),$$

in cui $f(\alpha)$ designa una assegnata funzione dell'argomento α .

Fissiamo l'attenzione sul moto relativo del corpo C' rispetto al corpo C , e diciamo p e p' le curve polodie di questo movimento, cioè quelle curve che, muovendosi solidariamente, l'una col corpo C , l'altra col corpo C' , rotolano l'una sull'altra durante il movimento del sistema. Nulla impedisce di pensare che le curve p e p' facciano addirittura parte dei contorni dei rispettivi corpi rigidi. In tale ipotesi i due corpi si mantengono a contatto, durante il movimento, per un punto dal loro contorno.

Se, inversamente, noi muoviamo i due corpi rigidi in modo che i loro contorni p e p' rimangano premuti l'un sull'altro, le rotazioni α ed α' dei due corpi risultano proprio legate dalla assegnata relazione (2). Il problema di vincolare le rotazioni di due corpi rigidi (o di due perni) in modo da soddisfare alla (2) è così teoricamente risolto.

« Teoricamente », diciamo, perchè la soluzione indicata non ha che un limitato interesse tecnico. A prescindere da altri secondari motivi, i due profili p e p' non si potrebbero infatti lavorare in serie, sul metallo, con quella precisione che è usualmente richiesta da un meccanismo calcolatore. Quella che abbiamo indicata è, dunque, una soluzione di carattere teorico; ma, da essa, non è difficile ricavare una soluzione - approssimata - di carattere tecnico.

3. SOLUZIONE TECNICA. - Tornando a considerare i corpi C e C' in movimento sul piano π , diciamo P e P' due punti (rispettivamente appartenenti a C e a C') i quali presentino - nella iniziale configurazione del sistema di corpi, o in altra arbitraria configurazione di riferimento - un coniugio di ordine, n , il più possibile elevato (3). Al muoversi del sistema di corpi intorno alla sua configurazione iniziale, la distanza dei due punti P e P' rimane invariata a meno di infinitesimi di ordine n , e, se fosse lecito prescindere da tali infinitesimi, potrebbe addirittura riguardarsi come costante. In questa ipotesi noi potremmo collegare i due corpi con una bielletta rigida, ad essi imperniata nei punti P e P' , ed eliminare il vincolo del contatto fra i contorni p e p' . Il movimento relativo concesso dal nuovo e più semplice vincolo ai due corpi rigidi C e C' rimarrebbe ovviamente quel medesimo che era prescritto dal contatto dei contorni p e p' , e cioè dalla relazione (2).

Di fatto, quando si sostituisce il vincolo del contatto fra le curve polodie con il collegamento rigido PP' , la rotazione del corpo C' non è più, esattamente, legata alla rotazione α del corpo C dalla relazione (2); e cioè non eguaglia esattamente α' ; ma ne differisce per un « errore strutturale », Δ , infinitesimo di

(3) Per la definizione di coniugio e di ordine di coniugio, si veda la nostra Nota dal titolo *Di una elementare proprietà cinematica analoga al principio di Fermat* nel precedente fascicolo di questi « Rendiconti ».

ordine n (rispetto ad α ed α'). In genere è possibile scegliere i punti P e P' in modo che essi presentino un coniugio del quinto ordine. L'errore strutturale Δ risulta allora, esso stesso, infinitesimo del quinto ordine, e diviene praticamente trascurabile quando le rotazioni α ed α' non siano troppo ampie.

Ecco dunque « meccanizzata » — nei limiti di approssimazione consentiti dal semplicissimo dispositivo cinematico impiegato — la relazione (2). Applicando questo procedimento alle particolari funzioni $f(\alpha)$ considerate dallo Svoboda abbiamo ottenuti i medesimi risultati e gli stessi meccanismi che egli ricava attraverso il suo procedimento di approssimazioni successive.

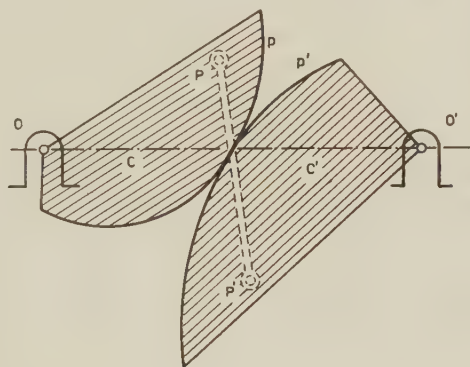


Fig. 2.

Con meccanismi tanto semplici (dotati di una sola biella di collegamento non è possibile ottenere una approssimazione migliore, e cioè un errore strutturale Δ di ordine d'infinitesimo superiore al quinto. Chi desiderasse una approssimazione più elevata dovrebbe, necessariamente, far ricorso a meccanismi più complessi. Ma non par facile indicare la strada che conviene seguire in una tale ricerca.

Meccanica. — *Proprietà gruppali del tensore energetico.* Nota I di ALDO KRANJC, presentata (*) dal Socio G. GIORGI.

Le equazioni del campo gravitazionale si scrivono nel caso generale

$$(1) \quad G_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} (G - 2\lambda) = -\beta T_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

dove G_{ik} è il tensore contratto di Riemann, g_{ik} sono i coefficienti della forma quadratica

$$(2) \quad ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k$$

G è l'invariante associato a G_{ik} , λ la costante cosmica, β una costante dimensionale e T_{ik} le componenti covarianti del tensore energetico.

(*) Nella seduta del 13 maggio 1950.

Le (1) costituiscono un sistema di dieci equazioni differenziali lineari nelle derivate parziali seconde delle g_{ik} . Alle (1) si devono aggiungere altre quattro relazioni che geometricamente esprimono l'annullarsi della divergenza del tensore del primo membro delle (1), e fisicamente esprimono le due leggi della conservazione dell'impulso e della massa inerte dovuta agli elementi di materia ed energia.

Risolvendo il sistema rispetto alle g_{ik} si otterranno gl'integrali che dipenderanno da un certo numero di funzioni arbitrarie provenienti dalle quadrature, e da quattro funzioni arbitrarie provenienti dall'arbitrarietà del sistema di riferimento.

Se invece le g_{ik} sono note e si cercano le T_{ik} , le (1) stesse risolvono il problema con semplici operazioni di derivazione.

È evidente che le (1) non devono essere considerate solamente come equazioni di definizione delle g_{ik} o delle T_{ik} , ma anche, e soprattutto, come uguaglianze d'origine fisica. Mentre al primo membro si hanno solo termini di natura geometrica, al secondo membro si hanno solo termini d'origine meccanica, e più in generale elettromagnetica, gravità esclusa. La (1) è una legge fisica se è possibile definire operativamente tanto l'ente rappresentato nel primo membro, cioè la metrica del cronotopo, quanto il tensore energetico. Quindi partendo dalla metrica sperimentalmente determinata, ed eseguiti i calcoli indicati dalla (1) per determinare il primo membro, si devono trovare gli stessi numeri che esprimono il tensore energetico sperimentalmente determinato.

A questo punto osserviamo, e ciò è d'importanza fondamentale in ciò che segue, che la metrica può essere determinata sperimentalmente senza conoscere il tensore energetico⁽¹⁾, mentre il tensore energetico si può fisicamente determinare solo se prima sia stata determinata la metrica; infatti misure di lunghezze, densità, velocità ecc. hanno senso soltanto se riferite ad una metrica.

Naturalmente questa precedenza logica spettante alla metrica sul tensore energetico non toglie alla (1) il carattere di legge fisica; infatti il tensore energetico dipende dalla metrica, ma non è detto che la dipendenza debba necessariamente assumere la forma trovata da Einstein.

Da quanto si è detto si deduce che le (1) potranno essere impiegate come equazioni che ci permettono di trovare le componenti del tensore energetico, nota la metrica, mentre il problema inverso è fisicamente privo di senso; sfortunatamente è proprio questo il problema che si presenta più spesso.

In pratica si riesce in molti casi a sormontare la difficoltà. Poichè è sperimentalmente provato che il nostro cronotopo è quasi euclideo, potremo adoperare la metrica euclidea per determinare i T_{ik} e poi, risolte le equazioni (1) e determinata la metrica in seconda approssimazione, eseguire le misure necessarie riferendosi alla nuova metrica, ottenendo così un nuovo insieme di T_{ik} , e così via per approssimazioni successive.

È chiaro che nei casi che comunemente si presentano i g_{ik} tendono ad una soluzione limite. Già la prima approssimazione in molti casi è sufficiente; essa infatti è posta a fondamento della fisica non relativistica.

(1) Vedere ad esempio l'esperienza ideale di LEVI-CIVITA in *Fondamenti di meccanica relativistica*. Zanichelli, Bologna (1928) p. 85.

Ma se andiamo ad esaminare le applicazioni cosmologiche l'ipotesi dell'euclideanità dello spazio tempo è infondata e la convergenza delle approssimazioni successive diviene incerta.

Un altro metodo per aggirare la difficoltà è il seguente. Si attribuiscono *a priori* al tensore energetico dei valori compatibili con le proprietà fisiche del sistema, riferendosi ad un sistema astratto di coordinate; determinata la metrica colle (1) partendo da questi valori *a priori* del T_{ik} , e rifacendo le misure rispetto alla metrica trovata, si devono trovare i valori dati in partenza. Questo metodo è seguito nella maggior parte dei problemi relativistici; vedere ad esempio il caso della carica elettrica puntiforme ecc. L'obiezione ovvia è che per la sua applicazione bisogna «indovinare» in partenza i valori del T_{ik} ed in generale ciò non è facile.

Nel caso che la metrica non sia stata determinata, nulla dunque possiamo dire circa le proprietà *metriche* del tensore energetico, ma ciò non implica che non se ne possa dire assolutamente nulla. Ad esempio due anelli d'una catena, qualunque sia la metrica adoperata per descriverne lo stato, non si potranno mai separare senza spezzarne uno. Ciò significa che la metrica connessa ai due anelli conserva delle proprietà invarianti rispetto a tutte le possibili deformazioni dei due anelli, proprietà che hanno il loro corrispondente in proprietà geometriche dell' S_4 . Il loro insieme costituisce la sua topologia. Vediamo quindi che fra tutti gli S_4 possibili dovremo limitarci a scegliere quelli aventi le proprietà topologiche richieste. Ma così come le proprietà topologiche sono solo una parte delle proprietà geometriche, il sistema in esame potrà averne altre di carattere non metrico, oltre a quella già vista, che si rispecchieranno in altrettante proprietà dell' S_4 . Per precisare introduciamo il principio d'isomorfismo: il gruppo delle operazioni fisiche, eseguite su di un dato sistema, è isomorfo al gruppo di trasformazioni indotto nell' S_4 determinato dal sistema. Tale principio in sostanza non è altro che il principio di geometrizzazione posto sotto una forma più precisa (2).

Posto in tal modo, ci permette di vedere il legame col concetto di proprietà geometrica collegata ad un gruppo di trasformazioni, introdotto da Klein, Lie e Riemann (3); infatti le proprietà fisiche invarianti rispetto ad un determinato gruppo di operazioni avranno per corrispondente un insieme di proprietà geometriche dell' S_4 relative al gruppo di trasformazioni isomorfo.

Determinate tutte le proprietà fisiche indipendenti dalla metrica, si possono quindi ottenere tutte le proprietà non metriche dell' S_4 .

È evidente che, dato ad arbitrio un sistema fisico, in generale l'unico gruppo di operazioni che lo muti in se stesso sarà l'identità; ciò significa che qualsiasi operazione vi si esegua, esso ne verrà modificato. Ma in alcuni casi particolari può avvenire che esista un'operazione che lo muti in sé: ad esempio una rotazione con ricoprimento od una permutazione di elementi identici, ciò che avviene nella rotazione d'una sfera omogenea o nella rotazione con ricoprimento d'un icosaedro omogeneo; nel primo caso si ha un gruppo continuo, nel secondo si

(2) G. C. Mc. VIRTIE, *Il tensore energetico ha le stesse proprietà qualitative e quantitative della metrica corrispondente*. «Cosmological theory», p. 39.

(3) Ved. il *Programma di Erlangen* di KLEIN ed *Ueber die Hypothesen...* di RIEMANN.

ha un gruppo discontinuo d'ordine 60 isomorfo al gruppo alterno di sostituzioni su cinque lettere.

Nel caso della sfera omogenea si ottiene uno spazio a simmetria sferica del tipo noto in geometria differenziale; nei punti esterni alla sfera si ha una soluzione data da Schwarzschild. Ma anche se la sfera non è del tutto omogenea, purchè la densità dipenda soltanto dalla distanza dal centro, la soluzione è ancora dello stesso tipo. Qui interviene una sola funzione ad una sola variabile, cioè la densità espressa in funzione del raggio. Il caso della massa puntiforme è equivalente al caso della sfera, ed è stato il primo problema relativistico in cui i concetti di gruppo hanno avuto applicazione.

Geodesia. — *Sviluppi di Legendre generalizzati nello spazio.*
Nota di ANTONIO MARUSSI, presentata (*) dal Socio G. CASSINIS.

1. In una precedente Nota ⁽¹⁾ si sono richiamati gli sviluppi di Legendre, che forniscono le serie di potenze dell'arco s di una geodetica tracciata sull'ellissoide di rotazione, atte a fornire le coordinate geografiche φ e λ (latitudine e longitudine) e l'azimut α in un estremo di questa, noti gli analoghi elementi per l'altro estremo; si è ricordato come questi sviluppi siano stati generalizzati in varia forma da alcuni Autori, e se ne è data un'ulteriore generalizzazione per una curva qualunque tracciata su di una superficie pure qualunque.

La considerazione di una superficie qualunque ha notevole importanza in Geodesia, in quanto può interessare lo studio di una superficie equipotenziale della gravità (geoide), supposta nota attraverso la determinazione sperimentale dei suoi elementi differenziali; se però si tiene conto del fatto che le misure geodetiche possono aver luogo solo eccezionalmente su di una singola superficie equipotenziale, poichè ciò presuppone l'esistenza di estese pianure, nel mentre di regola i punti di stazione si trovano a quote anche molto diverse fra di loro, e quindi su superfici equipotenziali diverse, può presentarsi il problema di generalizzare a questo caso, che rappresenta in Geodesia la regola, gli accennati sviluppi fondamentali.

Nella Geodesia operativa, il problema viene risolto con la cosiddetta « riduzione » delle misure lineari ed angolari al geoide (od all'ellissoide); ma questa operazione ha luogo introducendo ipotesi semplificatrici, che non hanno rispondenza nella realtà, e che vengono a falsare perciò i risultati delle operazioni, togliendo loro anche ogni rigore logico.

In questa Nota ci si propone di mostrare come la difficoltà possa essere girata considerando il simultaneo trasporto delle coordinate geografiche, dell'azimut, della quota dinamica, e della distanza zenitale, da un punto ad un altro del campo di gravità, lungo archi finiti di geodetiche nello spazio, e cioè lungo segmenti di rette; ciò che evita di dover applicare arbitrarie riduzioni ai valori osservati.

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

(1) A. MARUSSI, *Sviluppi di Legendre generalizzati per una curva qualunque tracciata su di una superficie pure qualunque*. «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», vol. VIII, fasc. 4, pp. 342-347 (1950).

Le relazioni che si vanno a stabilire potranno trovare dopo ciò applicazione sia per il campo attuale quale esso si presenta all'osservazione, che per il campo normale, stabilito ad esempio in base alla teoria di Somigliana, e particolarizzato per le concrete applicazioni geodetiche da Silva e da Cassinis.

A questo proposito si nota come si vada attualmente delineando in Geodesia la tendenza a misurare oltre che le lunghezze di geodetiche superficiali (basi geodetiche, lati di triangolazioni), anche la distanza reale fra i punti della superficie terrestre, lungo traiettorie ottiche che con grande approssimazione si possono confondere con segmenti di retta. Gli strumenti ideati allo scopo, o che comunque ad esso si possono adattare, sono il geodimetro di Bergstrand, basato su di un metodo interferenziale che impiega raggi luminosi, ed i metodi fondati sul Radar, che impiegano onde elettromagnetiche cortissime.

2. In una mia precedente Nota ⁽²⁾ il campo di gravità terrestre è stato riportato alle coordinate più naturali per il suo studio dal punto di vista geodetico, riferendo ogni punto P di una sua superficie equipotenziale alla sua latitudine astronomica φ , ed alla sua longitudine astronomica λ ; e contraddistinguendo poi una superficie equipotenziale dall'altra mediante il valore W del potenziale che le compete. Come è ben noto, la differenza di potenziale relativa a due superfici misura, a meno di un fattore costante inessenziale, quella che in Geodesia viene chiamata la loro differenza di quota dinamica. I valori di φ , λ e W, che per ragioni di simmetria indicheremo anche con y^1 , y^2 ed y^3 ordinatamente, rappresentano dopo ciò le coordinate del punto P.

In un tale sistema di coordinate curvilinee, i vettori metrici fondamentali covarianti $v_r = \partial P / \partial y^r$ sono dati da

$$(1) \quad \begin{cases} v_1 = \frac{\partial P}{\partial y^1} = -D i_1 - \frac{D'}{\cos \varphi} i_2 \\ v_2 = \frac{\partial P}{\partial y^2} = -D' i_1 - \frac{D' \cos \varphi}{\cos \varphi} i_2 \\ v_3 = \frac{\partial P}{\partial y^3} = -H_1 i_1 - H_2 i_2 - \frac{1}{g} i_3 \end{cases}$$

e quelli controvarianti $v^r = \text{grad } y^r$ da

$$(2) \quad \begin{cases} v^1 = -\frac{D''}{\Delta} i_1 + \frac{D' \cos \varphi}{\Delta} i_2 + \frac{g h \cos \varphi}{\Delta} i_3 \\ v^2 = \frac{D'}{\Delta} i_1 - \frac{D \cos \varphi}{\Delta} i_2 + \frac{g k \cos \varphi}{\Delta} i_3 \\ v^3 = \dots \dots \dots -g i_3 \end{cases}$$

in cui D, D' e D'' sono al solito i coefficienti della seconda forma della superficie equipotenziale per P, riferita alle variabili φ e λ , $\Delta = DD'' - D'^2$, g il modulo della gravità, $h = (D'' H_1) / (\cos \varphi) - D' H_2$, e $k = DH_2 - (D' H_1) / (\cos \varphi)$, come H_1 ed H_2 , sono dei coefficienti legati al gradiente gravimetrico, i_3 è versore sulla normale esterna alla superficie equipotenziale, i_1 versore tangenziale rivolto al nord astronomico, i_2 infine forma con i_1 ed i_3 una terna unitaria ortogonale destrorsa.

(2) A. MARUSSI, *Fondements de géométrie différentielle absolue du champ potentiel terrestre.* « Bulletin Géoésique de l'Association Internationale de Géodésie », Paris, n. 14, décembre 1949.

Nella Nota citata si sono date inoltre le espressioni dei simboli di Christoffel di seconda specie Γ_{ij}^r , che servono a connettere una terna metrica con quella infinitamente prossima.

3. Ciò premesso, consideriamo due punti P_0 e P dello spazio, ed il vettore $P - P_0 = \mathbf{t}s$ che li unisce, in cui \mathbf{t} è dunque vettore unitario. Sarà in P_0

$$(3) \quad \mathbf{t} = \mathbf{i}_1 \sin z \cos \alpha + \mathbf{i}_2 \sin z \sin \alpha + \mathbf{i}_3 \cos z$$

sottintendendo che tutti gli elementi sia scalari che vettoriali si riferiscono al punto P_0 ; α e z sono dunque, come di consueto, l'azimut del piano verticale per P , e la distanza zenitale.

Si ha ora subito

$$(4) \quad \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{P}}{ds} = \mathbf{v}_i \frac{dy^i}{ds} = \mathbf{v}_i \lambda^i; \quad \lambda^i = \mathbf{t} \times \mathbf{v}^i = \frac{dy^i}{ds};$$

da cui si vede che le λ^i sono le componenti controvarianti di \mathbf{t} e sono date, esplicitando anche i valori di h e k , dalle

$$(5) \quad \begin{cases} \lambda^1 = -\frac{D''}{\Delta} \sin z \cos \alpha + \frac{D'}{\Delta} \cos \varphi \sin z \sin \alpha + \frac{1}{\Delta} \left(D' \frac{\partial \lg g}{\partial \lambda} - D'' \frac{\partial \lg g}{\partial \varphi} \right) \cos z \\ \lambda^2 = \frac{D'}{\Delta} \sin z \cos \alpha - \frac{D}{\Delta} \cos \varphi \sin z \sin \alpha + \frac{1}{\Delta} \left(D' \frac{\partial \lg g}{\partial \varphi} - D \frac{\partial \lg g}{\partial \lambda} \right) \cos z \\ \lambda^3 = -g \cos z. \end{cases}$$

Dopo ciò avremo, sviluppando in serie di Taylor

$$(6) \quad y^r = y_{(0)}^r + s \left(\frac{dy^r}{ds} \right)_0 + \frac{s^2}{2!} \left(\frac{d^2 y^r}{ds^2} \right)_0 + \frac{s^3}{3!} \left(\frac{d^3 y^r}{ds^3} \right)_0 + \dots$$

in cui gli indici inferiori ricordano che i valori delle derivate si debbono calcolare nel punto P_0 .

Per effettuare tale calcolo, occorre fare ricorso alle equazioni delle geodetiche in coordinate generali; queste equazioni si scrivono, com'è ben noto, e con le consuete convenzioni del calcolo tensoriale,

$$(7) \quad \frac{d^2 y^r}{ds^2} = \frac{d\lambda^r}{ds} = -\Gamma_{ij}^r \lambda^i \lambda^j$$

in cui le sommatorie vanno ovviamente estese per i valori degli indici da 1 a 3.

Derivando ulteriormente si ha, con calcolo laborioso ma scevro di difficoltà,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^3 y^r}{ds^3} &= \frac{d^2 \lambda^r}{ds^2} = \left(2 \Gamma_{hi}^r \Gamma_{jk}^i - \frac{\partial \Gamma_{jk}^r}{\partial y^h} \right) \lambda^j \lambda^h \lambda^k; \\ \frac{d^4 y^r}{ds^4} &= \frac{d^3 \lambda^r}{ds^3} = \left(2 \Gamma_{li}^r \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial y^l} + 4 \Gamma_{jh}^i \frac{\partial \Gamma_{il}^r}{\partial y^h} + \Gamma_{jh}^i \frac{\partial \Gamma_{kl}^r}{\partial y^i} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 \Gamma_{jk}^r}{\partial y^k \partial y^j} - 4 \Gamma_{li}^r \Gamma_{ks}^i \Gamma_{jh}^s - 2 \Gamma_{is}^r \Gamma_{hk}^i \Gamma_{jl}^s \right) \lambda^j \lambda^h \lambda^k \lambda^l. \end{aligned} \right.$$

Sostituendo infine i valori trovati per le λ^r e loro derivate, particolarizzati per il punto P_0 , negli sviluppi di Taylor, si ottengono le formule cercate, che risolvono la prima parte del problema, e cioè quella del trasporto delle coordinate geografiche e della quota dinamica.

4. Per quanto ha riguardo al trasporto dell'azimut e della distanza zenitale, si possono stabilire gli analoghi sviluppi in serie

$$(9) \quad \lambda^r = \lambda_{(0)}^r + s \left(\frac{d\lambda^r}{ds} \right)_0 + \frac{s^2}{2!} \left(\frac{d^2 \lambda^r}{ds^2} \right)_0 + \frac{s^3}{3!} \left(\frac{d^3 \lambda^r}{ds^3} \right)_0 + \dots$$

in cui i valori delle derivate sono gli stessi già usati in precedenza, e figurano soltanto moltiplicati per una differente potenza dell'arco s . Noti i valori delle λ^r in P mediante le formule scritte or ora, il calcolo dell'azimut α e della distanza zenitale z reciproci è immediato; si ha infatti subito, dalle (1), (3) e (4)

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{D' \lambda^1 + D' \lambda^2 + \lambda^3 (\partial/\partial \lambda) (1/g)}{D \lambda^1 + D' \lambda^2 + \lambda^3 (\partial/\partial \varphi) (1/g)} \\ \cos z = -\frac{1}{g} \lambda^3 \end{array} \right.$$

tenuto conto che $H_1 = (\partial/\partial \varphi) (1/g)$ ed $H_2 = (1/\cos \varphi) (\partial/\partial \lambda) (1/g)$, e dove ovviamente tutti i valori si intendono calcolati per il punto P .

Si osserverà ancora come negli sviluppi svolti non intervenga più la distinzione fra azimut della geodetica ed azimut del piano normale, distinzione della quale è necessario tenere invece conto per ridurre gli azimut osservati a quelli da introdurre in calcolo nell'ordinario trasporto superficiale delle coordinate geografiche; in quanto qui la geodetica è essa stessa contenuta nei piani verticali reciproci che si sono considerati.

Fisica matematica. — *Realtà fisica di una varietà di Fermat pseudosferica*. Nota di GIULIANO TORALDO DI FRANCIA, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

§ 1. — Le relazioni fra le geometrie non euclidee e l'ottica geometrica sono state negli ultimi tempi oggetto di rinnovato interesse (1).

(*) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) In una conferenza, tenuta presso il Seminario Matematico e Fisico di Milano nel dicembre del 1948, il prof. Signorini fece rilevare, fra l'altro, che l'occhio di pesce del Maxwell non è che una varietà di Fermat a curvatura costante positiva. Indipendentemente, la stessa cosa veniva mostrata dall'autore della presente Nota, in una conferenza presso il Seminario Matematico-Fisico ed Astrofisico di Firenze nel gennaio del 1949, allo scopo di far conseguire le proprietà focalizzatrici dell'occhio di pesce dal noto comportamento delle geodetiche dello spazio ellittico. Si deve poi al dott. Dalla Volta (a) e al prof. Segre (b) (che presero lo spunto dagli studi, allora inediti, del prof. Signorini) un notevole gruppo di teoremi, che illuminano alcuni aspetti geometrici della questione. Varie eleganti considerazioni cinematiche sull'evoluzione delle superficie d'onda, esposte dal prof. Signorini presso il detto Seminario di Firenze nel marzo del 1950, hanno spinto l'autore ad occuparsi nuovamente dell'argomento. Soltanto dopo aver licenziato il presente lavoro, l'autore ha potuto conoscere il testo della prima conferenza del prof. Signorini (c).

(a) V. DALLA VOLTA, *Una questione di geometria riemanniana connessa a un problema di ottica geometrica*. « Rend. Acc. Naz. Linc. », 6, 64 (1949).

(b) B. SEGRE, *Geometria non euclidea e ottica geometrica*. « Rend. Acc. Naz. Linc. », 7, 16 (1949).

(c) A. SIGNORINI, *Qualche teorema di ottica geometrica*. « Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano », vol. XX (1949).

Il punto di partenza è il principio di Fermat. Si abbia nello spazio euclideo S_3 un mezzo trasparente (che, per semplicità, supporremo isotropo), caratterizzato da una distribuzione continua dell'indice di rifrazione $n(P)$ e consideriamo la varietà di Fermat V_3 corrispondente, definita mediante il suo elemento d'arco $ds_F = n ds$. La V_3 è una varietà riemanniana, rappresentata conformemente su S_3 . Il principio di Fermat richiede che in questa rappresentazione i raggi luminosi di S_3 corrispondano alle geodetiche di V_3 . Pertanto l'ottica geometrica dei mezzi continui coincide con lo studio delle geodetiche degli spazi riemanniani rappresentabili conformemente sullo spazio euclideo.

Un'altra circostanza che non sembra abbia ancora ricevuto la considerazione che merita, dimostra poi che le varietà di Fermat hanno veramente un significato fisico profondo. Si tratta del fatto che nella propagazione di un'onda elettromagnetica il vettore elettrico e il vettore magnetico si trasportano lungo la geodetica della varietà di Fermat, rimanendo paralleli a se stessi nel senso di Levi-Civita⁽²⁾.

Particolare interesse presentano le varietà riemanniane a curvatura costante. Nell' S_3 rappresentativo i raggi sono in questo caso circonferenze e l'irraggiamento da una sorgente puntiforme avviene per onde sferiche⁽³⁾. L'occhio di pesce di Maxwell⁽³⁾ corrisponde ad uno spazio a curvatura costante positiva e tutti i raggi uscenti da un punto s'incontrano in un altro punto⁽⁴⁾. Tutti gli altri mezzi che godono di questa proprietà si ottengono rappresentando conformemente l' S_3 su se stesso e, a causa del teorema di Liouville⁽⁵⁾, si vedrebbe che ciò non porta nulla di nuovo.

Si potrebbe pensare che gli spazi a curvatura costante negativa presentassero un minore interesse fisico. Invece, come vedremo, ne esiste in natura un notevole esempio, allo studio del quale si applicano utilmente i concetti della geometria non euclidea. Anziché nell'ottica, questo esempio si presenta nell'acustica sottomarina.

§ 2. - La propagazione delle onde sonore nel mare, in corrispondenza delle zone in cui la profondità è molto notevole, presenta una curiosa particolarità. L'attenuazione lungo una linea vicina alla superficie è molto più piccola di quanto ci si potrebbe aspettare⁽⁶⁾. Per darne una spiegazione, Brechowskij osserva che, mentre per i primi cento o duecento metri di profondità il gradiente di velocità dipende soprattutto da quello della temperatura, al di sotto di quella quota non vi è che l'influenza della pressione idrostatica, che dà luogo ad un gradiente costante, di circa 1.8 m/sec. per ogni 100 metri. Allora tutti i raggi acustici, che

(2) R. K. LUNEBERG, *Mathematical Theory of Optics*. (Providence 1944), p. 57 e sgg. L'autore del presente articolo, desideroso di conoscere con esattezza a chi debba attribuirsi questa bella proposizione, ha interpellato in proposito, per via epistolare, il prof. Luneberg, il quale ha cortesemente risposto che non gli è noto alcun precedente alla dimostrazione data nel suo libro, per quanto non si senta di affermarne la priorità con assoluta certezza.

(3) J. C. MAXWELL, *Solution of Problems*. «Scient. Pap.», vol. I, p. 74.

(4) Questo si può dimostrare con un metodo semplicissimo, dovuto al prof. Signorini^(c), senza fare appello a nozioni di geometria non euclidea.

(5) L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. II (Bologna 1930), p. 466.

(6) L. M. BRECHOWSKIJ, *Sulla propagazione del suono in uno strato liquido con gradiente di velocità costante*. «Dokl. Akad. Nauk SSSR», 62, 469 (1948).

tendono a disperdersi negli strati profondi, subiscono un fenomeno analogo al miraggio, incurvandosi lungo circonferenze e tornando alla superficie.

Costruiamo la varietà di Fermat corrispondente a questo caso, trascurando per il momento lo strato superficiale influenzato dalle variazioni di temperatura. Siano x_1, x_2, x_3 tre assi ortogonali, di cui i primi due paralleli alla superficie del mare (supposta piana) e il terzo orientato verso il basso. L'origine si trovi all'altezza $h = v_0/a$, essendo v_0 la velocità del suono nel mare in corrispondenza della superficie e a il gradiente di velocità già menzionato. Allora la velocità di propagazione assumerà la forma $v = ax_3$ e l'indice di rifrazione relativo sarà $n = v_0/v = h/x_3$. Per la varietà di Fermat avremo dunque

$$(I) \quad ds_F^2 = \hbar^2 \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2}.$$

È questa la forma tipica data da Beltrami per il ds^2 dello spazio pseudosferico di raggio h (cfr. Bianchi loc. cit., p. 435), rappresentato conformemente sul semispazio euclideo.

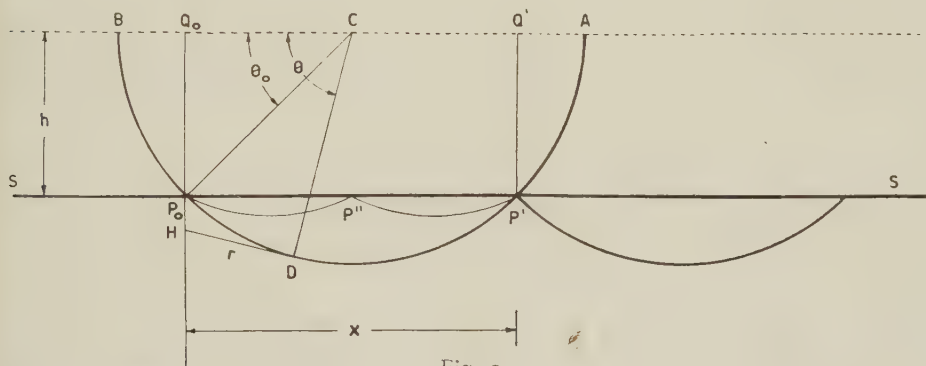


Fig. 1.

Sia SS la superficie del mare (fig. 1). Il piano limite $x_3 = 0$ si troverà all'altezza h . Un raggio sonoro uscente da P_0 tornerà alla superficie in P' , avendo percorso una circonferenza col centro sul piano limite. In P' avverrà una riflessione e il raggio descriverà una seconda campata identica alla prima, e così via.

Interessa conoscere il cammino ottico $P_0 DP'$. Esso coincide con la distanza geodetica δ nella varietà di Fermat e si trova immediatamente per mezzo della rappresentazione geodetica di Beltrami sul piano limite (cfr. Bianchi, loc. cit., p. 492). Osserviamo per questo che la sfera di centro C , su cui giace la circonferenza $AP' P_0 B$ è l'immagine di una V_2 pseudosferica dello stesso raggio della V_3 che la contiene (cfr. Bianchi, loc. cit., p. 488) e che pertanto la distanza geodetica $P_0 DP'$ è data da $h/2$ volte il logaritmo del birapporto $(Q_0 Q' AB)$. Allora, chiamando x la distanza orizzontale $P_0 P'$, si ottiene con facile considerazione per la distanza geodetica l'espressione

$$(2) \quad \delta(x) = h \log \frac{\sqrt{4h^2 + x^2} + x}{\sqrt{4h^2 + x^2} - x}.$$

Per x molto piccola, risulta $\delta(x) = x$, ma altrimenti si ha sempre $\delta(x) < x$. Anzi, si trova che $\delta(x) < N \delta(x/N)$ con N intero. Ciò dimostra che il raggio diretto $P_0 DP'$ percorre un cammino più breve di quelli che, come $P_0 P'' P'$, arrivano dopo una o più riflessioni. Pertanto alla superficie si noterà un fronte d'onda (limite della zona raggiunta dal suono) che si sposta con la velocità di P' . Questa velocità è $v_x = dx/dt$, con $dt = d\delta/v_0$. Utilizzando la (2) si trova allora

$$(3) \quad v_x = v_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2h}\right)^2}$$

donde il curioso fatto che il fronte d'onda ha velocità supersonora⁽⁷⁾. Tale velocità tenderebbe addirittura all'infinito insieme con la x , se il mare fosse infinitamente profondo e la semplice legge del gradiente costante avesse validità illimitata.

§ 3. - Calcoliamo ora l'intensità sonora del fronte d'onda superficiale, prescindendo dall'assorbimento. Cominciamo col ricordare che⁽⁸⁾, se $L(P) = v_0 t$ è l'equazione temporale di una superficie d'onda (nell' S , fisico), nell'ambito dell'ottica geometrica si ha

$$(4) \quad \text{grad } L = n \mathbf{s}$$

essendo \mathbf{s} il versore del raggio. Inoltre per l'ampiezza A vale l'equazione

$$(5) \quad 2 \text{ grad } A \cdot \text{grad } L + A \text{ div grad } L = 0.$$

Sostituendo la (4) nella (5) si giunge facilmente a scrivere

$$(6) \quad \frac{d}{ds} \log(nA^2) = -\text{div } \mathbf{s}.$$

Ma $\text{div } \mathbf{s}$ è la curvatura media della superficie d'onda⁽⁹⁾. Approfittiamo allora del fatto, messo in evidenza da Signorini⁽⁴⁾, che le superficie d'onda sono sfere, così che la loro curvatura media è $2/r$. Per trovare il raggio r , si consideri ancora la fig. 1. È evidente per ragioni di simmetria che, quando la superficie d'onda è giunta in D , il suo centro si trova in H . Posto $CP_0 = R$, $\widehat{BCP}_0 = \theta_0$, $\widehat{BCD} = \theta$, si trova facilmente per il raggio HD

$$r = R \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Essendo poi $ds = R d\theta$, la (6) fornisce

$$(7) \quad \log(nA^2) = -2 \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \theta d\theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta}.$$

Come limite superiore d'integrazione dovremo prendere $\pi - \theta_0$ (che corrisponde a P'). Quanto al limite inferiore, non potremo prenderlo eguale a θ_0 (che corri-

(7) Alla stessa conclusione era giunto indipendentemente il prof. Signorini per altra via (da una comunicazione personale).

(8) E. PERSICO, *Introduzione alla fisica matematica* (Bologna 1941), p. 294 e sgg.

(9) P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, *Analisi vettoriale generale*, vol II, (Bologna 1930) p. 39.

sponde a P_0), perchè l'integrale sarebbe divergente. È la tipica divergenza, che si riscontra naturalmente in tutti i casi analoghi riguardanti sorgenti puntiformi. Prenderemo allora il limite inferiore in corrispondenza di una piccola distanza s_0 da P_0 , eguale per tutti i raggi. Ciò corrisponde ad ammettere che a tale distanza l'ampiezza sia ancora eguale per tutti i raggi. Per l'anomalia θ il limite inferiore risulterà quindi eguale a $\theta_0 + s_0/R$.

Eseguendo l'integrazione (7) fra i limiti fissati e ricordando che alla superficie è $n = 1$, si ottiene, a meno di un coefficiente costante, che non interessa

$$A^2 = \left[\frac{\cos \theta_0 - \cos (\theta_0 + s_0/R)}{\cos \theta_0} \right]^2.$$

Utilizzando poi il fatto che s_0 è molto piccolo rispetto a R e ricavando θ_0 e R dalla considerazione della fig. 1, si ottiene infine, sempre a meno di un coefficiente costante

$$(8) \quad A^2 = \frac{1}{x^2 [1 + (x/2\lambda)^2]}.$$

Si vede dunque che, quando la distanza x è piccola, l'intensità del fronte d'onda superficiale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, come quella di un'ordinaria onda sferica; ma quando x è grande, l'attenuazione procede con la quarta potenza di x ed è quindi rapidissima⁽¹⁰⁾.

§ 4. — Se si tiene conto anche dello strato superficiale influenzato dalla temperatura, si viene a generare una vera e propria guida d'onda^{(11), (12)}. Il suono si propaga passando alternativamente dallo strato superiore a quello inferiore e viceversa. Non rientra nello scopo del presente lavoro occuparsi dettagliatamente di questo fenomeno. Ci limitiamo a notare che lo studio quantitativo deve avere come punto di partenza la (2) e la (8), dalle quali si può calcolare il coefficiente di riflessione (in ampiezza e fase) dello strato inferiore. Infatti soltanto per mezzo di tale coefficiente si può sottoporre a calcolo l'interferenza del raggio diretto con quelli riflessi più volte.

È interessante osservare come già Brechowskii⁽⁶⁾ abbia paragonato il fenomeno studiato con quello delle « gallerie sussurranti » di Lord Rayleigh⁽¹³⁾. La concentrazione dell'energia sonora presso la parete è dovuta al fatto che la parete è curva, mentre i raggi sono rettilinei. Nel nostro caso invece la superficie SS è piana e i raggi sono curvi. Ma noi siamo in grado di rendere ancora più stretta l'analogia, trasportandoci dall' S_3 fisico allo spazio di Fermat. Infatti la

(10) Non si confonda questa attenuazione del fronte d'onda con l'attenuazione dell'energia superficiale in regime stazionario, che, come abbiamo detto, è minore di quella delle onde sferiche normali, a causa della sovrapposizione del raggio diretto con quelli riflessi più volte.

(11) H. BREMMER, *On the Theory of Spherically Symmetric Inhomogeneous Wave Guides in Connection with Tropospheric Radio Propagation and Under-Water Acoustic Propagation*. « Philips Res. Rep. », 3, 102 (1948).

(12) L. M. BRECHOWSKII, *Su un nuovo metodo per risolvere il problema della sorgente puntiforme in un mezzo stratificato*. « Dokl. Akad. Nauk SSSR », 13, 409 (1949).

(13) LORD RAYLEIGH, *Theory of Sound*, vol. II (London, 1896) p. 126 e sgg.

superficie SS costituisce una V_2 di curvatura assoluta costante e eguale a zero (perchè l'indice di rifrazione è costante su di essa). Ma la sua curvatura relativa, rispetto allo spazio di Fermat, si ottiene facendo la differenza fra la sua curvatura assoluta e la curvatura della V_3 di Fermat (cfr. Bianchi, loc. cit., p. 464). Si ottiene così un raggio di curvatura positivo, eguale ad h . In altre parole, un osservatore che vivesse, per così dire, nella V_3 di Fermat, vedrebbe la superficie del mare curva positivamente con raggio h , precisamente come la parete di una galleria sussurrante.

Chimica. — *Ricerche strutturali sul Nichelmolibdato d'ammonio* (*). Nota di ALFONSO M. LIQUORI e FLORIANA BERTINOTTI, presentata (**) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

Zambonini e Caglioti⁽¹⁾ nel corso di una ricerca effettuata sul manganimolibdato d'ammonio e composti analoghi, hanno riscontrato cristallograficamente isomorfismo fra il manganimolibdato d'ammonio e il nichelmolibdato d'ammonio. Poichè con una recente Nota⁽²⁾ è stata chiarita in modo definitivo la composizione chimica del manganimolibdato d'ammonio cui si è attribuita la formula $3(\text{NH}_4)_2\text{O} \cdot \text{MnO}_2 \cdot 9\text{MoO}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ ed è stata determinata la configurazione spaziale degli atomi a più alto numero atomico presenti nel complesso, abbiamo ritenuto interessante effettuare un'analogia ricerca strutturistica sul nichelmolibdato d'ammonio. Da quanto ci risulta è questo l'unico composto ben caratterizzato in cui si può riscontrare la tetravalenza del nichel.

Il composto è stato preparato secondo Hall⁽³⁾ e ricristallizzato varie volte dalla soluzione acquosa. I cristalli di color nero porpora presentano un tipico abito romboedrico.

I fotogrammi a cristallo singolo effettuati intorno allo spigolo del romboedro danno risultati sensibilmente coincidenti con i dati ottenuti per il manganimolibdato. La densità determinata con il metodo picnometrico è 3,111. Dal volume della cella elementare e dal peso molecolare corrispondente alla formula $3(\text{NH}_4)_2\text{O} \cdot \text{NiO}_2 \cdot 9\text{MoO}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ si calcola un valore teorico della densità di 3,082. Il gruppo spaziale è D_{3d}^5 — $R\bar{3}m$.

Le intensità dei riflessi registrati sul fotogramma Weissenberg coincidono, nell'ambito degli errori di apprezzamento, con quelle del manganimolibdato d'ammonio. Esiste infatti una leggerissima differenza fra il fattore di struttura atomico del nichel e del manganese tetravalenti, che per $\sin \theta/\lambda \rightarrow 0$ sono nel rapporto

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Roma, Centro di Chimica Generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) ZAMBONINI e CAGLIOTI, «Gazz. Chim. Ital.», 59, 400 (1929).

(2) CAGLIOTI e LIQUORI, «Atti Acc. Naz. dei Lincei». Questo fascicolo p. 443.

(3) HALL, «J. Am. Chem. Soc.», 29, 699 (1907).

8/7. Inoltre si può trascurare la differenza nel « coefficiente di assorbimento per unità di massa » ⁽⁴⁾ di questi due elementi, data la bassa percentuale con cui questi valori contribuiscono all'assorbimento totale.

Si può quindi senz'altro concludere per un'identica distribuzione parziale degli atomi presenti nei due composti, e, ciò che è più importante, si può ammettere che i raggi del manganese e del nichel tetravalenti sono molto vicini. Questa circostanza è di un certo interesse al fine di stabilire la natura dei legami del nichel e del manganese tetravalenti in questi composti.

Istochimica vegetale (Strutture submicroscopiche). — *La struttura submicroscopica delle membrane suberificate di castagno.* Nota di ARTURO CERUTI, presentata ^(*) dal CORRISP. C. CAPPELLETTI.

Le membrane suberificate sono più note per i caratteri chimici che non per la loro struttura. Infatti i chimici (ved. lavori riassuntivi di Zetzsche, Frey-Wyssling ⁽¹⁾) hanno ottenuto dal sughero: proteine, emicellulose, cellulose, lignina, zuccheri, vanillina, cere, grassi, suberina, tannini, sostanze inorganiche. È evidente che solo alcune di queste sostanze hanno importanza nella struttura morfologica, e cioè: le proteine, le cellulose, le emicellulose, le cere e la suberina. È su queste che sono state dirette le ricerche, tralasciando però fin da principio le ricerche sulle emicellulose, perchè troppo labili di fronte ai trattamenti necessari per lo studio in merito.

Sono stati scelti giovani rami di castagno dell'età di un anno circa e sono state separate con gran cura le cortecce. Il materiale così ottenuto venne diviso in tre gruppi. Il primo (I) venne fissato in alcool, il secondo (II) portato in autoclave a 120° in acqua, il terzo (III) venne tenuto per confronto e per esami a concentrazioni osmotiche varie. I materiali del primo e del secondo gruppo vennero sottoposti ad un numero rilevante di colorazioni o di reazioni istochimiche direttamente o previo uno dei seguenti trattamenti: 1) immersione in piridina per 24 ore; 2) immersione in cloroformio più iodio per una settimana; 3) immersione in acido acetico più perossido di idrogeno per due settimane; 4) immersione in soluzione di bisolfito di potassio a 125° per tre ore; 5) immersione per 5', 10', 15', 30' minuti in glicerina a 400°, previa disidratazione passaggio in xilolo e allontanamento dell'aria in paraffina a 50° e nel vuoto spinto; 6) immersione per 5', 10', 15', 30', 60', in paraffina a 400° previo trattamento come in 5); 7) immersione in xilolo bollente a ricadere per 10 ore; 8) immersione in alcool metilico aggiunto di acido cloridrico a ricadere per 5', 10', 15', 30', 60', 180', 240'; 9) immersione in alcool etilico aggiunto del 2,5 % di idrossido di potassio a ricadere per 5', 10', 15', 30', 60', 180'. In tal modo si determinava la parziale

(4) *Internationale Tabellen z. Best. v. Kristall.*

(*) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) F. ZETZSCHE (1932), *Kork u. Cuticularsubstanzen*, *Handb. d. Pflanzen-Analyse*, III, 1. Wien; A. FREY WYSSLING (1948), *Submicroscopic Morphology of Protoplasm and its derivatives*. New York.

o completa distruzione di frazioni delle sostanze componenti la membrana suberificata per poter mettere in risalto i rimanenti costituenti, o indirettamente l'apporto dato alla struttura della membrana dal materiale asportato. Come si vede le azioni non sono state condotte troppo violentemente per non distruggere completamente le membrane, nel qual caso non si sarebbe più visto nulla, come avviene per trattamenti in soluzioni acquose bollenti di alcali forti.

In tal modo si è ottenuto una quantità enorme di preparati, che verranno descritti parzialmente nel lavoro definitivo. I preparati venivano esaminati al microscopio ordinario, al microscopio a fluorescenza, al microscopio polarizzatore con lamina di gesso di primo ordine. [Quando parliamo di otticamente positivo o negativo ci riferiamo sempre alla direzione tangenziale della membrana].

Nel sughero in esame si sono potuti distinguere sei strati che sono stati enumerati dall'interno all'esterno. Lo strato più interno (V), cioè quello che si trova a contatto con il fellogeno, è contraddistinto dall'avere: la presenza di nucleo e citoplasma, membrane suberificate, cere disposte normalmente alla membrana. Lo strato soprastante (IV) non presenta distinzione tra nucleo e citoplasma, la cavità cellulare è occupata da un materiale omogeneo, le membrane sono suberificate, con cere disposte come nello strato V. Lo strato III presenta membrane suberificate, ma quasi mai cere ordinate. Lo strato II è molto simile al III, però è costituito da elementi più piccoli, con membrane sempre prive di cere. Lo strato I presenta elementi ancora più piccoli, con membrane in parte cellulose non incrostate di suberina o scarsamente incrostate. È ancora stato contraddistinto con O la parte più superficiale in via di disgregazione.

La presenza delle cere si dimostra facilmente perchè gli strati V e IV sono otticamente negativi, ogni qualvolta il materiale non è trattato con i solventi delle cere. Il carattere ottico negativo sta a significare che le molecole delle cere sono disposte normalmente nelle membrane. Nello strato III si può dimostrare che le cere subiscono un disorientamento, perchè esse si mettono in evidenza solo quando dette membrane vengono rigonfiate, ad esempio, con l'acido acetico più perossido d'idrogeno. Negli strati II, I, O, non si trovano più cere. Esse quindi subiscono processi di ossidazione che le assimilano alle altre sostanze lipidiche delle membrane.

La suberina impregna tutte le membrane, essa è fluorescente in celeste negli strati interni, meno negli strati intermedi e scompare completamente in quelli più esterni. La fluorescenza scompare prima delle altre proprietà della suberina, quale la colorabilità col Sudan III. Quindi a carico della suberina avvengono modificazioni, passando da uno strato all'altro. E dimostrazioni di questo fatto, oltre quella data dalla diminuzione di fluorescenza, ne abbiamo diverse. Infatti negli strati III e II essa si lascia alterare dall'acido acetico più perossido d'idrogeno, dallo xilolo bollente, dall'alcool più idrossido di potassio bollente in 15 minuti, senza però distruggersi, sì che permette che la cellulosa manifesti la sua attività ottica. Negli strati ancora più esterni già naturalmente assistiamo al suo screpolamento, ed essendo tali strati assai facili a essere metilati e acetilati, significa che in essi la protezione data dalla suberina è fortemente diminuita. Quindi è chiaro che passando dagli strati interni V e IV agli esterni, la suberina subisce, per ossidazione atmosferica, diminuzione della sua polimerizzazione.

La cellulosa si trova in tutti gli strati. Essa costituisce il materiale che tiene unite fra loro le cellule del sughero. Nel tratto di passaggio tra strato V e il fellogeno, ove abbiamo a contatto cellulose suberificate e cellulose non suberificate, si ha un notevole indebolimento della membrana agli urti. Il fatto è comprensibile perchè abbiamo il passaggio da una struttura idrofila ad una idrofoba; quindi già fra loro vi è una ripulsione; e in tal modo, si genera una debolezza di unione. La cellulosa si trova sempre come membrana sottile mediana impregnata di proteine, di suberine, di cere, da cui la difficoltà di metterla in evidenza. Bisogna quindi liberarla dalle cere e dalla suberina per poterla mettere in evidenza al microscopio polarizzatore. Questa liberazione è molto difficile, perchè le sostanze che distruggono la suberina distruggono anche la cellulosa, e talora più rapidamente. La liberazione è stata possibile col trattamento in alcool più idrossido di potassio. Infatti il margine tra la distruzione della suberina e quello della cellulosa in tali condizioni è maggiore che non nelle soluzioni acquose. Allora compare la birifrangenza positiva propria della cellulosa. Si può anche stabilire che la cellulosa mantiene negli strati V-II la caratteristica disposizione parallela alla superficie della cellula, però negli strati più esterni essa si disorienta. Negli strati più esterni inoltre la cellulosa è ricca di ossi-gruppi, e perciò in tali strati si hanno le ossi-cellulose, come dimostrano le proprietà tintoriali. In tali strati inoltre essa è meno facilmente incrostata dalla suberina, perchè si lascia facilmente metilare e acetilare.

La proteina della membrana suberificata è dimostrabile con un trattamento prolungato in alcool più idrossido di potassio, il quale distrugge prima la suberina e lascia liberi o quasi liberi la proteina e la cellulosa. In momento opportuno è allora possibile dimostrare la presenza della proteina, che si colora intensamente con l'acido picrico del picrocarminio di Ranvier. Bisogna notare che l'acido picrico colora anche la suberina, ma tale colorazione della proteina avviene quando non vi è più presenza di suberina. Essa è molto resistente e per tale carattere la consideriamo una scleroproteina, non identificandola con nessuna delle scleroproteine conosciute, e neanche la assegnamo a tale gruppo per caratteri chimici, ma solo per caratteri fisici. Essa resiste a tutte le sostanze da noi in precedenza indicate e viene solo distrutta dagli alcali in soluzione acquosa e più lentamente in soluzione alcoolica, viene rigonfiata dall'acido acetico più perossido d'idrogeno. Questa proteina si differenzia come uno strato alla periferia del citoplasma dello strato V. Essa si accolla e forse compenetra la membrana cellulosica. Durante il suo differenziamento si carica di suberina e contemporaneamente o con un leggero ritardo di cere. La sua presenza è indispensabile perchè la suberina e le cere possano formare il complesso della membrana suberificata. Infatti la suberina negli strati interni è sempre fortemente polimerizzata e non ha gruppi idrofili liberi per unirsi alla cellulosa; essa deve quindi unirsi a gruppi idrofobi che sono offerti dalla proteina e dalle cere, ma la proteina è la sola che abbia anche contemporaneamente gruppi idrofili e quindi essa sola può unirsi direttamente alla cellulosa e così permettere la costruzione della membrana suberificata.

Quindi le membrane suberificate variano gradualmente e continuamente dallo strato V allo strato O. In essi la cellulosa ha i cristalliti disposti parallelamente

alla superficie cellulare, tranne in parte negli strati più esterni, ove vi è disordine, le cere invece sono disposte perpendicolarmente alle cellulose e la suberina e la scleroproteina hanno le molecole loro in posizione disordinata.

Gli esami in soluzione a pressione osmotica diversa ci hanno permesso di stabilire che fin dall'inizio della suberificazione la cellula si separa materialmente per tutto ciò che riguarda gli scambi acquosi dalle altre parti della corteccia. Essa viene ad essere un organismo separato, non può più ricevere materiali, e non può espellere materiali metabolici. Quindi anche il *deficit* di pressione di diffusione in tali cellule è praticamente zero, infatti esse non modificano il volume per nessun trattamento osmotico. Se osserviamo che il volume cellulare diminuisce rapidamente dallo strato V allo strato IV, non proporzionalmente alla maggiore circonferenza dello strato IV rispetto al V, è logico pensare che sia avvenuta una diminuzione di energia molare parziale libera per sintesi di materiali. Il che è anche dimostrato dal fatto che nelle manipolazioni istologiche è facile isolare il contenuto cellulare come un blocco solido. Perciò da una parte la grande capacità sintetica degli strati V e IV e dall'altra evidente contemporanea produzione di sostanze ossidate che impregnano i contenuti cellulari e danno caratteristiche reazioni con l'assunzione di coloranti basici. Però queste sostanze a gruppi acidi liberi non si trovano di regola nelle membrane.

La complessità del sughero si palesa quindi molto notevole. È complessità fisica, chimica e strutturale, che muta da strato a strato, e tali mutazioni sono dominate negli strati interni dal protoplasma e negli strati esterni dalle condizioni ambientali, mentre negli strati intermedi predomina la resistenza fisico-chimica della membrana suberificata.

Biologia. — *I processi della rigenerazione del midollo spinale delle larve di Anfibi Anuri nella sua relazione con la corda dorsale*^(*). Nota di ALBERTO STEFANELLI, presentata^(**) dal Socio G. COTRONEI.

Nello sviluppo di un piano di ricerche sui processi rigenerativi del midollo spinale dei Vertebrati ho preso in considerazione, coadiuvato da collaboratori (Thermes e Poddie), quanto avviene nelle larve degli Anfibi Anuri, in particolari condizioni sperimentali. In questo studio ho tenuto di mira non tanto il fenomeno generale, già noto e ampiamente illustrato da molti ricercatori (Barfurth, 1891; Nussbaum, 1895; Harrison, 1898; Morgan e Davis, 1908; Giardina, 1914; De No, 1921, ecc.), quanto l'intimo meccanismo istogenetico, con gli stessi criteri seguiti nelle ricerche sui tritoni adulti (Stefanelli, 1943; Stefanelli e Capriata, 1943; Stefanelli e Cervi, 1946, e nei Rettili ad opera di allievi: Marotta, 1946; Zannone, 1947). D'altra parte le relazioni tra la rigenerazione del midollo spinale e quella della corda dorsale, come risultano essenzialmente dalle ricerche

(*) Dall'Istituto di Zoologia della Università di Cagliari.

(**) Nella seduta del 15 aprile 1950.

di Morgan e Davis e da quelle di Giardina e di Comes (1928), con esperienze su larve di Anuri, mi hanno indotto, con particolari accorgimenti operativi, a chiarirne l'intima essenza.

Ho eseguiti tre gruppi di esperienze usando come materiale la *Rana esculenta* della campagna romana e l'*Hyla arborea savignyi* della Sardegna, allo stadio larvale con abbozzi incipienti degli arti posteriori⁽¹⁾.

Amputando la coda di larve di *Rana* a circa 3-4 mm dalla apertura anale (come nello schema *a* della figura) ho potuto osservare come, pur arrivando la corda dorsale alla superficie di taglio e rigenerando così che il midollo viene sempre a giacere sopra di questa, si abbia sempre una dilatazione terminale del midollo simile a quella messa in evidenza da Duesberg nei tritoni adulti e da me considerata in questi animali come il meccanismo morfogenetico con cui si attua la rigenerazione del midollo. Nelle larve di *Rana* l'«ampolla terminale» si forma per attiva migrazione di elementi provenienti dallo strato ependimale che acquistano attività ameboidea. Le pareti dell'ampolla sono sottili e monostratificate e non è da escludere, e la forma della struttura ne sarebbe un indice, che intervenga una pressione del liquido interno. L'allungamento del midollo rigenerato avviene per la concomitante attività cariocinetica che si manifesta all'apice e lungo le pareti laterali dell'ampolla e la migrazione ameboidea. In tutte le esperienze di questo gruppo la formazione dell'ampolla è costante pur venendo questa sempre a giacere sulla parte cordale rigenerata.

Questa constatazione che interessa quelle conclusioni a cui era giunto Giardina (1914) circa il valore dell'assenza della corda nella formazione di dilatazioni ventricolari all'estremità caudale recisa del midollo, in parte sperimentalmente asportata, rendeva necessaria una ulteriore estensione delle ricerche allo scopo di chiarire la questione.

In un gruppo di larve di *Hyla* è stato asportato un segmento di midollo spinale di circa 2-4 mm, con la corrispondente parte dorsale della muscolatura e della pinna. Ho così potuto constatare come anche in questi casi, pur rimanendo indenne la corda, si venga a formare alla estremità recisa una ampia ampolla terminale come nel caso precedente di amputazione totale della coda. Ma è risultato altresì che una ampolla, sebbene di più modeste dimensioni, si forma anche all'estremità recisa del moncone caudale, dimostrando così anche per questa parte isolata del midollo spinale una attività rigenerativa. Considerando il processo rigenerativo sin dai primi stadi si osserva che, come nei tritoni adulti, la prima attività (dopo 4 ore circa) si manifesta a carico delle fibre discendenti che dal moncone cefalico proliferano con i caratteristici rigonfiamenti terminali; l'accrescimento di fibre è invece di assai scarsa entità a carico del midollo caudale. Dopo circa otto ore si inizia la proliferazione ameboidea di cellule che si mobilitano dallo strato ependimale e che vengono a portarsi anteriormente chiudendo l'apertura e costituendo l'ampolla; contemporaneamente si ha la distruzione delle fibre che erano proliferate in un primo tempo anche ad opera delle cellule

(1) Per la bibliografia vedi il lavoro in esteso, documentato, in «Rivista di Biologia» (in corso di stampa).

ameboidi che vengono a circondare le fibre già in via di distruzione. Le due ampole, quella rivolta caudalmente, della parte anteriore, e quella rivolta cranialmente, della parte codale, si accrescono l'una verso l'altra e dopo circa sei giorni

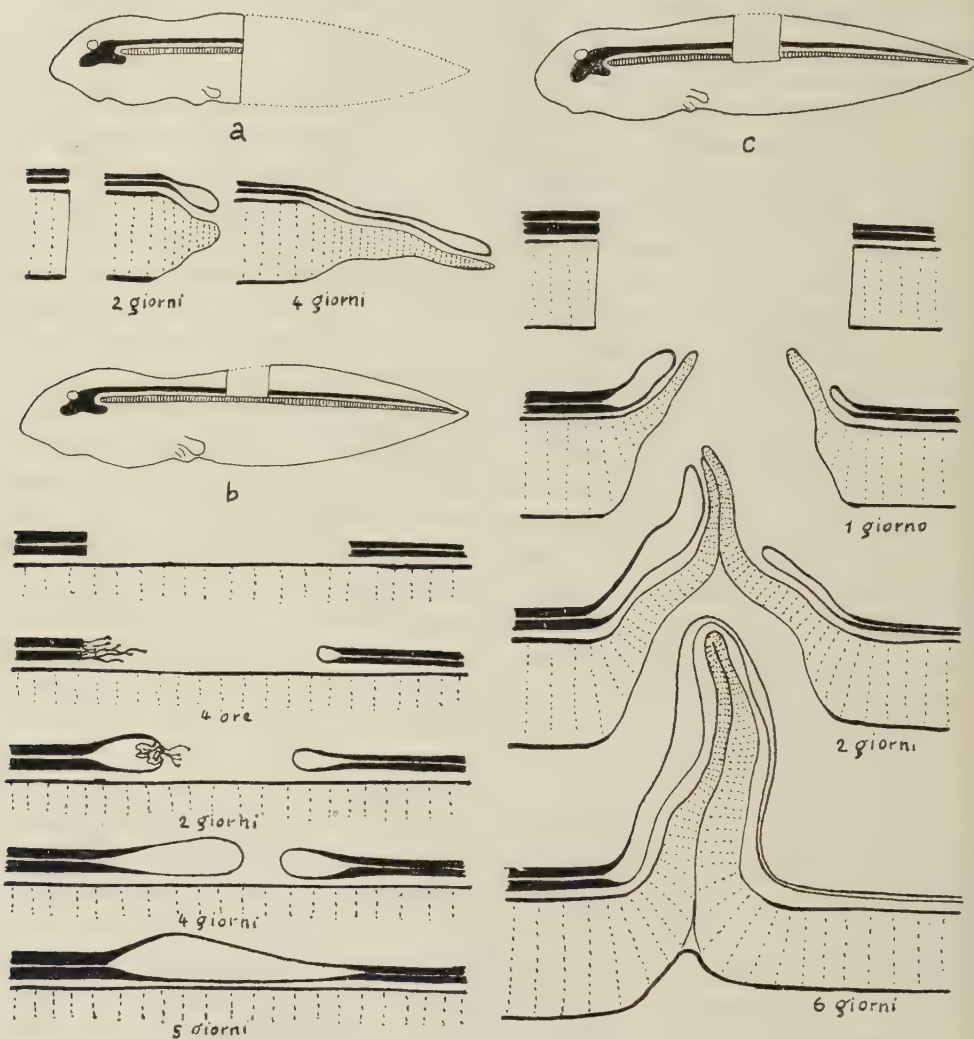


Fig. 1. - Schemi delle esperienze e dei risultati ottenuti.

a) Amputazione della coda in larve di *Rana*: notare l'ampolla apicale midollare giacente sul processo cordale in rigenerazione. b) Asportazione di un segmento midollare in larve di *Hyla*: notare la proliferazione di fibre e la loro successiva distruzione e la formazione delle due ampole apicali che si accrescono l'una verso l'altra. c) Asportazione di un segmento di midollo e di corda in larve di *Hyla*: notare la formazione di un processo cordale laterale provocato dalla difficoltà di fusione istologica del tessuto cordale, il lungo tragitto del midollo rigenerato, percorrente sempre la superficie morfologicamente dorsale dei processi cordali, e la riduzione in spessore del midollo codale. In nero il midollo spinale; punteggiata la corda dorsale.

vengono a contatto, si saldano, e si fondono così da ripristinare la continuità del lume ependimale che tuttavia rimane, nella regione rigenerata, molto più ampio del normale. Questo processo rigenerativo risulta molto simile a quello da me messo in evidenza, con *Cervi*, nel tritone adulto, in cui però non si

verifica una differenza molto grande di grandezza tra l'ampolla diretta caudalmente e quella diretta cranialmente.

La formazione delle dilatazioni alle estremità recise del midollo, pur essendo integra la corda dorsale, e le analoghe condizioni osservate nei Tritoni adulti e quelle dei Rettili (sauri) adulti, ci fanno considerare le ampolle terminali non come effetto della mancanza organoformativa della corda (Giardina), ma come il meccanismo morfogenetico che si attua nella rigenerazione del midollo spinale in quei Vertebrati in cui tale rigenerazione si manifesta, con un valore generale: l'attività ameboide degli elementi provenienti dallo strato ependimale (che quindi conservano una elevata potenzialità), la pressione del liquido endorachidiano e la moltiplicazione cellulare delle pareti ampollari sono i meccanismi di questo processo. Il concetto morfogenetico della corda conserva invece tutto il suo valore quale stimolo tigmotropico direttivo. La corda infatti, «guida» i due processi rigenerativi l'uno verso l'altro.

Ma assai più illustrative a questo riguardo sono risultate le esperienze del terzo gruppo, sempre eseguite su larve di *Hyla*.

In queste esperienze, in corrispondenza del segmento cordale asportato come nelle esperienze precedenti, è stato tolto un segmento della corda (schema *c* della figura).

Dopo circa 24 ore si osserva già in atto una attività rigenerativa ai due estremi recisi della corda con la formazione di due processi cordali, pressochè della stessa grandezza, diretti l'uno contro l'altro, ma fortemente inclinati verso la parte dorsale dell'animale, cioè nello spazio provocato dalla operazione con la asportazione del tassello di tessuti. Dopo due giorni le estremità dei processi cordali vengono a contatto, ma non si fondono, così che le estremità dei due processi continuano ad accrescersi, nei giorni successivi, l'una accanto all'altra strettamente unite, ma non istologicamente fuse. Dopo 6 giorni tale accrescimento è così notevole da creare l'impressione che si sia prodotta una ramificazione dorsale della corda, impressione che dopo 8-10 giorni diviene ancor più notevole per la fusione dei tessuti dei due processi cordali che tuttavia conservano una certa possibilità di distinzione. I due processi così fusi continuano ad accrescersi e l'apparente ramificazione non è in realtà che una piega della corda iperrigenerata in lunghezza le cui superfici ventrali si sono saldate insieme. Questo processo cordale induce la formazione di una iperrigenerazione della muscolatura e delle pinne così che viene morfologicamente a formare una nuova codina, provocando un tipico fenomeno di *cauda bifida*.

Mentre avvengono questi processi a carico della corda si attua anche la rigenerazione del midollo spinale.

In modo del tutto simile ai casi del gruppo precedente si formano le ampolle terminali all'estremità recise del midollo, con prevalente grandezza dell'ampolla della parte craniale. L'accrescimento delle ampolle e del midollo neoformato avviene lungo i processi cordali sopra descritti e così il momento di unione delle due ampolle è più tardivo e si verifica al sesto-settimo giorno. Pur dovendo il midollo rigenerato compiere un lungo percorso lungo la superficie morfologicamente dorsale dei processi cordali, l'unione si attua sempre all'apice dei due processi cordali saldati insieme.

Mentre si manifesta questa attività rigenerativa, il midollo caudale, isolato dal restante neurasse, midollo che aveva già raggiunto un notevole grado di differenziamento e morfologico ed istologico (ben differenziate appaiono le cellule dorsali di Rohon-Beard e le cellule motorie), subisce una graduale involuzione con distruzione degli elementi nervosi già differenziati così da ridursi, all'ottavo giorno, ad un sottile tubolino monostratificato di cellule a carattere endimiale. Rimangono invece le cellule dei gangli spinali. Questo fatto, di una involuzione di elementi nervosi differenziati, in uno stadio della vita larvale ancora ben lontano dalla metamorfosi in cui tale involuzione, con l'involuzione della coda, avviene fisiologicamente, sta a dimostrare la impossibilità di una autonomia funzionale del midollo caudale isolato, pur essendo provvisto di elementi differenziati. Ritengo che questo dato di fatto sia di un notevole interesse per i problemi che riguardano l'unità funzionale del neurasse, dimostrando, in questo stadio larvale, una mancanza di autonomia funzionale del midollo caudale isolato e a cui non arrivano più impulsi dai settori cefalici e in cui viene alterato il trofismo. La condizione delle cellule gangliari dimostra invece per esse una maggiore autonomia funzionale e trofica. La involuzione degli elementi differenziati del midollo riveste anche di una certa importanza per la interpretazione funzionale delle cellule di Rohon-Beard, considerate come elementi gangliari intraneurali.

Appare molto significativo il raffronto tra questo processo involutivo e quello osservato da miei allievi nella coda rigenerata dei Rettili sauri (Marotta, Zannone). In questi animali il midollo, che in un primo tempo rigenera pluristratificato ed è ricoperto da un mantello di fibre discendenti, si semplifica successivamente in un tubolino endimiale per la impossibilità funzionale causata dalla rigenerazione di un manicotto cartilagineo continuo che lo avvolge e ne impedisce i rapporti con la periferia; nelle larve degli Anuri è invece il midollo già differenziato che, in evidente inattività funzionale, si riduce a tubolino endimiale. Pur essendo quindi l'esito finale simile, il punto di partenza è ben diverso. Va rilevato che, pur così ridotto, il midollo caudale conserva in pieno le sue proprietà rigenerative; che la parte in rigenerazione si trovasse in una condizione indifferenziata (che d'altra parte è il presupposto della proliferazione stessa) era già noto da moltissime osservazioni, ma questo è un caso in cui si conservano solo gli elementi indifferenziati anche nella parte residua dell'organo che non è parte attiva nella rigenerazione.

Ma anche altre considerazioni degne di rilievo si deducono da questo tipo di esperienza. Innanzi tutto viene data la spiegazione della *cauda bifida*, per lo meno negli Anfibi: essa risulta infatti condizionata dalla difficoltà della saldatura istologica del tessuto cordale, difficoltà ben nota sin dalle vecchie ricerche del Born (1894-97); tale difficoltà provoca un eccessivo allungamento dei processi cordali che, pur a contatto, continuano ad accrescersi parallelamente. Tale difficoltà risulta evidente anche da casi di semplice rottura della corda provocati in alcune esperienze del gruppo precedente: in questi casi rimane nella corda una superficie articolare, ma, evidentemente, il completo contatto delle due superfici di frattura non desta alcuna attività rigenerativa, che si manifesta invece se tale contatto viene anche parzialmente a mancare.

Appare inoltre in grande evidenza il valore morfogenetico della corda (Giar-dina), sia nella induzione dei tessuti della nuova coda, sia come stimolo tigmo-tropico di orientamento dei processi midollari in accrescimento. Infatti il midollo spinale in rigenerazione, anzichè saldarsi passando per una via ben più breve di fianco ai processi cordali, segue un lungo cammino sempre guidato dalla parte dorsale dei processi cordali in rigenerazione.

Infine, il processo morfogenetico illustrato chiarisce la ragione che ha fatto supporre al Terni (1934) una rigenerazione eupolare del midollo, cioè dorsalmente alla corda, come di norma, ed una rigenerazione eteropolare, ventralmente alla corda, praticando in larve di *Amblystoma* una perforazione alla base della coda e provocando così, per l'interruzione degli organi assiali, la formazione di una coda bifida. Non si tratta infatti di due diversi midolli, uno dorsale ed uno ventrale in sede atipica, ma si tratta dello stesso midollo che si è riunito facendo un lungo giro, seguendo sempre la parte morfologicamente dorsale dei processi cordali che si sono uniti longitudinalmente a costituire un apparente diramazione della corda.

In conclusione, queste esperienze hanno dimostrato come la dilatazione che si viene a formare resecando il midollo spinale sia un processo morfogenetico della rigenerazione del midollo con carattere generale e che si manifesta in modo simile a quanto avviene negli Urodeli anche adulti e nei Sauri adulti (*Geko*, *Lucertola*). Questa «ampolla apicale» si forma sempre, anche se vi è sottostante la corda dorsale antica o un processo rigenerativo di questa. L'ampolla si forma per la migrazione ameboidea di elementi provenienti dallo strato ependimale del midollo residuo; il suo allungamento avviene per azione concomitante di una pressione del liquido endorachidiano, della moltiplicazione cellulare che si manifesta nelle sue pareti e del movimento attivo delle sue cellule.

La formazione ampollare è preceduta da una proliferazione di fibre provenienti dal midollo residuo, caratteristiche per le loro estremità a clava e a bottoncino; ma queste fibre successivamente si istolizzano e l'attività ameboidea e la formazione dell'ampolla intervengono in questa distruzione.

Dalle esperienze di asportazione di un segmento midollare lasciando integra la corda, risulta l'attività rigenerativa anche del midollo codale isolato con la formazione di una seconda ampolla, sebbene di più modeste dimensioni; le due ampolle che si accrescono l'una verso l'altra finiscono per fondersi e ricostituire la continuità midollare. A carico del midollo codale si osserva una atrofia limitata in questo caso al mantello di fibre provenienti dai settori più cefalici.

Nelle esperienze di asportazione di un segmento midollare e di un corrispondente segmento cordale si osserva come, per la difficoltà della fusione istologica dei due processi rigenerativi cordali, si venga a manifestare una iperrigenerazione di questi che si accrescono associati uno accanto all'altro così da creare una apparente diramazione della corda. Questi processi cordali inducono la formazione di tessuti che vengono a costituire una nuova codina. Rimane così dimostrato come la *cauda bifida* sia provocata da questa iperrigenerazione cordale dovuta alla difficoltà di saldatura istologica del tessuto cordoide.

Il tempo molto più lungo che occorre per la unione delle ampolle midollari, che anche in questo caso si formano e che, indotte dall'azione tigmotropica della corda, compiono un lungo percorso sino alla estremità dei due processi cordali uniti insieme, permette una completa involuzione degli elementi nervosi del midollo codale isolato già differenziati, tra cui le cellule dorsali di Rohon-Beard e le cellule motorie ventrali. Ciò è un chiaro indice della mancanza di autonomia funzionale e trofica del midollo codale isolato dal restante neurasse, nelle larve di Anuri. La conservazione degli elementi gangliari sta invece a dimostrare l'autonomia di questi neuroni così isolati.

Biologia. — *Osservazioni preliminari sugli acidi nucleici e sulla natura della « massa di Giardina » nell'oocite di « Dytiscus marginalis »* (*). Nota II di ENRICO URBANI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Nella precedente Nota ho comunicato alcuni risultati delle osservazioni da me eseguite sulla distribuzione degli acidi nucleici nell'oocite di Dytisco e sulla natura della *massa di Giardina*. In questa seconda Nota intendo, oltre che esporre ulteriori osservazioni che confermano ed estendono le mie precedenti, esaminare, sempre riferendomi alla localizzazione e al metabolismo degli acidi nucleici, un altro problema della oogenesi di questo Coleottero: i rapporti tra cellule nutritrici ed oocite.

I lavori di Vardè (1930) e di Bauer (1933) ⁽¹⁾ hanno mostrato che la massa di Giardina è Feulgen-positiva, costituita cioè di acido timonucleico; le mie osservazioni ⁽²⁾ hanno messo in evidenza come in questa massa cromatinica vi sia anche acido ribonucleico dando così la conferma a quanto è stato supposto da Cotronei (1949) ⁽³⁾ in relazione al problema dei determinanti germinali ed in rapporto alla morfologia chimica delle fasce vitellogene e dei nuclei vitellini da me studiati ⁽⁴⁾.

I miei risultati già esposti nella prima Nota e altre osservazioni ulteriormente eseguite mostrano come nella massa di Giardina alla fine della quarta mitosi differenziale e durante il periodo di disgregamento la colorazione con verde di metile e la reazione di Feulgen si indeboliscano mentre si rinforza la reazione dell'acido ribonucleico secondo Brachet. Contemporaneamente la concentrazione di acido ribonucleico ooplasmatico aumenta e tale aumento è più accentuato in corrispondenza del settore nucleare dove la massa di Giardina inizia la sua disgregazione (fig. 3).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 15 aprile 1950.

Nota. - Trovo su A. PORTA, *Fauna Coleopterorum Italica* 1923, come termine sistematico del Coleottero da me studiato: *Dytiscus marginalis* L. Da molti altri autori, specialmente dai citologi è usato il termine *Dytiscus marginalis* L.

(1) H. BAUER, « Zeitschr. für Zellf. », 18, 264 (1933).

(2) E. URBANI, « Rend. Acc. Lincei », 8, 153 (1950).

(3) G. COTRONEI, « Riv. di Biologia », 51, 387 (1949).

(4) E. URBANI, « Riv. di Biologia », 51, 331 (1949).

Ciò mi conferma nella convinzione che si verifichi la trasformazione di acido timonucleico in acido ribonucleico e che questo diffonda attraverso la membrana della vescicola germinativa nell'ooplasma, o che gli acidi nucleici della massa di Giardina intervengano con un meccanismo analogo a quello illustrato da Caspersson per altri materiali nella sintesi dei ribonucleoprotidi ooplasmatici.

Esistono in letteratura alcuni esempi che vorrebbero mostrare una trasformazione della eterocromatina nucleare in acido ribonucleico citoplasmatico (Pollister e Lavin 1940)⁽⁵⁾ (Painter 1945)⁽⁶⁾ (Montalenti e Allievi 1949)⁽⁷⁾, ma il caso del Ditisco è particolarmente dimostrativo perchè riguarda una massa di cromatina dalla morfologia ben definita, nettamente distinguibile dalla restante cromatina nucleare, la quale massa si disgrega e con concomitanza topografica e cronologica, alla sua disgregazione e alla sua scomparsa si accompagna un aumento di acido ribonucleico citoplasmatico. È noto anche il valore attribuito al nucleolo nei fenomeni del metabolismo degli acidi nucleici; ebbene nell'oocite di Ditisco manca un vero e proprio nucleolo e già Buchner (1911)⁽⁸⁾ aveva pensato, solamente da un punto di vista morfologico, che alla massa di Giardina dovesse essere attribuito il valore di « nucleoloide Substanz » simile alla sfera reticolata del nucleo di *Sagitta* dove pure manca il nucleolo. In conclusione i miei reperti morfologici e citochimici parlano in favore di una trasformazione degli acidi nucleici della massa di Giardina nell'acido ribonucleico ooplasmatico. È anche ammissibile, come ho già detto nella Nota precedente, una dipendenza dell'acido ribonucleico della vescicola germinativa dell'oocite in crescita dagli acidi nucleici della massa di Giardina del preoocite.

Ma nello studio topografico e metabolico degli acidi nucleici nella oogenesi del Ditisco c'è da prendere in considerazione anche un altro aspetto della questione che nel caso da me studiato si presenta con particolare evidenza: la presenza e l'attività funzionale delle cellule nutrici. ❧

Korschelt e altri ritengono che cellula uovo, cellule nutrici e cellule follicolari si originino nel Ditisco da elementi comuni nella camera terminale dell'ovario: la questione di come le cellule nutrici si differenziano dalla cellula uovo è risolta dal lavoro di Giardina (1901)⁽⁹⁾ confermato da Debaisieux (1909) e da Günthert (1910)⁽¹⁰⁾ oltre che per il *Dytiscus* anche per il *Colymbetes*. L'oocite e le quindici cellule nutrici che si originano dalle quattro mitosi differenziali rimangono uniti per peduncoli citoplasmatici a formare come una massa plasmodiale che prende il nome di *rosetta*. Come risulta anche dalle mie osservazioni i ponti protoplasmatici che uniscono le varie cellule tra di loro sono nelle giovani rosette molto ampi (figure 2, 3) e si riducono man mano che oocite e cellule nutrici si accrescono: con l'accrescimento degli elementi cellulari si vengono a determinare nel tubo ovarico condizioni spaziali per le quali solo poche cellule nutrici (di solito

(5) A. W. POLLISTER e R. LAVIN, « Anat. Rec. », 89, 557 (1940).

(6) Th. S. PAINTER, « Jovs. Exp. Zool. », 100, 523 (1945).

(7) G. MONTALENTI, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 25, 552 (1949).

(8) P. BUCHNER, « Arch. fur Zellf. », 6, 329 (1911).

(9) A. GIARDINA, « Intern. Monat. fur Anat. und Physiol. », 18 (1901).

(10) T. GÜNTHER, « Zool. Jahrb. Anatomie », 30, 301 (1910).

quattro) rimangono in diretta comunicazione con l'oocite. Le cellule nutritrici si dispongono tutte a un polo di questo e precisamente dalla parte che guarda verso la camera terminale dell'ovario: ciò si vede molto bene in una sezione longitudinale di ovaio ove le varie unità cellule nutritrici-oocite si susseguono l'una dopo l'altra in stadi progressivi di accrescimento (fig. 1). Ad un certo stadio di accrescimento nel nucleo delle cellule nutritrici si notano le tetradi come per una meiosi abortiva (Giardina, Günthert). Con la formazione delle tetradi le cellule nutritrici mostrerebbero perciò qualcosa che rivela la comune origine con la cellula germinale. Günthert (loc. cit.) ha dedicato un esteso lavoro allo studio morfologico dei rapporti tra cellule nutritrici ed oocite ed ha visto in *Colymbetes*, perchè a detta dell'A. in *Dytiscus* i fenomeni sono molto meno evidenti, che attraverso i ponti protoplasmatici che uniscono le cellule nutritrici all'uovo passano delle nubecole di sostanza nutritizia fatte da tanti minuscoli granellini. Secondo Günthert tutte e quindici le cellule nutritrici prendono parte ai processi di nutrizione dell'oocite, con il progredire dello sviluppo le comunicazioni divengono sempre più piccole e la corrente nutritizia più ridotta fino a che si interrompe ogni comunicazione: persa la continuità le cellule nutritrici cadono in degenerazione.

De Bruyne (cit. da Günthert) ha visto cellule nutritrici nell'ooplasma come se fagocitate, ma questo accade secondo Günthert solo in uova vecchie e in degenerazione ed anche io nei miei preparati di *Ditisco* non ho mai incontrato quadri del genere.

Nusbaum-Hilarowicz (1918)⁽¹¹⁾ ha fatto un lavoro simile a quello di Günthert e ritiene che la corrente nutritizia che va dalle cellule nutritrici all'oocite sia costituita da mitocondri e non da cromidi che Günthert avrebbe visto uscire dalla membrana nucleare delle cellule nutritrici.

Da questo accenno ad alcuni dati della letteratura risulta l'interesse di uno studio del comportamento degli acidi nucleici nei rapporti tra cellule nutritrici e oocite. Sono infatti noti i lavori di Montalenti e Allievi: Battaglia (1949)⁽¹²⁾, De Nicola (1948)⁽¹³⁾, Vitagliano (1948)⁽¹⁴⁾ che hanno mostrato che esistono in alcuni animali cellule o complessi cellulari che nella spermatogenesi secernono acido ribonucleico e lo mettono a disposizione delle cellule germinali durante il ciclo spermatogenetico. Montalenti (1948)⁽¹⁵⁾ ha poi emesso l'ipotesi che una abbondante fornitura di acido ribonucleico da parte di queste cellule agli spermatozoni possa essere responsabile dell'istaurarsi in questi ultimi dei processi di meiosi.

Si vede come il materiale da me studiato data la continuità tra cellule nutritrici e oocite si presti molto bene per uno studio della questione. La reazione di Feulgen è sempre positiva nel nucleo delle cellule nutritrici mentre nella vescicola germinativa diviene, dopo la scomparsa della massa di Giardina, negativa.

La reazione dell'acido ribonucleico è positiva in modo marcato nel citoplasma delle cellule nutritrici ma nel settore nel quale c'è continuità con l'ooplasma la

(11) J. NUSBAUM-HILAROWICZ, «Zeit. Wiss. Zool.», 117, 554 (1918).

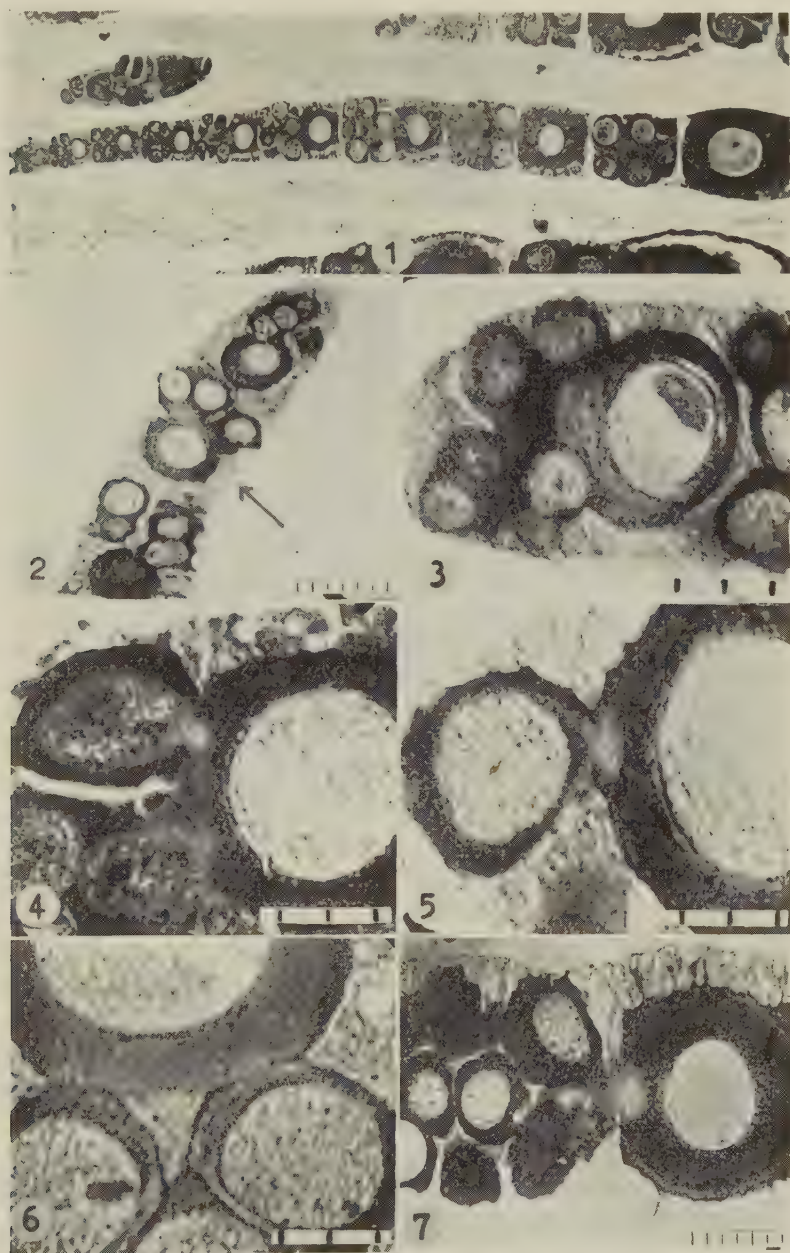
(12) B. BATTAGLIA, «Experientia», 5, 236 (1949).

(13) M. DE NICOLA, «Ricerca Scientifica», 18, 8 (1948).

(14) G. VITAGLIANO, «Ricerca Scientifica», 18, 7 (1948).

(15) G. MONTALENTI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», 8, 5 (1948).

basofilia è nettamente minore: nelle giovani rosette è molto evidente che nella zona nella quale il citoplasma delle cellule nutrici si continua con l'ooplasma vi è minore concentrazione di acido ribonucleico (figure 2, 3).



Rapporti tra cellule nutrici e oocite nel *Dytiscus marginalis*. Sezioni di 10 micron, colorazione con verde di metile-pironina ad eccezione della fig. 1 (colorazione con ematossilina, eosina). La scala riportata in basso a destra di ogni fotogramma ha il valore di 10 micron per unità. Spiegazione delle varie figure nel testo.

Anche negli oociti più accresciuti, nei canali di comunicazione si osserva lo stesso fenomeno, che cioè dove in accordo con Günthert e con Nusbaum-Hilarowicz dovrebbe esservi la corrente nutritizia, lì c'è minore concentrazione di acido ribonucleico (figure 4, 5, 7).

In certi preparati questo quadro è molto netto, in altri meno evidente (fig. 6), in ogni caso non ho mai osservato una concentrazione di acido ribonucleico più elevata nei canali di comunicazione tra cellule nutritrici ed oocite. Quando le cellule nutritrici vanno in disaggregazione si formano delle sferule fortemente basofile, ma non credo di poter dire se il loro acido ribonucleico venga utilizzato in qualche maniera dall'oocite come ritiene Battaglia (loc. cit.) in un caso somigliante da lui illustrato nella spermatogenesi degli Ortotteri dove elementi connettivali degenerano e producono acido ribonucleico.

Il reperto morfologico ottenuto con la colorazione con pironina e uso della ribonucleasi cristallizzata mostra perciò che nei canali di comunicazione tra cellule nutritrici e oocite non c'è maggior carico di acido ribonucleico che nel restante ooplasma, anzi nella generalità dei casi queste zone sono caratterizzate da una minore basofilia che può essere addirittura assente (fig. 7). Questo fenomeno può trovare una giustificazione se si vuole ritenere che la corrente nutritizia sia di natura mitocondriale come è stato asserito da Nusbaum-Hilarowicz e se si tengono presenti le osservazioni di Monné (1948)⁽¹⁶⁾ che ha dimostrato come i mitocondri, al contrario dei cromidi, non contengono notevoli quantità di acido ribonucleico.

Siccome (anche a giudizio degli AA. che si sono occupati della questione) indubbiamente esiste una diffusione di sostanze dalle cellule nutritrici all'oocite, in base ai miei dati, che ancora non sono stati completati con lo studio nell'ultravioletto, si deve ammettere che se acido ribonucleico passa dalle cellule nutritrici all'oocite, questo passaggio avviene in una forma chimica diversa da quella che può essere rivelata con l'impiego di coloranti basici e con l'uso della ribonucleasi, quindi con una modalità diversa da quella illustrata da Montalenti e Collaboratori su altri materiali nei fenomeni di spermatogenesi.

Concludendo: le mie osservazioni non vogliono escludere un apporto di acido ribonucleico all'oocite dalle cellule nutritrici o da altre fonti, ciò che può verificarsi nel caso del Ditisco nel periodo di grande accrescimento dell'oocite ma ribadiscono quanto ho detto nella precedente Nota. Almeno in un primo periodo a seguito della disaggregazione e della scomparsa della massa di Giardina tutto lascia ritenere che gli acidi nucleici di questo ammasso di cromatina si trasformino in acido ribonucleico o intervengano nella sintesi dei ribonucleoprotidi ooplasmatici.

(16) L. MONNÉ, « *Advances in Enzymology* », 8, 1 (1948).

Fisiologia. — *Ricerche sull'attività contrattile dei muscoli lisci intestinali.* — II. *Potenziamento dell'azione dell'acetilcolina per opera dell'ergotamina e dei sali di bario* (*). Nota di VIRGILIO MARTINI, presentata (**) dal Socio U. LOMBROSO.

Nelle ricerche esposte nella Nota precedente avevo constatato che un ortosimpaticolitico: il 933 F, potenziava nettamente l'azione dell'acetilcolina, sia su preparati di intestino isolato di cavia, cane, gatto, coniglio, sia su preparati di fibre muscolari isolate circolari e longitudinali.

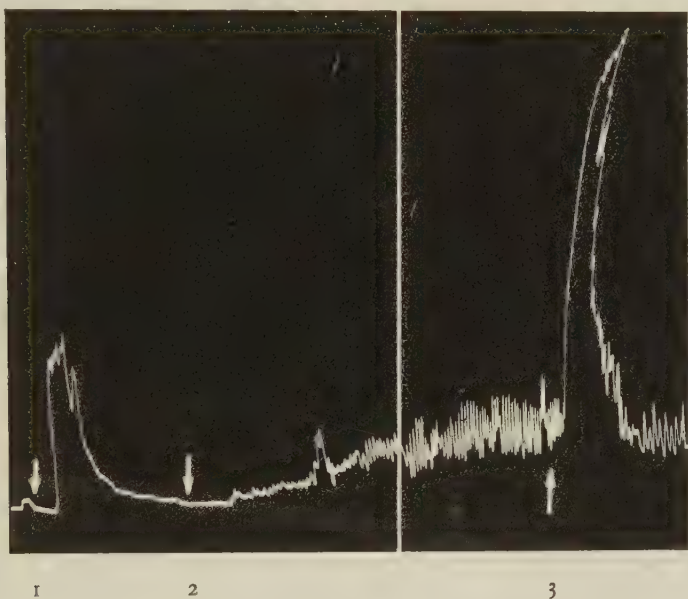


Fig. 1. — Intestino tenue di cane. Fibre «longitudinali».

- 1 = 0,5 γ acetilcolina
- 2 = 50 γ ergotamina tartrato
- 3 = 0,5 γ acetilcolina

Mi parve interessante estendere le ricerche provando un altro simpaticolitico; l'ergotamina, che, di fronte al 933 F, ha dimostrato un'azione del tutto differente, quando venga saggiato con altri reattivi biologici, ad esempio con la determinazione del metabolismo gassoso.

Con la tecnica descritta nella Nota precedente ho provato dapprima il Tartrato di Ergotamina (Sandoz) alla concentrazione di 1/400.000. Esso produce un aumento della motilità spontanea dell'intestino, lieve aumento del tono che persiste anche dopo prolungato lavaggio: l'aggiunta successiva di acetilcolina provoca una contrazione molto più elevata di quella notata prima del trattamento con ergotamina (fig. 1).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1950.

L'ergotamina quindi potenzia l'azione contratturante dell'acetilcolina sull'intestino isolato in modo analogo al 933 F. Le mie ricerche confermano le esperienze analoghe di Abdon⁽¹⁾ che portano a supporre un potenziamento della azione dell'acetilcolina per opera di alcuni reattivi biologici.

La dimostrazione che due simpaticolitici, il 933 F e l'ergotamina, potenziano nettamente l'azione dell'acetilcolina sulla muscolatura liscia intestinale, sia longitudinale che circolare, suggerisce l'ipotesi che tale potenziamento sia dovuto ad un blocco dei recettori del sistema ortosimpatico ed ad una conseguente maggiore attività del sistema parasimpatico.

Nella Nota precedente ho già accennato alle considerazioni per cui mi sembrava poco probabile questo meccanismo e, per studiare meglio il fenomeno, volli estendere le ricerche in due sensi: uno provando se il 933 F potenzia anche le contrazioni prodotte da sostanze agenti sulla muscolatura liscia direttamente (ossia senza l'intervento del sistema nervoso autonomo) e l'altro provando se il potenziamento si poteva ottenere anche con altre sostanze.

Provai dapprima l'azione dei sali di Bario su preparati di fibre longitudinali e circolari e su frammenti di anse intestinali di cavia, di gatto e di cane. Con tutti i preparati ottenni in genere contrazioni nette e rapide. Specialmente con preparati di fibre longitudinali l'attività contrattile è particolarmente evidente ed appare dimostrata da diverse contrazioni che si succedono irregolarmente. In confronto con le contrazioni da acetilcolina si nota che quelle da Bario si ottengono dopo un tempo maggiore e che in esse la fase tonica appare più evidente (figg. 2-3).

In queste ricerche avevo scelto i sali di Bario in quanto dai lavori di Goodmann è Gillmann⁽²⁾ appariva dimostrato che detti sali agiscono direttamente sulla fibra muscolare senza l'intervento del sistema nervoso autonomo. Solo dopo aver effettuato le presenti ricerche venni a conoscenza di un lavoro di Ambache⁽³⁾ che porta, tra le altre, alla conclusione che i sali di Bario producono la contrazione delle fibre muscolari attraverso una fase chimica, ossia una liberazione di acetilcolina. Queste ricerche furono poi riprese ed ampliate da Emmeling e Feldberg⁽⁴⁾ che giunsero invece a negare una liberazione di acetilcolina per opera dei sali di Bario ed ammisero invece che essi agiscano esclusivamente e direttamente sulle fibre muscolari.

Lasciando tuttavia da parte l'interpretazione del modo di agire dei sali di Ba e limitandomi per ora all'osservazione dei fenomeni studiati dirò che le contrazioni prodotte dai sali di Ba sono molto irregolari rispetto alle dosi: per tale motivo mi fu difficile fare confronti precisi tra le contrazioni prodotte da dosi eguali e non potei quindi dimostrare sicuramente un potenziamento da 933 F sull'azione dei sali di Ba, analogo a quello osservato nel caso sull'acetilcolina.

Successivamente, partendo dall'ipotesi di lavoro che ogni sostanza capace di modificare lo stato di attività o di tono delle fibre muscolari intestinali possa

(1) N. O. ABDON, « Acta physiol. Scandinav. », 1, 153 (1940).

(2) L. GOODMAN, A. GILMANN, *The Pharmacological Basis of Therapeutic*. New York 1941, The Mc. Millon Co.

(3) N. AMBACHE, « Amer. Journ. of Physiol. », 104, 266 (1946).

(4) N. EMMELING, W. FELDBERG, « Amer. Journ. of Physiol. », 106, 482 (1947).

mettere in uno stato di eccitazione latente le fibre stesse, volli provare se i sali di Ba potenziassero l'azione dell'acetilcolina.

Le esperienze eseguite su intestini di gatto, di cane, di cavia hanno mostrato che il trattamento con sali di Ba a dosi tali da produrre una contrazione evidente potenzia nettamente l'azione successiva dell'acetilcolina (figg. 2-3).

Certamente non è facile spiegare come il fenomeno del potenziamento finora descritto si possa ottenere con sostanze di così differente costituzione ed azione come il ^{93}Zr Fe di sali di Bario; ma del resto è noto che numerose sostanze (chinino, ossalati, citrati, ergotamina) (Abdon)⁽⁵⁾ sono capaci di produrre lo stesso fenomeno.

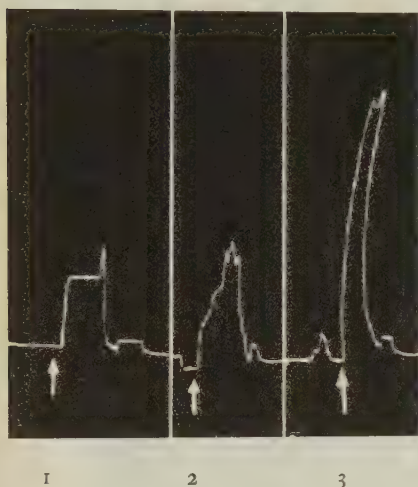


Fig. 2. - Intestino tenue di cavia.

- 1 = 0,5 γ acetilcolina
- 2 = 100 γ BaCl_2
- 3 = 0,5 γ acetilcolina

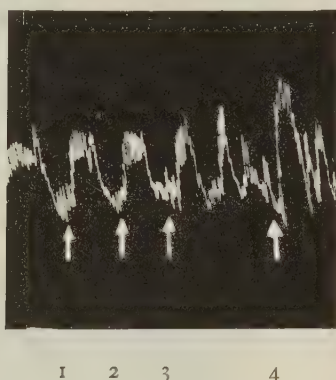


Fig. 3. Intestino tenue di gatto fibre « longitudinali ».

- 1 = 0,1 γ acetilcolina
- 2 = 0,1 γ acetilcolina
- 3 = 500 γ BaCl_2
- 4 = 0,1 γ acetilcolina

Per studiare meglio l'azione dei sali di Bario sull'intestino mi parve utile ricercare l'azione dei comuni farmaci del sistema nervoso autonomo sulle contrazioni da Bario.

Ho provato dapprima l'eserina, alla concentrazione di $1/2.000.000$ – $1/10.000.000$, ossia a diluizioni abbastanza elevate, capaci però di produrre contrazioni di per se stesse del preparato muscolare.

Dai tracciati (figg. 4-5-6) appare evidente che il trattamento con eserina rende più alta e più duratura la contrazione da sali di Bario.

Successivamente provai l'azione dell'atropina sulla contrazione dei sali da Bario. Come appare dai tracciati (figg. 5-6), l'atropina applicata durante la contrazione delle fibre muscolari ne provoca un rapido rilasciamento con perdita del tono ed arresto dei movimenti automatici: altre volte diminuisce solo l'altezza

(5) I. SPADOLINI, *La regolazione neuro-umorale dei visceri*, in *La Nuova Italia*, Firenze 1946.

delle contrazioni. Un successivo trattamento con sali di Bario è normalmente inefficace, a meno che non si aumenti fortemente la dose iniziale (da 3 a 10 volte).

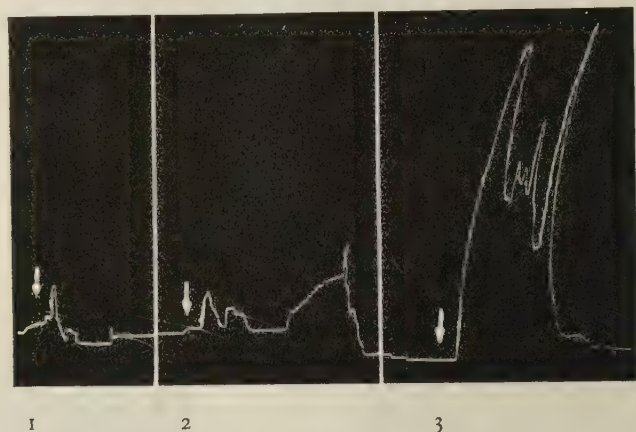


Fig. 4. - Intestino tenue di cavia.

1 = 100 γ BaCl_2

2 = 10 γ eserina

3 = 100 γ BaCl_2

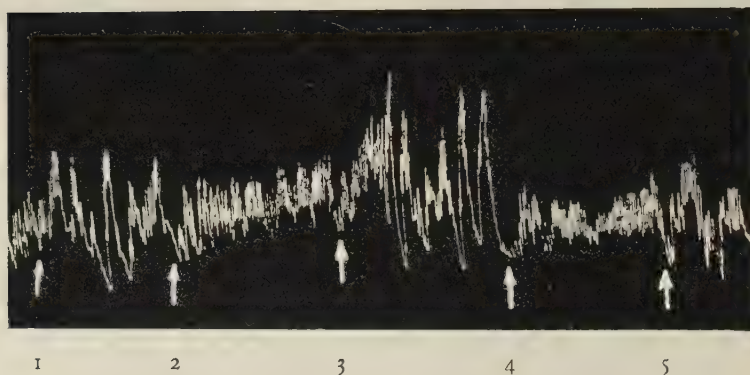


Fig. 5. - Intestino tenue di gatto. Fibre «longitudinali».

1 = 500 γ BaCl_2

2 = 2 γ eserina

3 = 500 γ BaCl_2

4 = 500 γ atropina

5 = 500 γ BaCl_2

Dalle ricerche esposte due fenomeni appaiono dimostrati:

1° L'ergotamina potenzia l'azione contratturante dell'acetilcolina verso i muscoli dell'intestino, analogamente a quanto produce il 933 F.

2° Anche i sali di Bario potenziano l'azione dell'acetilcolina sugli stessi preparati.

Come abbiamo accennato in precedenza appare difficile spiegare con un meccanismo unico il potenziamento prodotto da tre sostanze così differenti come il 933 F, l'ergotamina ed i sali di Bario.

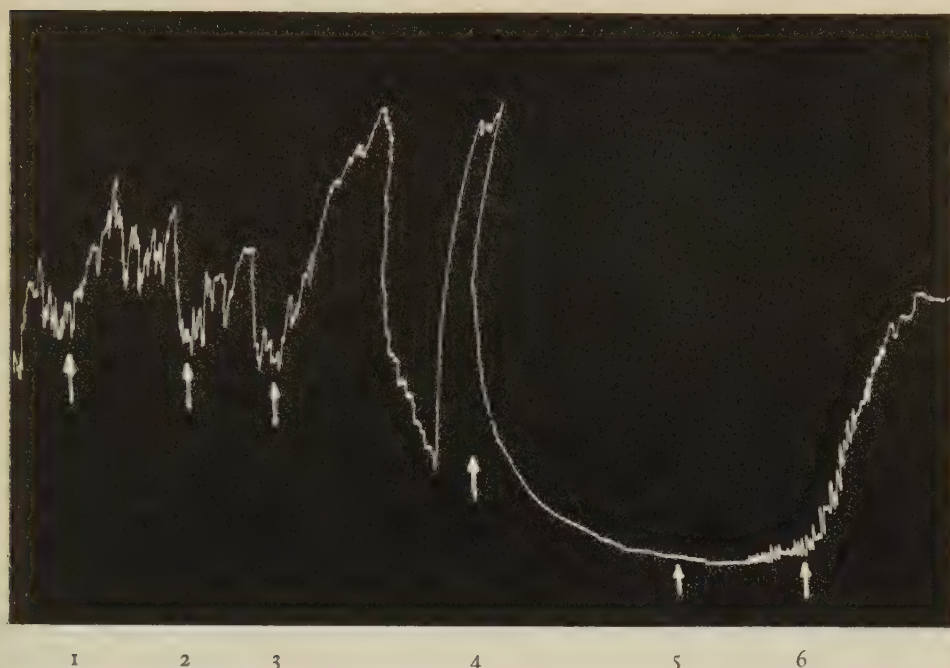


Fig. 6. — Intestino tenue di cane. Fibre «longitudinali».

- 1 = 300 γ BaCl_2
- 2 = 3 γ eserina
- 3 = 300 γ BaCl_2
- 4 = 500 γ atropina
- 5 = 1000 γ BaCl_2
- 6 = 2000 γ BaCl_2

A proposito del 933 F ho già accennato nella Nota precedente all'ipotesi che esso si combini nei recettori periferici, con la sostanza I a tipo inibente (secondo Spadolini) bloccandola e togliendo quindi la possibilità che una parte dell'acetilcolina si fissi con questa e diminuisca quindi l'attività contratturante.

Tale spiegazione potrebbe essere invocata anche nel caso dell'ergotamina, ma difficilmente può essere sostenuta nel caso dei sali di Bario. Come abbiamo già accennato, l'azione di questi ultimi sali è stata spiegata dall'Ambache come un processo di liberazione di acetilcolina e quindi, secondo questa ipotesi, si potrebbe anche spiegare il potenziamento prodotto dai sali di Bario come una liberazione di piccole quantità di acetilcolina che si continuerebbe anche dopo il lavaggio del preparato. Queste piccole quantità sarebbero insufficienti a produrre una contrazione muscolare ma, sommandosi all'acetilcolina aggiunta al bagno, aumenterebbero l'altezza della contrazione, ossia la potenzierebbero.

Un altro tentativo di spiegazione sarebbe quello che i sali di Bario, come del resto anche il 933 F e l'ergotamina, producano una contrazione più o meno evidente o per lo meno modifichino il tono del preparato; ne cambino quindi quelle condizioni funzionali che, secondo Spadolini, regolano le risposte motorie degli organi effettori.

COMMEMORAZIONI

Filippo Silvestri: l'Uomo e il Biologo (*)

Commemorazione letta (**) dal Socio G. COTRONEI.

La vita e l'opera di FILIPPO SILVESTRI nella sua formazione, nel suo svolgimento, nel raggiungimento dei risultati più ragguardevoli, meritano speciale risalto, perchè caratterizzano un periodo del movimento biologico contemporaneo. Silvestri continua nobilmente una tradizione e un indirizzo che, derivato dalla scuola biologica di G. B. Grassi, si svolse secondo le aspirazioni e le attitudini singolari e le qualità personali dello studioso umbro: ecco perchè io, allievo di Grassi, e onorato per circa un quarantennio dall'intima amicizia del Silvestri, benchè estraneo al campo specializzato dell'entomologia, reputo doveroso rievocarne la grande figura in questa Accademia, di cui Egli fu certamente uno dei rappresentanti più insigni.

Nelle sue memorie inedite che soprattutto sono i ricordi delle esplorazioni scientifiche, Silvestri rievoca, con quell'ingenuo candore che conservò per tutta la vita, gli anni della sua fanciullezza e traspare il caldo entusiasmo, che nella dolce terra umbra di Bevagna sentì nascere in sè stesso, la passione che mai l'abbandonò per la diretta osservazione della vita delle piante e degli animali: il suo diletto per la raccolta degli insetti nelle gite campestri, il grato ricordo dei primi modesti maestri di scuola che queste tendenze secondarono e coltivarono, la simpatia per gli umili con i quali sentiva tanta comunanza di aspirazioni.

Appartenente ad una modesta famiglia di lavoratori, giovinetto alternava le cure dello studio con il lavoro manuale nel piccolo mulino e pastificio paterno. Silvestri con lieto animo mette in risalto questo particolare della sua vita, perchè ritiene che fu il duro lavoro manuale a temprarne il corpo, rendendolo atto a quelle fatiche che potè sopportare nelle sue lunghe esplorazioni per tutto il mondo.

Mentre compiva gli studi secondari, tra Spoleto e Perugia, Silvestri iniziava la sua produzione scientifica; modesta quale poteva essere quella di un ragazzo, ma che egli non rinnega, perchè fondata sull'esattezza descrittiva; così illustra l'avifauna e l'ittiofauna dell'Umbria, e studente di liceo ottiene di frequentare l'Istituto di Zoologia della Università di Perugia. Si iscrive poi all'Università di Roma in Medicina, ma non l'appagano i corsi che segue: la sua vocazione è ormai decisa e contro il desiderio dei genitori si iscrive in Scienze Naturali a Genova, affermando quel suo temperamento volitivo che non fu mitigato nemmeno

(*) Nato a Bevagna, nell'Umbria, il 22 giugno 1873, vi morì il 1° giugno 1949.

(**) Nella seduta del 15 aprile 1950.

dagli affetti più cari. Si recò a Genova attratto dalla fama di quel Museo civico allora nel pieno rigoglio della raccolta di prezioso materiale zoologico, proveniente da tutte le parti del mondo per l'opera illuminata di Doria e di Gestro. Questi due benemeriti incoraggiarono le naturali tendenze del giovanissimo studioso ed è a Genova, di certo, che Silvestri sentì nascere il desiderio di diventare anche lui zoologo esploratore. Ma studente universitario si convince che la zoologia non si esaurisce nelle esplorazioni e nella raccolta del materiale, e capisce che questi studi devono essere integrati dalla ricerca di laboratorio, e allora lascia Genova e si iscrive a Palermo per frequentare il Laboratorio di Zoologia diretto da Nicola Kleinenberg.

Grande era verso il 1894 la fama di questo studioso, che venuto dalla Germania era stato assistente alla Stazione Zoologica di Napoli; qui a Napoli il Kleinenberg aveva scoperto nel 1878 il primo caso di poliembrionia nel regno animale, in un lombrico, il *Lumbricus trapezoides*; nello stesso anno Strasburger ne aveva scoperto il primo caso nel regno vegetale.

Quando Silvestri si recò a Palermo l'opera scientifica di Kleinenberg, che era stato pure così valente embriologo e citologo, si era assopita, ma a Palermo Silvestri conobbe il suo coetaneo, Andrea Giardina, e nacque allora quella profonda amicizia, poggiata sulla comunanza delle nobili aspirazioni; i due giovani lavorarono nella stessa stanza per circa due anni. Come tesi di laurea Kleinenberg affidò a Silvestri lo studio dell'embriologia e della fecondazione di un miriapode: il *Pachyiulus communis*. Giardina contemporaneamente lavorava sulla morfologia dell'apparato boccale degli insetti e cominciava ad occuparsi dei problemi teorici della fecondazione. L'amicizia fra i due giovani così diversi nelle tendenze e nella capacità di lavoro fu molto importante per la formazione della loro mentalità scientifica.

Ma Silvestri non poteva essere soddisfatto della guida, che mancava, del suo maestro e laureato nel 1896 si recò a Roma, dove insegnava Anatomia comparata Battista Grassi, trasferitosi da Catania alla fine del 1895: Silvestri fu il suo primo nuovo assistente. È da Grassi che Silvestri apprese il metodo comparativo biologico, che valse a completare la sua formazione scientifica ed è con la severa applicazione di questo metodo che Silvestri raggiunse le sue maggiori scoperte nel campo della biologia generale.

Il suo primo lavoro in questo campo fu pubblicato dall'Istituto di Roma nel 1898, e riguarda proprio la fecondazione del *Pachyiulus*, l'argomento sul quale aveva cominciato a lavorare a Palermo, ma nei suoi ricordi Silvestri tiene a far rilevare che la modalità così singolare della fecondazione fu da lui scoperta a Roma. Era un fatto già noto che in alcuni diplopodi esistono spermatozoi immobili, ma non si sapeva come spiegare, in tali casi, il meccanismo della fecondazione. Silvestri scoprì nel *Pachyiulus*, la specie da lui studiata, che l'uovo emette uno pseudopodo che attira lo spermatozoo e lo trascina nell'interno dell'uovo, in tal modo mise in evidenza un raro caso in cui la parte attiva si deve all'uovo e non allo spermatozoo.

Questo primo lavoro ci dimostra la preparazione e la perizia citologica da lui raggiunta fin dai primi anni della sua produzione scientifica e delinea l'orientamento della sua personalità di ricercatore. Tutti i suoi più notevoli lavori di

Biologia generale si debbono all'analisi citologica minuziosamente seguita nello sviluppo embrionale.

Nella sua immensa produzione scientifica di più di 470 lavori quelli di pura biologia generale sono in numero relativamente esiguo rispetto a quelli di entomologia pura o applicata, ma forse sono quelli più significativi per intenderne la complessa personalità, perchè bastano a documentare quale ampia preparazione egli portasse nell'esame dei singoli argomenti studiati, e d'altra parte la profonda conoscenza del mondo degli Artropodi ci spiega come egli, sapendo scegliere il materiale comparativo, giungesse a risultati, per la metodica seguita, che non furono invece ottenuti da quegli entomologi del suo tempo che tale metodica non applicarono. Silvestri fu quindi un entomologo per naturale tendenza naturalistica, ma educato alla zoologia generale.

Come sentisse la passione delle esplorazioni entomologiche lo dimostra il fatto che nel 1898 egli abbandonò il posto di assistente di Grassi, per nulla preoccupato di interrompere una promettente carriera, che avrebbe agevolmente seguita rimanendo col grande Maestro.

Già noto per i lavori di entomologia derivati dalle raccolte del museo civico di Genova, fu invitato a recarsi in Argentina per illustrarvi la fauna entomologica. Silvestri accettò benchè Grassi facesse di tutto per dissuaderlo: ma le sole ricerche di laboratorio, pur con la profonda stima che ha del Maestro, nel tempo delle grandi scoperte sulla trasmissione della malaria umana, non soddisfano tutte le aspirazioni e le attitudini del giovane studioso e d'altra parte nessuno riuscì mai a dominare la volontà del Silvestri: voleva partire e abbandonò il posto di Roma; dopo un anno tornò da Grassi come semplice praticante interno (1900-1901), ma ora è orientato definitivamente verso l'entomologia: questa è la sua strada. Alla fine del 1901 si recò a Portici dove dirigeva quell'Istituto di Entomologia il Berlese; sempre, però, Silvestri rimase in rapporti scientifici e di devota amicizia col maestro di Roma.

Passato il Berlese a Firenze nel 1903, Silvestri prese la direzione dell'Istituto di Entomologia di Portici, che fu uno dei focolai scientifici più attivi nel suo campo fino al 1949.

Nel 1905 in una Nota all'Accademia dei Lincei annuncia uno dei suoi maggiori risultati: un nuovo interessante caso di poliembrionia di un Imenottero: il *Litomastix truncatellus*, parassita endofago, e descrive il particolare destino dei corpuscoli polari e il dimorfismo larvale; pochi mesi dopo pubblicava il lavoro in esteso ampiamente documentato.

A quell'epoca quali erano i precedenti scientifici di cui disponeva?

Nel 1901 Bugnion aveva notato nello sviluppo dell'*Ageniaspis* (*Encyrtus fuscicollis*) che i giovani embrioni erano riuniti insieme, disposti in catena, in una massa granulosa circondata di una membrana epitelioida, che egli ritenne originata dalla fusione dell'amnios delle singole uova deposte nella larva ospite.

L'osservazione di Bugnion conteneva solo una parte di verità, infarcita di grossi errori derivati dalla mancata applicazione del metodo embriologico. Gli errori furono in parte (nel 1898) corretti dalle ricerche di Marchal col necessario studio embriologico. Il valente entomologo francese poté mettere in chiaro che la massa

granulosa e la membrana non derivavano da differenti uova, ma che tutti gli embrioni provenivano da un solo uovo e che la massa granulosa chiamata da Marchal *trophamnios* derivava anch'essa dall'unico uovo: Marchal scopriva così, pur attraverso le osservazioni sbagliate di Bugnion, il primo caso di poliembrionia negli Imenotteri. Ma Marchal non risalendo all'esame citologico delle prime fasi di sviluppo non aveva potuto stabilire la reale natura del *trophamnios*, e fu questo punto rimasto oscuro che stimolò le indagini del Silvestri sul nuovo materiale da lui scelto e lo condusse a scoperte di grande valore teorico.

Ecco dove può condurre una più completa preparazione scientifica quando sia sorretta dalla tenacia del lavoro. Silvestri risalì nello studio dell'uovo ovarico alla formazione dei corpuscoli polari e alle prime fasi dello sviluppo dell'uovo sia partenogenetico che fecondato e andò a fondo nelle ricerche sulla poliembrionia degli Imenotteri. In base alla lunga serie dei suoi lavori, culminati nella Memoria sintetica nel 1937, che approfondiscono l'argomento, possiamo affermare che fino ad oggi sul tema della poliembrionia, tanto affascinante, nessun ricercatore potè vantare tante scoperte fondamentali quante ne segnalò Silvestri.

Anche il Marchal, pure così benemerito in questi studi, non aveva visto tutte le cose più importanti nè aveva visto bene tutto quello che aveva segnalato; nella forma da lui studiata (1898) aveva confuso il nucleo dell'oocite con l'oosoma, nè aveva potuto distinguere la diversa origine del paranucleo o nucleo del *trophamnios* dalle vere cellule embrionali.

Il primo lavoro del Silvestri sulla poliembrionia, quello sul *Litomastix truncatellus*, è anche quello nel quale raggiunse i risultati più originali sempre meglio valutati e controllati con i risultati comparativi che aggiunse in seguito.

Nelle ricerche sul *Litomastix truncatellus* che deposita le uova nelle uova di un altro insetto, un lepidottero del genere *Plusia*, Silvestri potè stabilire i seguenti fatti.

1° L'uovo nello stadio di oocite ha un ooplasma assai povero di deutoplasma e presenta un nucleo molto piccolo situato nella parte anteriore dell'uovo e inoltre un altro corpo, l'oosoma, che è più grosso del nucleo: l'oosoma è situato nella parte posteriore dell'uovo.

Vedremo l'interesse di questa disposizione topografica.

2° La maturazione dell'uovo si svolge in modo identico tanto se si tratta di uova fecondate che partenogenetiche: i corpi polari non si distruggono ma rimangono nell'ooplasma formando il paranucleo.

3° Il citoplasma dell'uovo si divide in due parti; una contiene il paranucleo e forma un involucro per l'altra parte che è destinata a dare le vere cellule embrionali.

4° L'oosoma (che chiama nucleolo) si distribuisce a poche cellule destinate a diventare cellule sessuali.

5° Durante lo sviluppo avviene una separazione in gruppi delle cellule embrionali, la maggior parte di questi gruppi cellulari contiene cellule sessuali che originariamente avevano l'oosoma; ciascuno di questi gruppi dà origine a una larva sessuata; il minor numero non possiede cellule sessuali e origina larve asessuate; con caratteri molto differenti.

Un fatto interessante messo in luce da Silvestri nel *Litomastix* è quello riguardante il numero degli embrioni sviluppatasi da un solo uovo: un migliaio di larve

sessuate e circa un centinaio di larve asessuate in luogo dei pochi embrioni, descritti da Marchal, sviluppatasi dall'uovo di *Ageniaspis fuscicollis*: è il primo caso di poliembrionia con un numero così elevato di embrioni.

Subito dopo nel 1906 Silvestri iniziò i suoi studi comparativi su altri Imenotteri sia a sviluppo poliembrionale sia, per i necessari controlli deduttivi, a sviluppo monoembrionale.

E si rivolse da prima al materiale studiato da Marchal, l'*Ageniaspis fuscicollis*, estendendo lo studio ad altre sottospecie, perchè era evidente la necessità di controllare il valore generale di alcuni fatti da lui scoperti. Confermò pertanto anche sull'*Ageniaspis*, forma poliembrionale, che i corpuscoli polari non degenerano ma formano il *trophamnios*, che esiste l'oosoma da lui chiamato nucleolo supponendolo derivato dal nucleo ma che è sempre, almeno nelle sue osservazioni, separato dal vero nucleo, e quindi l'oosoma non poteva confondersi, come erroneamente aveva creduto Marchal, con il nucleo; confermò pure nell'*Ageniaspis* che in quelle cellule che diventano germinali esiste l'oosoma, poté anzi chiarire che già allo stadio di due cellule embrionali quella che possiede l'oosoma rappresenta l'abbozzo del *sex primordium*.

Passando allo studio di Imenotteri Calcididi monoembrionali poté ricavare alcuni dati comparativi assai interessanti. Nell'*Encyrtus aphidivorus* vide che i corpuscoli polari andavano distrutti, come era regola generale prima della sua scoperta avanti riferita, che la iniziale segmentazione non interessa l'ooplasma; descrisse nell'oocite l'oosoma che rimane durante la divisione dei nuclei nella parte posteriore dell'uovo e soltanto quando vengono individuate le cellule di segmentazione, quelle contenenti l'oosoma caratterizzano la distinzione tra queste che diventeranno germinali e le altre senza oosoma, cellule somatiche. Nell'*Oophthora semblidis*, anche essa a sviluppo monoembrionale, trovò fatti corrispondenti.

Nel 1914 nello studio delle prime fasi di sviluppo del *Copidosoma Buyssoni* corresse alcuni errori di Hegner, più tardi riconosciuti dallo stesso Autore; tali erano le affermazioni che l'oocite derivasse dalla fusione di due cellule e che l'oosoma, determinante le cellule germinali, fosse uno dei nuclei.

Nel 1915 estende il suo studio ad altri Imenotteri. Nell'*Encyrtus Mayri* a sviluppo monoembrionale si trovano descritti alcuni fatti che sembrano discordanti da altri da lui osservati, tuttavia mette in risalto un fatto differenziale riguardante la parte polare dell'uovo. Va rilevato che precedentemente il Silvestri aveva considerato l'*Encyrtus Mayri* a sviluppo poliembrionale, ma ora egli corregge l'errore. Nell'*Encyrtus Mayri* i corpuscoli polari si conservano e danno luogo al *trophamnios* come in *Ageniaspis*, ma a differenza di queste forme Silvestri rileva che la parte polare coi corpuscoli polari rappresenta nelle prime segmentazioni una zona molto esigua rispetto alle altre cellule già formate e tende a circondare le cellule embrionali soltanto alla quarta divisione di segmentazione e perciò più tardi che nell'*Ageniaspis*.

Nell'*Encyrtus Mayri*, in una delle prime quattro cellule di segmentazione è localizzato l'oosoma che determina la prima cellula della serie germinale. Anche nella *Encarsia partenopea* la presenza dell'oosoma caratterizza le cellule germinali rispetto a quelle somatiche, ma a differenza della forma precedente le prime segmen-

tazioni non interessano l'ooplasma e solo allo stadio di 8 nuclei si differenzia dalla parte dell'ooplasma contenente l'oosoma la prima cellula germinale. Passando allo studio di due specie di *Prospaltella* rileva importanti differenze: nella *Prospaltella coniugata* osservò fatti che corrispondono a quelli messi in risalto nell'*Encarsia* e nell'uovo ovarico ritrova l'oosoma. La *Prospaltella Berlesei* si riproduce sempre partenogeneticamente e nell'uovo non ritrova l'oosoma.

Esiste qualche corrispondenza tra questi due fatti? A differenza delle altre uova partenogenetiche da lui esaminate, nella *Prospaltella Berlesei* si forma un solo corpuscolo polare.

Nel 1916 Silvestri passò allo studio del *Platygaster dryomiae*, un Imenottero della famiglia *Proctotrypidae* a sviluppo monoembrionale, vicino sistematicamente ad altre forme già dimostrate da altri autori a sviluppo poliembrionale. Nella specie da lui studiata trovò che la maturazione dell'uovo, la fecondazione, la separazione della prima cellula embrionale dalla parte polare che formerà il *trophamnios* hanno luogo in modo simile a quanto aveva osservato in vari Imenotteri parassiti della famiglia *Chalcididae*, come ad esempio nel *Litomastix* e nell'*Ageniaspis*: non riscontra però la presenza dell'oosoma. Più tardi richiamò l'attenzione sul fatto che in tutte le forme di *Platygaster* manca questo determinante delle cellule germinali e mise in risalto che le uova dei *Proctotrypidae*, mono o poliembrionali sono prive di deutoplasma e mancando l'oosoma il loro ooplasma può considerarsi equipotenziale.

Nel 1937 riassunse i fatti fondamentali da lui scoperti nel lungo studio sulla poliembrionia degli Imenotteri; pochi anni prima, nel 1931, Parker aveva segnalato la poliembrionia in un *Braconidae*: il *Macrocentus ancylicivorus* e credeva che soltanto una larva parassita giunga a maturità nell'ospite parassitato. Nel riferire queste ricerche di altri autori sui Braconidi ci fa sapere, in nota, che egli sta approntando un libro sulla poliembrionia degli Insetti che « will be published as soon as researches on polyembrional *Macrocentus* are concluded »; so per cortese comunicazione del prof. Russo che se non proprio un libro il Silvestri ha lasciato inedito un altro lavoro sulle varie forme di poliembrionia da lui studiate.

Dalla lunga analisi compiuta, Silvestri dedusse alcuni fatti e alcune considerazioni di grande importanza generale: è sopra tutto da mettere in risalto che alcuni dati di Silvestri non rappresentano soltanto un punto di arrivo, sia pure brillante, ma che le ricerche di Silvestri sull'oosoma e quindi sui determinanti germinali aprono la via a nuove indagini, che io ritengo di grande interesse teorico.

I risultati delle scoperte avanti riferite si possono riunire in tre gruppi: 1) risultati riguardanti il fenomeno della poliembrionia; 2) risultati sulla scoperta della permanenza e destino dei corpuscoli polari; 3) il destino dell'oosoma.

Sulla poliembrionia Silvestri inserisce le sue ricerche su un problema che già aveva richiamato l'attenzione di valenti biologi. La poliembrionia non era più limitata oramai alle vecchie ricerche di Kleinenberg, ma erano noti gli studi di Harmer (1893-1900) sui Briozoi e poi quelli di Marchal sugli Imenotteri. Harmer in diversi generi di Briozoi, tutti dell'ordine dei Ciclostomi, trova che l'uovo viene circondato da tessuto follicolare che secondo Silvestri fisiologicamente, se non morfologicamente, può essere comparato al suo *trophamnios*. Anche in

questi casi l'uovo per segmentazione totale forma una massa germigena che si trova compressa dal tessuto follicolare, massa che sotto la pressione esterna e quella interna dovuta all'intenso sviluppo cellulare, si deforma e viene suddivisa in masse minori (embrioni secondari), ciascuna delle quali dà luogo ad un distinto embrione. Nella *Crisia occidentalis* la Robertson (1903) mette in risalto che anche gli embrioni secondari formano per successiva frammentazione embrioni terziari.

Dopo il primo lavoro di Silvestri, nel 1907, Fernandez, Newmann e Patterson e poi nel 1913 Patterson illustrarono la poliembrionia negli Sdentati (*Tatusia*). Silvestri mette in risalto (1937) che la poliembrionia, sia in questi Mammiferi che negli Anellidi è molto differente da quella degli Imenotteri, mentre questa, come abbiamo detto, trova dei punti di collegamento con quella dei Briozoi.

Nelle forme a sviluppo poliembriionale degli Imenotteri Silvestri rileva la precoce segmentazione dell'ooplasma con la separazione di una parte di esso in una zona contenente i corpuscoli polari e la precoce distinzione delle vere cellule embrionali, l'intenso e rapido sviluppo di queste cellule che compresse contro l'involucro si differenziano in tanti ammassi cellulari ognuno dei quali darà luogo ad un embrione. Per quanto ci siano questi fattori prevalenti, tuttavia il confronto con altre forme a sviluppo monoembriionale non consente di identificare il fattore determinante; ma le osservazioni sulla poliembrionia degli Imenotteri permettono soltanto di riconoscere che determinati fattori coesistono sempre nella poliembrionia degli Imenotteri.

Riteniamo che uno dei fatti più importanti messi in luce da Silvestri in questo campo sia stata la scoperta nel *Litomastix* di due tipi di larve: le sessuate circa un migliaio, e quelle asessuate; soprattutto perchè ha permesso di verificare l'importanza dell'oosoma, dove esiste, come determinante germinale. Con queste ricerche per la prima volta si dimostra quale immenso numero di embrioni si possono originare da un solo uovo; nessun embriologo sperimentale e, siamo in questo tempo nel periodo più fecondo dell'Embriologia sperimentale, avrebbe potuto nello sviluppo regolativo di tante specie oramai cimentate, sperare di raggiungere un risultato simile; ma la distinzione dei due tipi di larve mise anche il Silvestri in grado di riconoscere nelle larve asessuate interessanti fenomeni riguardanti la rudimentazione di interi sistemi organici: infatti oltre che del sistema genitale le larve asessuate sono prive del sistema respiratorio e di quello circolatorio; sono invece fornite di forti mandibole e di intestino ben sviluppato; non si trasformano mai in insetti adulti, e si mantengono sempre come larve asessuate e così si trovano anche quando le larve ospitanti di *Plusia* sono ormai ridotte a una poltiglia, nella cui massa si muovono insieme alle larve sessuate; queste soltanto si trasformano in adulti mentre le larve asessuate vanno distrutte. Ma a che cosa servono le larve asessuate nel *Litomastix*? Silvestri non crede che esse siano soltanto forme abortive, pensa invece che abbiano una funzione utile alla specie in quanto servono a dilaniare gli organi delle larve di *Plusia*; pone inoltre un'altra questione: le larve asessuate sono state sempre prive di cellule contenenti l'oosoma e per tanto sono queste cellule che hanno la facoltà di determinare quei sistemi organici che mancano nelle larve asessuate di *Litomastix*? Questa ipotesi non è suffragata da altri elementi comparativi e Silvestri non ignora che in tutte le forme di *Platyaster* sia a sviluppo

monoembrionale che poliembrionale manca, come abbiamo ricordato l'oosoma; ed allora la determinazione germinale può essere provocata da altri fattori oppure, possiamo aggiungere, entrano egualmente in gioco quei componenti chimici che non si localizzano in una struttura morfologicamente rappresentata dall'oosoma.

Qui conviene però ricordare un'altra importante considerazione di Silvestri: nelle forme di *Platyaster* in cui manca l'oosoma, non esiste nell'ooplasma il deutolecite.

Silvestri ha collegato lo studio della poliembrionia a quello della speciale natura del *trophamnios* da lui chiarita. Anche qui però avverte che se in tutte le forme di Imenotteri a sviluppo poliembrionale da lui studiate si riscontra questa speciale natura del *trophamnios* pure ci sono forme monoembrionali come il *Platyaster dryomiae* in cui il destino dei corpuscoli polari è identico a quello di forme poliembrionali; dunque se il comportamento del *trophamnios* è un fattore non è l'unico fattore determinante la poliembrionia: tutte le possibili obiezioni critiche sono state da lui obbiettivamente considerate sempre sulla base dei suoi diretti esami comparativi.

Risalendo all'origine del *trophamnios* Silvestri si è imbattuto, e ne ha capito il valore, in una delle più originali scoperte della moderna citologia; era considerato un fatto di carattere generale, nel mondo animale, che i corpuscoli polari originatisi dalle divisioni maturative fossero cellule abortive; anche se in qualche caso mostrano una notevole persistenza, questo mai significa nelle altre forme ulteriore possibilità di sviluppo cellulare, e ancora meno di ulteriore differenziamento organico: ma Silvestri dopo tanti anni di ricerche tutte concordanti in altro senso, poté dimostrare che invece nel *Litomastix* i nuclei polari si fondono in un nucleo triploide che si riproduce per ripetute mitosi, mentre nell'*Ageniaspis* i tre nuclei formano uno o due gruppi che si frazionano direttamente e irregolarmente: in entrambi i casi la parte dell'ooplasma in cui si trovano i nuclei costituisce il *trophamnios*, organo che circonda le cellule embrionali; quest'organo è di natura protettiva ma in qualche forma, ad esempio nel *Litomastix*, nei primi giorni di sviluppo può avere funzione metabolica.

Abbiamo già detto che la scoperta di Silvestri non aveva riscontro nel mondo animale. Si può invece trovare qualche riferimento col mondo vegetale? Si può essere tentati di ammetterlo ricordando che nel gametofito il nucleo secondario deriva dalla fusione dei nuclei polari e che dalla fecondazione del nucleo secondario deriva un nucleo triploide che per successive divisioni produce un tessuto, l'albumo o endosperma secondario, con funzione di nutrizione dell'embrione. È certo che non può parlarsi di una perfetta analogia perchè in questo caso ci sono elementi di origine completamente estranea a quelli considerati da Silvestri, inoltre nel gametofito sono già cellule aploidi, tuttavia uno dei nuclei polari che deriva dalla divisione comune alla cellula che sarà l'oosfera, entra definitivamente nella costituzione di un organo che serve al trofismo dell'embrione.

Un altro quesito fondamentale approfondito dal Silvestri riguarda la natura dei determinanti germinali. Quali erano i precedenti acquisiti in letteratura? Le ricerche di Boveri sull'*Ascaris* e quelle di Giardina (1901) sulle mitosi differenziali, che portano a distinguere gli oociti di *Dytiscus marginalis* dalle 15 cellule

nutrici, considerano il comportamento nucleare. Per quanto riguarda le formazioni citoplasmatiche Haecker (1897-1903) aveva messo in risalto nel *Cyclops*, nelle prime divisioni di segmentazione, dei granuli (ectosomi) i quali passano soltanto in quella cellula che darà origine alla linea germinale. Lo stesso Haecker, nel suo primo lavoro del 1897 ricordava che anche altri ricercatori avevano più o meno incidentalmente segnalato la presenza di speciali granuli nelle prime cellule germinali, così nel *Chironomus* aveva fatto Ritter, ma il loro reale comportamento nel differenziamento delle cellule germinali era stato precisato soltanto nel 1911 da Hasper, così pure le ricerche di Kahle sul *Miastor* sono soltanto nel 1908. Ma già nel 1905 e nel 1906 Silvestri studiando il comportamento dell'oosoma nel *Litomastix* poteva, con ricerche di natura comparativa, dare una dimostrazione obbiettiva di risultati che prima di lui, tranne forse il caso del *Cyclops*, mantenevano ancora un carattere di ipotesi interpretativa. L'oosoma del *Litomastix* è un vero indicatore germinale perchè le cellule germinali mancano nelle larve asessuate prive di questo costituente plasmatico. Alcuni anni dopo Hegner (1908-1914) dava una verifica sperimentale del valore del determinante: nelle uova insegmentate di Coleotteri crisomelidi Hegner trovò al polo posteriore dell'uovo, proprio nella zona di Silvestri, un disco polare contenente granuli fortemente colorati che passano nelle prime cellule che si formano al polo posteriore: uccidendo questa regione dell'uovo Hegner ottenne un blastoderma senza tracce di cellule germinali. Sono ben lontano dal voler svalutare l'interesse di queste osservazioni derivate dall'applicazione dei metodi moderni di embriologia sperimentale; di certo qualcuno vorrà rammaricarsi che Silvestri non sia lui passato al controllo sperimentale, ma sul suo materiale era, almeno ai suoi tempi, forse impossibile passare a una verifica diretta come quella fatta da Hegner. In ogni modo Silvestri coi suoi metodi d'indagine comparativa raggiunse la prima verifica diretta del valore di un determinante germinale. Questa considerazione merita di essere messa in rilievo oggi che nuovi studi e nuovi indirizzi stanno a dimostrare l'interesse attuale di tale questione. Ed allora non è inutile valutare gli altri dati raggiunti da Silvestri.

È interessante l'analogia dell'oosoma col nucleolo. Silvestri non poté dimostrare la diretta dipendenza delle due formazioni, l'una citoplasmatica dall'altra nucleare. Anche nell'*Ageniaspis* parla delle cellule germinali che ricevono dall'oosoma soltanto la sostanza nucleolare, quindi anche in questa specie l'oosoma si diffonde nel citoplasma; nell'*Encyrtus Mayri*, nell'*Encarsia*, nella *Prospaltella coningata* l'oosoma mostra dei comportamenti analoghi: v'è uno stadio in cui questa formazione s'accolla al nucleo e può anche, come nell'*Encarsia*, circondare completamente il nucleo, in seguito può seguirsi la risoluzione in granuli più o meno addossati.

Le varie modalità strutturali nel divenire dell'oosoma suggeriscono nuove ipotesi di lavoro. Sono stato sorpreso da evidente analogia di comportamento tra l'oosoma e le altre formazioni dell'oocite, il cui studio è stato di recente ripreso nel mio Istituto dal mio allievo Urbani, che con estese ricerche comparative ha dimostrato la presenza di acido ribonucleico sia nelle fasce vitellogene sia nel contorno di alcuni tipici nuclei vitellini. Queste formazioni sono pertanto identiche, almeno in parte dei loro costituenti a quanto si ritiene dei nucleoli, ricchi anche essi di acido ribonucleico.

Le fasce vitellogene si formano da granuli e si risolvono in granuli, le fasce in una determinata fase della crescita circondano il nucleo, i granuli derivati dalla disgregazione della fascia si diffondono nell'ooplasma; granuli e fasce presentano egualmente la reazione dell'acido ribonucleico che viene impiegato nei processi di sintesi e di costituzione del vitello.

Dato che anche le figure di Silvestri ricordano nel modo più suggestivo le tipiche formazioni che ora ho ricordato mi si è presentata spontanea l'ipotesi che i determinanti germinali avanti ricordati, siano costituiti di acido ribonucleico (o che questo partecipi alla loro formazione). Tutto mi lascia pensare che l'acido ribonucleico per le sue tipiche reazioni possa valere come indicatore del comportamento dei determinanti, che potrebbero avere analogia coi plasmageni. Questa mia ipotesi sta per passare nei controlli sperimentali. Un primo dato positivo è stato raggiunto recentemente da Urbani e l'ho comunicato a quest'Accademia. Ha dimostrato l'Urbani, e posso annunciare nuovi suoi risultati che convalidano le prime osservazioni già pubblicate, che la massa di Giardina del *Dytiscus* è costituita non soltanto da acido timonucleico ma anche da acido ribonucleico. Il comportamento dell'oocite dimostra la graduale scomparsa dell'acido timonucleico nella massa di Giardina, mentre l'ooplasma si arricchisce di acido ribonucleico che si presenta in forma diffusa. Tutto lascia quindi ritenere, ed è uno dei pochissimi casi finora noti in letteratura, che l'acido timonucleico si sia trasformato in acido ribonucleico, e che nella determinazione dell'oocite dai preociti l'acido ribonucleico o meglio la trasformazione di timo in ribonucleico giuochi una parte fondamentale. Non è quindi azzardato prevedere oggi un'analogia di questi dati con il comportamento dei plasmageni e considerare l'oosoma come un plasmagene germinale, ben individuato, che determina la linea germinale. L'analogia dell'oosoma con le fasce vitellogene d'altra parte viene fortemente suffragata dall'osservazione di Silvestri che le uova di *Platygaster* dove non c'è l'oosoma son prive di deutolecite.

Non è certo ora il momento di estendersi su questi moderni e difficili problemi, ma vogliamo solo mettere in risalto che le ipotesi e le ricerche ora annunciate sono la diretta e logica derivazione dei lavori di biologia generale del compianto studioso. Le sue ricerche sui determinanti germinali, specie in Italia, non ebbero ulteriore svolgimento, secondo i nuovi indirizzi, tuttavia rappresentano a mio credere quanto di più completo sia stato scritto nella citologia contemporanea e l'opera di uno studioso va valutata, per esprimere la sua vitalità, solo nello sviluppo fecondo che da essa può germogliare.

Con le sue ricerche sugli Imenotteri Silvestri ha portato il suo valido contributo anche ad altri fondamentali problemi di biologia generale: conferma in molte forme il fatto già noto per le api, che i maschi derivano da uova partenogenetiche mentre le femmine da uova fecondate, ma non in tutti i casi ne ha potuto dare la dimostrazione obbiettiva, così ad esempio per l'*Encarsia partenopea* avverte che questa specie produce ugualmente femmine e maschi « ma non ho potuto sperimentare (aggiunge) se i secondi derivino da uova partenogenetiche come in altri imenotteri parassiti ma è probabile perchè si trovano frequentemente uova deposte senza traccia di spermatozoi e in via di sviluppo come le altre ».

Circa l'omogeneità sessuale in tutti gli embrioni provenienti dal medesimo uovo Silvestri prende posizione per la precoce determinazione sessuale e per la inalterabilità di tale determinazione; riferendo i dati di Patterson sulla rara presenza di maschi tra le numerose femmine provenienti da uno stesso uovo, Silvestri non pensa che questa sia una prova sufficiente di cambiamento metagamico del sesso, ma piuttosto che in quei rari casi ci sia stato aploidismo limitato a qualche individuo: avverte però con la sua severa obbiettività che ulteriori prove sono necessarie per avvalorare questa sua supposizione.

In tutti i campi in cui Silvestri dedicò la sua attività lasciò tracce indelebili: scoprì due ordini nuovi di insetti, dedicò gran parte della sua operosa esistenza alla lotta biologica per combattere gli insetti dannosi all'agricoltura e queste ricerche si poterono compiere attraverso lunghi esperimenti in lontane, inospitali regioni, identificò un numero enorme di nuove specie di Artropodi; ma di tutti questi lavori vi parlerà chi più di me ne ha competenza specifica. Voglio solo ricordare perché si inquadra con quanto ho già detto sul suo spirito scientifico, rivolto a mettere in luce nuovi aspetti biologici, la scoperta singolare fatta quando era già vecchio, sulla maniera di fecondazione nella famiglia *Mengenillidae*: i maschi adulti che fuoriescono dal pupario sono attivi e irrequieti e posti in presenza di femmine ancora contenute nel pupario non mostrano di essere attratti, posti invece in presenza di femmine uscite dal pupario si gettano su di esse come saette, le colpiscono e le perforano con l'organo copulatore, conformato ad acuto uncino, in qualunque parte del corpo e restano fermi per pochi secondi, poi si sollevano e straggono l'organo copulativo e volano via. In tutte le specie di *Mengenillidae* la fecondazione non ha luogo attraverso la vulva, che pure esiste e serve per l'uscita delle larve neonate, ma attraverso qualunque parte del corpo; le uova sono libere nel lacunoma e si trovano sparse fino all'ultimo segmento dell'addome, quindi gli spermatozoi insinuandosi nello stesso lacunoma vanno a contatto con le uova e possono fecondarle.

Con queste ricerche che si iniziano nel 1940 e proseguono negli anni successivi si concludono i suoi lavori di Biologia generale. Aveva compiuto i settanta anni, nel 1943, quando illustrò minutamente la citologia della maturazione dell'uovo e la fecondazione negli *Strepsitteri*: si riannodava così, con queste ricerche, a quei lavori sulla fecondazione del *Pachyiulus* che aveva iniziato più di quarantacinque anni prima e li chiudeva come nei lavori più antichi con scoperte del tutto inattese.

Ed ora vogliamo concludere sulla figura dello studioso sì da renderci conto della sua figura umana: Silvestri fu morfologo e biologo, ma egli non ammetteva che le ricerche biologiche, anche quelle riguardanti i costumi degli animali, potessero fare a meno di quelle morfologiche. Era tanto convinto di questa necessità che non esitò a sconsigliare dal tentare la libera docenza anche ai suoi più cari amici ed allievi che non considerava sufficientemente maturi: non esitò perfino a votare contro l'assegnazione della libera docenza a qualche suo assistente, che secondo lui non aveva ancora raggiunto una completa preparazione. Questa sua fermezza di opinione in ciò che egli credeva la giusta causa, e che egli portò in tutti gli atti della sua vita, fece sì che a molti sfuggisse la vera natura dell'uomo:

la sua fermezza parve ostinata intransigenza e intolleranza verso le caratteristiche della altrui personalità: la sua indomita volontà che lo portò a resistere alle pressioni affettuose delle persone a lui più care a molti parve insensibilità sentimentale; egli fu un direttore di Istituto di implacabili esigenze: voleva dagli allievi l'assoluta dedizione alla ricerca scientifica; ma egli insegnava con l'esempio di tutta una lunga vita che non aveva mai conosciuto soste e voleva in tutti questo sentimento di sacrificio e di vocazione quasi religiosa. Il dolce e mite umbro, come io l'ho conosciuto in tanti momenti della sua vita, era contemporaneamente un'anima fiera e sdegnosa, sdegnoso verso tutti i procaccianti, fiero, lui così dolce con gli umili, coi prepotenti; sentì profondamente l'amicizia, ma mai si curò né si dolse delle profonde inimicizie che questo suo temperamento doveva necessariamente procurargli.

Non è il caso di ricordare tanti episodi della sua vita di lottatore intrepido. Sbagliò qualche volta nei suoi rapporti umani? Fu qualche volta eccessivo nelle sue intransigenze? Può darsi, ma io che ebbi la singolare ventura di essere uno dei pochissimi ammessi nell'intimità della sua vita so bene che Silvestri fu uomo di eccezionale rettitudine e austerità di costumi e sentimenti; egli combatté sempre, e senza quartiere, tutto quanto pensava fosse erroneo e dannoso e le sue opinioni discordi e le sue opposizioni a indirizzi o contingenze pratiche che pensava sbagliate non si arrestarono nemmeno innanzi alla morte dei suoi antagonisti, se quegli indirizzi avevano ancora sostenitori: coloro che gli furono ostili ebbero quindi buon gioco per farlo apparire nella falsa luce dell'ingenerosità.

Questi fu l'uomo che oggi ricordiamo. Filippo Silvestri onorò come pochissimi altri la scienza che coltivò; pochi come lui ebbero la ventura di associare il proprio nome a tante fondamentali scoperte, pochi come lui riuscirono a svelare tanti grandiosi esperimenti della Natura. Egli fu soprattutto un naturalista che amò indagare le condizioni naturali e sempre, lui così fiero, sentì con vigile ed umile cuore la bellezza di questo compito. Silvestri va studiato e compreso inquadrando la sua opera nel movimento scientifico del suo tempo perchè degnamente raccolse e degnamente continuò la grande tradizione dei Naturalisti italiani; auguriamoci che il suo esempio non vada disperso.

BIBLIOGRAFIA.

La Bibliografia completa, di 470 lavori, di Filippo Silvestri è stata raccolta da G. Russo, in «Boll. Lab. Entomologia Agraria», Portici, vol. IX, 1949. Qui si riportano soltanto i lavori di Biologia Generale dei quali si è fatto cenno.

- SILVESTRI F., *La fecondazione in una specie animale fornita di spermatozoi immobili*. «Rend. Acc. Naz. Lincei» (5), VII, pp. 129 (1898).
- *Ricerche sulla fecondazione di un animale a spermatozoi immobili*. «Labor. Anat. R. Università Roma e altri Labor. biol.», VI, pp. 225 (1898).
- *Un nuovo interessantissimo caso di germinogonia (poliembrionia specifica) in un imenottero parassita endofago con particolare destino dei globuli polari e dimorfismo larvale*. «Rend. R. Acc. Lincei» (5), XIV, p. 534 (1905).

- SILVESTRI F., *Contribuzione alla conoscenza biologica degli Imenotteri parassiti*. - I. *Biologia del « Litomastix truncatellus »* Dalm. « Ann. R. Scuola sup. Agricoltura », Portici, vol. VI, p. 17 (1906).
- *Sviluppo dell'« Ageniaspis fuscicollis »* Dalm. « Rend. R. Acc. Lincei », vol. XV, p. 650 (1906).
- *Contribuzione alla conoscenza degli Imenotteri parassiti II-IV*. « Boll. Labor. Zool. Sc. Agr. », vol. III, p. 29 (1908).
- *Prime fasi di sviluppo del « Copidosoma Buyssoni »* Mayr. *Imenottero Calcididae*. « Anat. Anz. », XLVII, p. 45 (1914).
- *Struttura dell'ovo e prime fasi di sviluppo di alcuni Imenotteri parassiti I-V*. « Boll. Lab. Zool. Sc. Agr. », Portici, X, p. 66 (1915).
- *Sulla maturazione dell'ovo, fecondazione e formazione del trophamnios nel « Platygaster dryomyae »* Silv. « Rend. R. Acc. Lincei », (5), XXV, p. 121 (1916).
- *Insect Polyembryony and its general biological aspects*. « Bull. of the Museum of Comparative Zool. Harvard College », vol. LXXXI, N. 4. p. 469 (1937).
- *Descrizione preliminare di una specie nuova di « Mengenilla » e notizie sul suo ciclo e sul particolare modo di fecondazione*. « Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. R. Acc. d'Italia », vol. I, fasc. 10 (1940).
- *Morfologia dell'ovo, maturazione e primi stadi di sviluppo dell'« Halictophagus »* (*Insetti Strepsitteri*) « Commentationes Pont. Acad. Sci. », vol. VII, N. 17 (1943).
- *Ricordi e itinerari scientifici*. Quattro volumi inediti depositati presso l'Archivio dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

Filippo Silvestri: l'Entomologo

Commemorazione letta (*) dal Corrispondente G. GRANDI.

Giulio Cotronei ha intrattenuto questa Accademia su quanto FILIPPO SILVESTRI ha rivelato alla scienza intorno alla fecondazione dei Miriapodi a spermatozoi immobili, ed intorno ai particolari fenomeni che avvengono durante lo sviluppo poliembrionale di alcuni Imenotteri Terebranti, nonchè sulle scoperte che Egli ebbe la ventura di compiere, vuoi a riguardo dell'emissione, da parte dell'uovo dei primi, di uno pseudopodo attrattivo, vuoi a riguardo, rispetto ai secondi, del particolare destino dei globuli polari, dell'oosoma quale indicatore precoce del differenziamento germinale, del costituirsi infine di quelle straordinarie larve asessuate, di cui ancora oggi ignoriamo la ragion d'essere e la funzione.

Il 6 novembre dello scorso anno, in sede di riunione del Consiglio Superiore per la difesa contro le malattie delle piante, ed alla presenza del Ministro Segretario di Stato per l'Agricoltura e le Foreste, io ho rievocato la figura del nostro grande Scomparso, illustrando il contributo da Lui portato alla conoscenza degli Insetti nocivi ed utili ai vegetali coltivati e le esplorazioni scientifiche da Lui compiute al di là delle frontiere europee, in molte terre d'oltremare ed in diversi continenti.

Ci rimane ora da onorare la sua memoria ponendo in rilievo le linee maestre della sua attività nel campo dell'entomologia pura ed il poderoso suo apporto a questa sconfinata disciplina. Lo faremo in modo estremamente sintetico.

La mentalità di Silvestri fu una mentalità preminentemente analitica e le sue qualità di indagatore della minuta fabbrica degli Artropodi rifulgono sopra tutte le altre; direi anzi che rappresentano la sua caratteristica fondamentale, o, se si vuole, il nucleo dominante delle sue possibilità. Fu però un analizzatore di altissima classe, e la sua competenza nei domini della morfologia e dell'istologia, la sua immane capacità di lavoro e la sua intraprendenza come esploratore, se gli consentirono da un lato di scoprire una miriade di nuove entità sistematiche, gli permisero dall'altro di porre in luce strutture e comportamenti che giovarono notevolmente alla risoluzione di vari problemi di biologia generale. Egli è stato in primo luogo un sistematico. Di esserlo lo dichiarava esplicitamente, perchè sistematico era nato, nella sistematica il suo cervello si adagiava come in un substrato di elezione, per la sistematica sentiva un fascino invincibile e sempre rinnovato. Non meno di 320 memorie sulle più che 460 da lui pubblicate, e cioè più di due terzi della sua produzione scientifica, rientrano infatti in tale branca dello scibile zoologico.

(*) Nella seduta del 15 aprile 1950.

Orbene, quale è il posto che Egli occupa nell'affollamento prodigioso di codesti sagaci ed attenti penetratori del mondo delle specie e delle forme? Un posto di eccezione. Sarei, in verità, portato ad ammettere che si tratti di una posizione unica, di un insediamento all'apice della piramide dei valori, intesi, naturalmente, nell'ambito del nostro secolo. E non credo, con questa affermazione, di abbandonare il solido terreno delle realtà dimostrabili.

Considerate l'enorme numero di specie e di generi da Lui descritti in quattro classi diverse di Artropodi: Crostacei, Aracnidi, Miriapodi ed Insetti; considerate che Egli è stato l'unico zoologo dei tempi moderni ad istituire due nuovi ordini di Insetti (quegli strani, anofalini e disantennati Proturi che, vuoi per il fenomeno di anamorfosi, vuoi per la presenza di glandole addominali di origine segmentale, vuoi per lo sbocco dei gonodotti fra 11° e 12° urosterno, vuoi per l'addome di dodici uriti, sono stati alternatamente collocati fra gli Insetti ed i Miriapodi, od anche, come volevano Berlese e Comstock, in una classe a sè dei Mirientomati, per rientrare poi, definitivamente a quanto pare, nell'aggruppamento nel quale Silvestri li aveva primieramente inseriti; e gli Zoratteri, chiamati in tal modo perchè al momento della scoperta gli individui d'ambo i sessi alati risultavano sconosciuti, curiosi esapodi ritenuti, da alcuni, insetti subsociali); considerate infine, e sovra ogni altra cosa, lo stile di tutti i suoi studi, che investono in pieno ed integralmente le caratteristiche strutturali delle forme che Egli osservava, e così facendo, oltre che porre basi ferree al procedimento descrittivo, rivelano una somma di comportamenti morfologici per lo innanzi ignorati, e conseguentemente le norme evolutive ed adattative di un mondo sterminato ed eterogeneo di organismi che hanno raggiunto, nella conquista della vita sulla Terra, cime elevatissime.

L'importanza di codesto sistema di lavoro, che, si può dire, egli instaurò fra i primi, se non per primo, fra i ricercatori di tutte le nazioni, risalta ancor più quando si pensi: innanzi tutto all'enorme numero di Insetti che popolano il nostro pianeta (un milione all'incirca di specie attualmente descritte ed almeno cinque volte tanto di specie effettivamente esistenti), e che ci sono in massima parte sconosciuti nella loro intima e complessa costituzione, nella loro sconcertante plasticità adattativa, nel loro sviluppo, nelle loro abitudini, nei loro cicli, nei loro intricati rapporti con gli altri esseri viventi, nei loro istinti prodigiosi; in secondo luogo al fatto che avendo Egli insistito a lungo, nel modo che si è detto, nell'analisi di questo o quel gruppo sistematico (i Dipluri, ad esempio, ed i Tisanuri fra gli Insetti Atterigoti; gli Isotteri fra gli Insetti Pterigoti; i Chilopodi ed i Diplopodi fra i Miriapodi), o di questo o quel gruppo biologico (i « termitofili », ad esempio), la sua produzione in materia finisce col costituire non solo un poderoso contributo sistematico, ma altresì un grande apporto alla conoscenza della morfologia comparata dei complessi su indicati, nonchè, per quanto riguarda i « termitofili », a quella delle straordinarie e talora paradossali modificazioni che la vita condotta nell'interno delle tenebrose dimore degli Isotteri, ed i rapporti trofici contratti con gli ospiti, hanno indotto negli Artropodi costituenti queste famose biocenosi.

Sebbene con intensità e frequenza assai minori (se si istituisce il confronto con le sue ricerche di morfologia esterna), pur tuttavia Egli non tralasciò mai di indagare anche la struttura interna degli organismi studiati, sia per sviscerarne più profondamente la natura (allorchè si trattava, ad esempio, di istituire ordini od altri grandi complessi sistematici nuovi), sia quando aveva a che fare con l'insorgere di organi anormali o con l'esaltazione ipertelica di altri. Una sol volta la ricerca anatomica fu da Lui condotta con finalità monografica. Mi voglio riferire alla nota e grossa memoria sui segmenti, il tegumento ed i muscoli dei Miriapodi Diplopodi, stampata nel 1903.

Accanto a tali investigazioni meritano di essere ricordate quelle embriologiche intese a delucidare il problema del numero dei segmenti cefalici degli Artropodi, nonchè del numero e delle omologie delle loro appendici, problema sul quale nemmeno oggi vi sono accordi di vedute fra gli scienziati. Iniziate nell'opera testè citata (1903), a riguardo del Diplopodo *Pachyiulus communis* Savi, furono riprese trenta anni più tardi, nel 1932, con uno studio sullo sviluppo di un Dipluro, lo *Japyx major* Grassi, corredato dai necessari confronti col comportamento dei Miriapodi Chilopodi (*Scolopendra cingulata* Latr.) e dei Crostacei Isopodi (*Ligia italica* F.). Egli confermò le vedute di Philiptschenko (1912), contrarie all'accettazione dei reperti di Hansen (1893-30) sull'esistenza nel cranio degli Insetti di un somite maxillulare, ed omologò le mandibole dei Crostacei Malacostraci con le appendici (perdute) del segmento intercalare degli Insetti; le maxillule, le mascelle del 2° paio ed i piedi mascellari dei primi, rispettivamente, con le mandibole, le mascelle del 1° paio e quelle del 2° paio dei secondi; infine le zampe mascellari dei Miriapodi Chilopodi col primo paio di zampe dei Crostacei Isopodi, dei Miriapodi Diplopodi e degli Insetti.

I lavori pubblicati da Silvestri nel campo dell'eto- e dell'ecologia riguardano quasi esclusivamente specie aventi importanza economica, perchè dannose a piante coltivate o perchè utili, quali simbrionti antagonistici di fitofagi nocivi. Fanno eccezione alcune note sulle Tèrmiti ed alcune sulle Melipone. Nel mio discorso del 6 novembre io ho già avuto occasione di rammentare come questi contributi abbiano inaugurato, in certo modo, una nuova età, ponendo una base granitica e puramente scientifica alla risoluzione di problemi pratici, e come abbiano costituito un'iniziativa che ha avuto varie e sensibili ripercussioni nel mondo fitopatologico. Il Nostro condusse codeste indagini utilizzando gli stessi metodi da noi precedentemente posti in rilievo, ma estendendo naturalmente l'esame agli stadi preimmaginali delle forme incriminate ed a tutti i loro simbrionti, che gravitano direttamente od indirettamente su di esse, in un intricato groviglio di contese e di eliminazioni.

L'ultima opera dello Scomparso che dobbiamo prendere in considerazione ha per oggetto gli Strepsitteri e fu compiuta in età avanzata, allorchè Egli trapassava lentamente alla vecchiaia. Va annoverata fra le più importanti della sua produzione.

Gli Strepsitteri sono Insetti a vistosissimo dimorfismo sessuale e straordinariamente modificati in dipendenza della vita parassitica, ma le cui affinità, nel sistema degli Esapodi, risultano tutt'ora oscure. Dal 1892, dall'anno cioè in cui

Nassonov diede alle stampe la sua celebre memoria sullo *Xenos vesparum* Rossi, non si era molto progrediti al riguardo, e quando Silvestri iniziò, nel 1939, i suoi studi, ciò che costituiva il dominio delle nostre conoscenze si riduceva ad un complesso di notizie un po' sconnesse ed oltremodo incomplete (per lo meno rispetto alle forme più primitive dell'ordine). Silvestri prese le mosse da una scoperta dell'entomologo e morfologo belga Fritz Carpentier, che, nel 1939, fece conoscere un fatto nuovo ed inaspettato, l'endoparassitismo cioè dei Mengenillini (le forme meno modificate a cui ho accennato) a carico di Insetti Atterigoti, e precisamente di Tisanuri Lepismoidei. Data la familiarità che il Nostro aveva con questi ultimi, gli dovette riuscire facile, risvegliata l'attenzione, esplorare il campo. Infatti i primi successi delle sue ricerche, eseguite nelle terre calde del sud, lo portarono gradualmente ad affrontare il problema nella sua totalità ed a rivelarci ciò che oggi, per suo merito, sappiamo; vale a dire il comportamento biologico e lo sviluppo di due specie, l'*Eoxenos Laboulbenei* Peyerimh. e l'*Halictophagus tettigometrae* Silv., le quali, rappresentando, rispettivamente, le superfamiglie dei Mengeoidei e degli Stilopoidei, ci illuminano a riguardo dell'ordine intero. In proposito è necessaria qualche delucidazione.

I Mengeoidei posseggono femmine neoteniche, fornite di occhi, di antenne, di zampe, di vulva, ma attere. Vivipare e semoventi, conducono vita libera. Questi Strepsitteri si evolvono, come ho detto, a spese di Tisanuri Lepismoidei e presentano una delle più impensate modalità di accoppiamento e di fecondazione che si possa immaginare. Il maschio introduce l'organo copulatorio in una qualsiasi parte del corpo della sua compagna, attraversando il tegumento ed iniettando gli spermatozoi nell'emocele, dove, dopo l'avvenuta disintegrazione degli ovari, si trovano le uova allo stato di oocite di 1° ordine, libere ed immerse nell'emo-linfa. Il reperto non costituisce a dire il vero una novità assoluta nel campo zoologico, giacchè alcuni bassi Metazoi delle classi dei Turbellari (Rabdoceli, Tricladi e Policladi) e dei Rotiferi godono di capacità simili, ma appare tuttavia, in relazione con l'elevatissimo grado gerarchico che gli Insetti occupano nel sistema dei viventi, estremamente interessante. Prima che esso fosse stato posto in luce, e nella difficoltà di immaginare un modo plausibile di fecondazione, si supponeva da parte di alcuni autori (Perkins, Nassonov, Brues, Smith, Hamm, ecc.) che la riproduzione degli Strepsitteri fosse prevalentemente od esclusivamente partenogenetica. Le larve dei Mengenillidi, sgusciate che siano dall'uovo, fuoriescono all'aperto per la vulva materna e vanno in cerca dell'ospite. Sono larve a « facies » triungulina (assomiglianti, cioè, a quelle dei Coleotteri impermetabolici delle famiglie dei Meloidi e dei Ripiforidi), le quali, una volta raggiunto il lacunoma della vittima, vi si sviluppano, trasformandosi in forme totalmente diverse dalla prima e passano per tre età. Allora abbandonano la *Lepisma* e raggiungono successivamente un quarto stadio postembrionale e quello di immagine.

Gli Stilopoidei hanno invece le femmine profondamente involute, catame-taboliche cioè, senza occhi, senza antenne, senza vulva, attere, apode, a corpo pressochè insegmentato e ad apparato boccale, organi sensoriali e muscoli subatrofizzati. Restano racchiuse vita natural durante dentro le cuticole dei due ultimi stadi preimmaginali, con l'ausilio delle quali formano ventralmente una sorta di

camera, in cui sfociano alcune invaginazioni ectodermiche segmentali, chiamate «tubi larvesuttori». Gli Stilopoidei vivono parassiti di Ortotteri, Mantoidei, Emitteri ed Imenotteri (per quanto oggi si sa) ed i maschi fecondano le femmine introducendo l'organo copulatorio attraverso una membrana cefalo-protoracica, ed approfittando del fatto che le loro compagne, se non abbandonano mai l'ospite in cui si sono sviluppate, ne sporgono però in parte una volta mature dopo avere sfondato una membrana intersegmentale. Le larve neosgusciate nel lacunoma fuoriescono per la via dei «tubi larvesuttori» e della camera ventrale e guadagnano la libertà attraverso quella membrana cefalo-protoracica che il maschio aveva precedentemente aperta onde fecondare la femmina. Il loro ulteriore destino assomiglia a quello dei Mengeoidei.

Studiando, nel 1943, la morfologia dell'uovo, la sua maturazione ed i primi stadi di sviluppo dell'*Halictophagus tettigometrae* Silv., Silvestri ha inoltre trovato che l'uovo di questa specie è circondato da una robusta membrana formata da poche cellule appiattite, la quale, sprovvista come è di micropili, viene attraversata in un punto qualsiasi dallo o dagli spermatozoi.

Tutti i biologi conoscono i contraccolpi e gli effetti di varia natura che la presenza degli Strepsitteri determina nelle loro vittime; tutti conoscono ugualmente le varie ipotesi che sono state prospettate per spiegarne il determinismo. Ci si rende pertanto facilmente conto dell'importanza, per la biologia generale, dei risultati che Silvestri ha conseguito, inquadrando lo sviluppo ed i cicli vitali di questi Insetti nella cerchia di fatti sicuramente accertati.

Ho terminato così la rassegna, obbligatamente breve, dell'opera sua. Credo che essa sia stata però sufficiente a delineare, nello sfondo del nostro tempo, la figura di Filippo Silvestri come una delle insigni che la sacra Terra nostra ha creato in ogni epoca per il decoro del genere umano. Ora Egli ha chiuso la sua fatica di lavoratore insonne, ha cessato di varcare gli oceani, ha cessato di contemplare con gli occhi lucenti le meraviglie della vita, ed ha raggiunto nel silenzio i grandi Spiriti che lo hanno preceduto nei misteri dell'eternità. Con lui tramonta l'ultimo astro della scuola entomologica italiana, che pure ha diffuso nel mondo la luce del suo genio e della sua dottrina. Le schiere, purtroppo, si assottigliano e gli orizzonti si abbuiano. Bisognerà che i giovani, ai quali è affidato il nostro avvenire sulla Terra, si temprino ai sacrifici che la scienza impone per non dover chiudere i templi della sua gloria.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente porge un cordiale saluto al Socio Straniero Sierpiński dell'Università di Varsavia che è presente alla seduta.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente comunica quindi che la signora Penca Vencova Cicognani, vedova del Colonnello dei Carabinieri Carlo Cicognani, ha richiesto, con sua lettera in data 7 marzo corrente anno, in conformità del testamento olografo del predetto compianto Colonnello, l'apertura del plico suggellato presentato dallo stesso all'Accademia l'11 giugno 1930. Poichè la signora è attualmente all'estero e impossibilitata a venire in Italia, ha delegato, per assistere all'apertura del plico di cui trattasi, l'avv. Bruno Cicognani, cugino del defunto. Preso atto che l'avv. Bruno Cicognani è presente alla seduta, il Presidente procede all'apertura del plico che risulta composto di un manoscritto di dieci facciate relativo a un sistema di cura dei mali che hanno manifestazioni esterne a base di pus.

Il Presidente propone, e la Classe approva, che il lavoro di cui trattasi sia esaminato dal Socio Rondoni perchè riferisca in una delle prossime sedute.

Il Socio Rondoni accetta.

Il Presidente informa quindi che il dott. Andrés LeviaIdi, del quale un plico suggellato fu presentato alla Classe nella seduta del 13 marzo 1950 dal Socio Giorgi, ha richiesto, con sua lettera del 13 aprile corrente anno, di effettuare l'apertura dello stesso.

Il Presidente pertanto procede a detta apertura e il plico risulta composto di una monografia dattiloscritta di 152 pagine dal titolo: «Luminiscenza - Esposizione generale delle proprietà dei solidi inorganici dotati di luminiscenze» (Prologo - ing. Cortés Pla, Vice Rettore dell'Università del Litorale, Decano - Professore della Facoltà di Scienze Fisiche e Matematiche. Traduzione dallo spagnolo del prof. Giorgio LeviaIdi - Edizione italiana rivenduta e aggiornata dall'Autore). Detta monografia è inoltre corredata da 68 figure.

Il Presidente propone, e la Classe approva, che il lavoro di cui trattasi sia esaminato dai Soci Giorgi ed E. Amaldi, perchè riferiscano in una delle prossime sedute.

Poichè entrambi i Soci non sono presenti alla seduta, il Presidente si riserva di comunicare agli stessi quanto sopra.

Sempre in merito ai plichi suggellati, il Socio Signorini dichiara che riferirà nella prossima seduta intorno al contenuto del plico suggellato inviato dal sig. Giuseppe Tupone e aperto nella seduta di Classe del 15 aprile c. a.

PRESENTAZIONI DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Pensa, Sierpiński, Abetti, Caglioti, Cotronei, Bompiani, Sergi, Boaga, Califano e Signorini.

Il Segretario Accademico legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CAGLIOTI V. e LIQUORI A. M., Ricerche strutturalistiche sul manganimolibdato d'ammonio (pres. dal Corrisp. V. CAGLIOTI).

CICALA P., Sulle deformazioni plastiche (pres. dal Socio M. PANETTI).

COLACEVICK A., Il sistema doppio DM Persei (pres. dal Socio G. ABETTI).

COSSU A., Sulla curvatura delle varietà a tre dimensioni dotate di una connessione affine (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

FADINI A., Gli S_r -duali e le varietà di Segre degli S_p biduali (pres. dal Socio G. GIORGI).

GIGANTE D. e CERQUIGLINI S., Contributo alla conoscenza dei rapporti tra asfissia e tumori (pres. dal Socio G. COTRONEI).

KRANJC A., Proprietà grupali del tensore energetico. Nota II (pres. dal Socio G. GIORGI).

LEVI E., Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee (pres. dal Corrisp. G. ASCOLI).

LIBERTI A., Titolazione amperometrica dell'acido p-ammino salicilico con bromato potassico al microelettrodo rotante di platino (pres. dal Corrisp. V. CAGLIOTI).

LIBERTI A. e CERVONE E., Titolazioni amperometriche con mercapto-benzotiazolo (pres. dal Corrisp. V. CAGLIOTI).

MINEO M., Paragone metrico d'intorni superficiali (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

PALUMBI G., Nuovi particolari sul comportamento delle fibre nervose nevrassiali e simpatiche nel labirinto umano (pres. dal Socio A. PENSA).

PLACINTEANU J., Sur le processus d'association des particules élémentaires (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

PONTREMOLI S. e MONTINI T., Intensità dei processi combustivi e quoziente respiratorio di ratti parzialmente epatectomizzati e plenectomizzati (pres. dal Socio U. LOMBROSO).

RUOTOLO A., Contributo allo studio dei dispositivi di blocco e dei corti circuiti della circolazione del rene umano (pres. dal Socio S. SERGI).

SABAN G., Sulle varietà quasi-asintotiche. I. — Proprietà elementari collegate alla nozione di specie (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

SABAN G., Sulle varietà quasi-asintotiche. II. — Varietà subordinate di varietà quasi-asintotiche (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

SBRANA F., Su un problema di integrazione delle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

TORALDO DI FRANCIA G., Realtà fisica di una varietà di Fermat pseudosferica (pres. dal Socio A. SIGNORINI).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Negri, anche a nome del Collega Chiarugi, legge la relazione sulla Memoria di R. P. Sermolli dal titolo: « Ricerche botaniche ». - I. Le fanerogame raccolte nel bacino del Lago Tana, Semièn Tucur Dinghià, che costituirà il volume VII della missione di studi al Lago Tana.

La relazione, con la quale si propone la pubblicazione della Memoria, è approvata all'unanimità.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Accademico illustra le pubblicazioni inviate in omaggio, mettendo in particolare evidenza l'opera « Palaeozoologica Groenlandica », parte II, del prof. Erik Stensiö » in due volumi, rispettivamente contenenti il testo e le tavole, l'opera « Sicilia » (I « La terra »; II « Il clima »; III « L'uomo ») di Francesco Pollastri, alcuni studi del compianto Socio Silvestri e un estratto dalla « Rivista di parassitologia », vol. XI, n. 1 di Giuseppe Russo dal titolo « Filippo Silvestri ».

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 13 maggio 1950

- ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE.
— *Comemorarea savantului I. P. Pavlov*.
București, 1949. Pp. 36, in-8.
- L' *Agricoltura Italiana*. — Numero speciale per la riforma fondiaria — A. I, 1950, nn. 6-7.
- BRADFORD B. — Vedi: WHITNALL A. B. M. and BRADFORD B.
- BUSCALIONI Luigi. — *Amenità universitarie ed accademiche*. Bologna, Tip. S. A. B. 1949. Pp. 30, in-8°.
- CHAPMAN Kenneth. — *The Place of Biology in University*. Estr. de «The Universities Review», vol. XXI, 1949, n. 3.
— «*Taenia in Man in South and East Africa: a Survey of the Present Position and of Experimental Work as a Basis for Immunization of Larval Hosts*. Estr. da «Annals and Magazine of Natural History», ser. 12^a, vol. I, 1948.
- «DOXA». — *Inchiesta sulle abitudini e preferenze dei fumatori italiani*. Milano, Edizioni Doxa, 1950. Pp. VII-39, in-8°.
- GAGLIARDINI Gemma. — *Istituti e Preventori dell'Opera Nazionale Maternità e Infanzia*. Articoli estratti da «Maternità e Infanzia».
- GLAHOLM J. — Vedi: OMER — COOPER J., WHITNALL A. B. M. and GLAHOLM J.
- LUTZ Bertha. — *Anfibios da Coleção Adolpho Lutz*. — II. *Espécies de Gênero HYLIA do Leste-Meridional do Brasil*. Estr. da «Memorias do Instituto Oswaldo Cruz», vol. XLVI, 1948, n. 3.
— *Anfibios Anuros da Coleção Adolpho Lutz*. — III. *Hyla claresignata Lutz & B. Lutz, 1939*. Estr. da «Memorias do Instituto Oswaldo Cruz», vol. XLVI, 1948, n. 4.
— *A ontogênese dos Anfíbios Anuros e a evolução terrestre dos vertebrados*. Estr. da «Boletim do Museo Nacional. Rio de Janeiro» in-8°, 1949, n. 91.
- MINISTERO DIFESA-MARINA. — *I propellenti liquidi per motori a reazione*. La Spezia, Mariperman, 1950, Pp. 63, in-8°.
- MORANDI Luigi. — *Les engrais azotés: situation et problèmes d'après guerre*. Milano, 1949. Pp. 23, in-8° (Vème Conference Internationale des engrais chimiques... Zürich, 4-8 Août, 1949).
- OMER-COOPER Joseph. — *The Armstrong College Zoological Expedition to Siwa Oasis (Libyan Desert) 1935. General Report*. Estr. de «Proceedings of the Egyptian Academy of Sciences», vol. III, 1947.
— *Dessication*. Estr. de «Veld Trust News», vol. IV, 1948, n. 9.
— *Does destruction of water insects cause increase of Trematode disease?* Estr. da «The Entomologist's Monthly Magazine», vol. LXXXV, 1949.
— *Report of the colouration of desert animals*. Estr. da «Bulletin de l'Institut d'Egypte», vol. XXX, 1947-48.
— *Report on the Relationship between Predator and Prey*. Estr. da «Bulletin de la Société Entomologique Fouad I^{er}», vol. XXXII, 1948.
- OMER-COOPER F., WHITNALL A. B. M. and GLAHOLM J. — *Natural Control of Red Scale*. Estr. da «The Citrus Grower», 1946.
- OPERA NAZIONALE PER LA PROTEZIONE DELLA MATERNITÀ E INFANZIA. — *Attività e Istituzioni assistenziali nel 1948 e confronti per l'undicennio 1938-1948 con dati provvisori sulle Istituzioni sorte nel 1949*. Estr. da «Maternità e Infanzia», 1949, nn. 5 e 6.
- PALLOTTI Giuseppe. — *Un'inderogabile esigenza dell'Astronomia Siderale e della Scienza Fisica*. Albino (Bergamo). Pp 20, in-4°.
- POLLASTRI Francesco. — *Sicilia*. Notizie e commenti ecologici di agricoltura siciliana. Palermo. Industrie Riunite Editoriali Siciliane, 1948, Voll. 3, in-8°.

- PONTE Gaetano. — *Riassunto delle principali osservazioni e ricerche fatte sull'Etna*. Estr. da « Bulletin Vulcanologique », s. 2^e, t. IX, 1949.
- RUSO Giuseppe. — *Filippo Silvestri*. Estr. da « Parassitologia », vol. XI, 1950, n. 1.
- SILVESTRI Filippo. — *I problemi della lotta biologica nell'Europa continentale*. Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia Agraria di Portici », vol. IX, 1950.
- *Segmentazione del corpo dei Colobognati [Diplopodi]*. Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia Agraria di Portici », vol. IX, 1950.
- STENSIÖ Erik A: son. — *On the Placoderms of the Upper Devonian of East Greenland*. II. *Antiarchi: Subfamily Bothriolepinae*. . . . København, C. A. Reitzel, 1948. Voll. 2 (il 2^o di tavole), in-8^o.
- WHITNALL A. B. M. — Vedi: OMER-COOPER Y., WHITNALL A. B. M. and GLAHOLM Y.
- WHITNALL A. B. M. and BRADFORD B. — *An Arsenic-Resistant Tick and its Control with «Gammexane» Dips*. Estr. da « Bulletin of Entomological Research », vol. XL, 1949, p. II.
- *Is There an Arsenic-Resistant Tick?* Survey of experimental work. Estr. da « The Farmer's Weekly », 1945.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 3 giugno 1950

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Fisica. — *A proposito di una Nota di Orestina Garavaldi.*
Nota (*) del Socio QUIRINO MAJORANA.

La d.ssa O. Garavaldi⁽¹⁾, riferendosi ad una mia precedente Nota⁽²⁾, sulla relatività di Einstein, contesta l'attendibilità delle mie asserzioni. Anche per l'autorità del nome del presentatore, il prof. G. Giorgi, ritengo opportuno replicare a quanto la Garavaldi espone. È noto il quasi generale consenso che la detta teoria riscuote. Forse in conseguenza di ciò, non si sogliono prendere in considerazione le obiezioni che si sono formulate contro di essa. Di solito, si considera preferibilmente l'elegante aspetto matematico della teoria, senza cercare di riflettere se il 2° postulato di essa possa dar luogo alle contraddizioni di carattere fisico, delle quali ho avuto occasione di mettere in evidenza le principali. È da osservare che trattandosi di un argomento non di puro carattere matematico, ma che ha stretti legami con la realtà fisica, il procedimento matematico dovrebbe tener conto delle dette contraddizioni. Se esse sono reali, esso non è accettabile.

Forse la lunga abitudine di considerare i fatti e gli esperimenti fisici, mi ha orientato decisamente contro la relatività di Einstein. So, d'altronde, che numerosi ed autorevolissimi cultori di fisica e di matematica sono dello stesso mio avviso.

Prima di esaminare quanto la Garavaldi dice nella sua Nota, è bene che io enunci chiaramente un principio fisico-logico che è implicito nella mia Nota e che deve essere accettato da chiunque; esso non può venire a mancare per l'adozione di qualsiasi teoria, e può così formularsi:

(*) Presentata nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) Questi «Rendiconti», vol. VIII (marzo 1950), pp. 226-228.

(2) Id., vol. V (novembre 1948), pp. 211-215.

« Due osservatori appartenenti a due sistemi rigidi (o piattaforme, secondo la impropria dizione adottata da qualcuno) reciprocamente in moto qualsiasi (rettilineo, curvo, uniforme, accelerato), che in un certo istante si incontrano (cioè vengono a coincidere nello spazio e nel tempo), osservano in tale istante le stesse modalità del mondo esteriore ».

In applicazione di tale principio, siano A, A' i detti due osservatori. Supponiamo che essi, incontrandosi, rilevino che entrambi i loro due orologi segnino, per esempio, l'ora zero. Più tardi avverrà l'incontro di altri due osservatori, B, B' , che hanno i loro orologi, rispettivamente concordi con quelli di A ed A' . Secondo la relatività, B dirà che l'orologio di B' è *indietro* rispetto al proprio; mentre B' dirà esattamente il contrario. Tenendo conto del principio enunciato, una tale conclusione è inaccettabile. Nè si può ammettere che il moto di uno dei sistemi rappresenti qualcosa di assoluto: ciascuno di essi è in moto rispetto all'altro; non ha senso parlare di moto di uno di essi, se non si considera l'altro. Non ha pure senso affermare che un orologio che viaggi con grandissima velocità, sia pure come quella della luce, si arresti nel suo battito, come dice Einstein. Che un orologio batta o non batta il suo tempo costituisce un fatto assoluto e non relativo ad un altro sistema. Si tratta sempre di una evidentissima contraddizione, a cui la relatività dà luogo.

Ma possiamo considerare il moto relativo fra due sistemi rigidi, S, S' , in altra guisa. In essi, si trovino rispettivamente gli osservatori A, B , ed A', B' . Suppongasi, che per il moto dei due sistemi, A incontri A' e B incontri B' . È possibile che tali incontri avvengano simultaneamente, per il sistema S : ciò è ammesso anche dalla relatività. Ma tale teoria aggiunge che, se si verifica la simultaneità per il sistema S , ciò non succede per il sistema S' . Entra in giuoco così, la cosiddetta relatività della simultaneità. Una simile asserzione non è da accettarsi. Infatti, i due sistemi sono esattamente nelle stesse proprie condizioni, salvo il fatto della loro reciproca velocità. Possiamo ammettere che gli osservatori A, B, A', B' , siano esseri ragionevoli, che, per esempio, segnino su appositi registri, i fatti che osservano. Quando, per una qualsiasi ragione, il moto dei sistemi è terminato, si leggerà sui detti registri che, mentre A e B avevano giudicato gli incontri contemporanei, A' e B' li avevano riconosciuti spostati nel tempo. Per cui, quella assoluta simmetria, che dovrebbe essere implicita fra i due sistemi, viene a mancare. Quale ragione vi può essere infatti, perchè i due sistemi giudichino diversamente i fatti che si svolgono in essi? La teoria relativistica conduce dunque ad un'altra contraddizione.

Per difendere la relatività la Garavaldi considera che un sistema che era in quiete, rispetto ad un altro, quando viene ad essere dotato di velocità uniforme, deve necessariamente venire accelerato, per un certo tempo. Per tale accelerazione, dice la Garavaldi, le condizioni dei due sistemi non sono più identiche. Essa intende che l'accelerazione abbia, in qualche modo, alterato uno di essi. Se così fosse, la teoria della relatività si baserebbe su alterazioni che un moto accelerato avrebbe causato, in almeno uno dei due sistemi. Vi sarebbe dunque fra essi, una certa dissimmetria fisica, che verrebbe considerata, per spiegare le ammissioni relativistiche.

Ma nulla giustifica veramente una simile asserzione. È bensì vero che, praticamente, se si accelera un sistema, si occasiona in esso qualche deformazione, principalmente dovuta al punto singolo od ai punti in cui la forza acceleratrice viene applicata. Ma se tale forza è applicata a tutte le ultime particelle del sistema, proporzionalmente ai valori delle loro masse elementari, la nostra più semplice intuizione fisica ci fa comprendere che nessuna alterazione si debba avere. Così succede, per esempio, se un orologio cade: durante la sua caduta, esso seguita regolarmente a battere il suo tempo.

E inoltre, prescindendo da eventuali alterazioni che possano venir occasionate da una accelerazione impressa al sistema, dovrebbe questo continuare a subire gli effetti di quella, anche se essa cessa ed il moto diventa uniforme? Se consideriamo un vibratore naturale (come potrebbe esser un vapore eccitato, che emette righe spettrali) pensa la Garavaldi che esso, per l'accelerazione subita una volta, abbia mutato il ritmo delle sue vibrazioni? Ne deriverebbe che il periodo di quel vibratore in moto, verrebbe a dipendere dalla *storia* delle sue precedenti accelerazioni. Così, la frequenza di un vapore eccitato dovrebbe dipendere dalle accelerazioni che esso ha subito in precedenza. Ciò è del tutto inammissibile.

Si potrebbe pensare che tali variazioni non siano che apparenti; cioè così giudicate da un osservatore sito in altro sistema, in moto relativo. Ma se si ammette ciò, è evidente che si ricade nella perfetta simmetria dei due sistemi reciprocamente in moto; e si viene a lasciar da parte quanto la Garavaldi dice, circa gli effetti dell'accelerazione. Si cade allora nelle considerazioni che discendono dal principio prima enunciato.

Non discuto quanto altro la Garavaldi espone, giustificandola, in certo modo, nel voler seguire la corrente dominante di opinioni, a favore delle teorie di Einstein. Ma è opportuno ancora osservare che oggi la teoria della relatività è generalmente accettata, oltre che per il lungo tempo decorso da quando fu enunciata, per i controlli che di essa avrebbe dato l'esperienza. Fra questi, primeggia la trasformazione della massa in energia e viceversa. Nel fare tale asserzione, si trascura di considerare che Einstein, formulando il concetto della equivalenza di enti fisici così primordiali, ha introdotto una nuova ipotesi fisica, che nulla ha a che fare con le premesse della relatività. Per spiegare le dette pretese verifiche, si possono formulare delle ipotesi, sulle quali non posso fermarmi in questa Nota.

Intanto, è interessante rilevare quanto oggi sia difficile rimuovere i relativisti dai loro convincimenti. Forse, soltanto qualche nuovo fatto, rappresentante l'*experimentum-crucis*, potrebbe indurli a mutar parere.

Ed in questo senso sto compiendo da tempo ricerche sperimentali, grazie all'ospitalità cortese del prof. Giorgio Valle, Direttore dell'Istituto Fisico « A. Righi » di Bologna. Ma, per la mancanza di mezzi idonei, che non mi sono stati concessi, e che, per quanto io possa, debbo da me crearmi, non so quando il mio lavoro potrà concludersi.

A parte ciò è ovvio che, in tanto contrasto, l'esperienza debba comunque dire l'ultima parola; da ciò deriverà sicuro progresso della Scienza.

Geologia. — *Il Permico in Sardegna.* Nota (*) del Corrisp.
SILVIO VARDABASSO.

Col piazzarsi del grande plutone granitico, verso la fine del piegamento ercinico, nel centro dell'attuale Mediterraneo occidentale, è stato — per così dire — segnato anche il destino geologico della Sardegna.

È verosimile cioè che questa, per una relativa maggiore rigidità, abbia potuto conservare nella geosinclinale mesozoica una posizione tutta particolare, propria di una terra tendenzialmente poco suscettibile ad essere sommersa dal mare e piegata; come infatti lo attesta il carattere epicontinentale della sua serie stratigrafica mesozoica poco potente, lacunosa e per lo più tuttora in giacitura orizzontale.

Così a differenza dell'altra grande isola mediterranea — la Sicilia — una spiccata continentalità della Sardegna è chiaramente manifesta già nel Permico: ai calcari marini a cefalopodi della prima fanno riscontro depositi clastici, terrigeni, a piante anche con giacimenti di antracite, nella seconda.

A ribadire e documentare meglio questa caratteristica — del resto da tempo riconosciuta per la Sardegna — riporto qui qualche considerazione ed osservazione, risultato di ricerche fatte in questo ultimo ventennio in occasione di un rilevamento geologico generale dell'Isola, da me intrapreso e del quale provvisoriamente ho pubblicato proprio ora un'edizione in scala ridotta, che mi onoro presentare in omaggio all'Accademia (1).

Il riconoscimento però dell'appartenenza al Permico di piccoli affioramenti, sparsi discontinui per lo più privi di fossili, è un problema punto semplice, anche perchè in difetto del criterio paleontologico bisogna ricorrere a quelli litologico e paleogeografico. Senonchè di facies clastiche è ricca la serie stratigrafica sarda appunto in relazione con la breve durata dei cicli sedimentari a sua volta riflesso della continentalità, di cui si è detto.

In Sardegna, come del resto sopra altri massicci d'Europa, la sedimentazione del Permico si è svolta tra le due ultime fasi del relativo ciclo magmatico: la intrusiva, granitica, qui veramente cospicua e la effusiva porfirica finale, molto meno intensa. Si tratta più precisamente dell'accumulo di detriti di rocce cristalline, provenienti dal rilievo ercinico in via di demolizione.

Infatti il Permico sardo poggia in discordanza sopra complessi dislocati e metamorfosati di varia natura, secondo i settori: sopra arenarie quarzoso-micacee più o meno schistose e silicizzate (Postgotlandiano) rispettivamente sopra schisti filladici nella Nurra, sopra micaschisti o filladi (Silurico) nella Sardegna centro-orientale ed infine sopra schisti e calcari cambriaci nell'Iglesiente.

In nessun punto il Permico poggia sul granito e neppure sono stati trovati ciottoli granitici nel conglomerato basale. Questo è più spesso una puddinga ad

(*) Presentata nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) S. VARDABASSO, *Carta geologica della Sardegna*. Scala 1:750.000. Edita a cura della Società Elettrica Sarda. Roma (Stab. L. Salomone) 1949.

elementi di schisto e di quarzo, discretamente cementata, paragonabile alla facies del « Verrucano » alpino. Nel Gerrei però, dove affiorano largamente i porfiroidi, anche questi sono già rimaneggiati nel conglomerato permico (Rio Mulargia), mentre nell'Iglesiente prevale il detrito di calcari cambrici e subordinatamente anche quello della puddinga ordoviciana.

Tenuto conto della giacitura del sostrato ercinico, si constata che il Permico, per lo più tuttora orizzontale, è conservato con relativa frequenza entro arce sinclinali, di solito rappresentate da schisti neri gotlandiani, grafitoidi; circostanza questa che può avere indotto in errore nei lavori di ricerca di giacimenti di antracite, specialmente quando urgevano le realizzazioni autarchiche.

Considerando queste giaciture dal punto di vista paleogeografico, si può arguire che il rilievo ercinico, per quanto poco pronunciato, nel Permico rispecchiasse ancora abbastanza bene la tettonica, se veramente le depressioni, nelle quali di preferenza si sono accumulati quei sedimenti clastici, corrispondono a sinclinali.

D'altra parte pare che i centri delle successive eruzioni porfiriche abbiano coinciso piuttosto con sollevamenti anticlinali, da dove le lave si sarebbero riversate verso i circostanti bacini. Comunque, un principio di metamorfismo di contatto, dovuto alla venuta dei porfidi permici, è manifesto nell'indurimento della puddinga basale talvolta da questi iniettata ed inglobata. In qualche caso però la presenza di brecce a frammenti di schisto entro i porfidi e i loro tufi, riferibile a fenomeni di esplosione, può dar adito a confusione con la sottostante facies clastica sedimentare, poco diversa. In rapporto poi con questo vulcanismo tardivo ritengo siano da porre anche piccole dislocazioni locali di singoli affioramenti permici; per quanto non si possa escludere in qualche bacino un normale fenomeno di assestamento dei sedimenti appena depositati.

Ciò premesso, passo ad una rapida rassegna del Permico sardo con l'aiuto dei grafici allegati. I particolari saranno sviluppati in altra sede.

Nurra [1] ⁽²⁾. — Su quel complesso cristallino ercinico poggia in netta discordanza una serie clastica non metamorfica, coperta a sua volta dal Mesozoico calcareo, fortemente dislocato per frattura.

Questa serie clastica, culminante orograficamente nella Punta lu Caparoni, è stata attribuita da qualcuno al Permico da altri al Trias inferiore, ultimamente al Permo-trias [11]. Si tratta dapprima di una puddinga di schisto e poi di un conglomerato quarzoso passante ad arenaria grossolana, sulla quale seguono arenarie variegata da rossastre a violacee. Il profilo meno incompleto è quello tra il Caparoni e la pianura circostante il Lago di Barazza al limite della bonifica di Fertilia (Alghero).

Entro questo complesso si conoscono anche scarsi affioramenti di lave porfiriche, mentre porfidi sicuramente in colata sono stati attraversati da un sondaggio negativo per la ricerca di antracite nell'attiguo settore di Porto Conte [8].

Come lo indica la fig. 1 (Tav. II), al Caparoni questa serie clastica è conservata in placche dislocate per frattura e inclinate in prevalenza a S. La presenza

(2) I numeri si riferiscono agli affioramenti segnati sulla cartina allegata (Tav. I).

di ciottoletti di porfido nelle arenarie variegata, stratigraficamente sovrastanti, ma ora per lo più coperte dalle alluvioni quaternarie della pianura, potrà forse permettere una separazione cartografica di questo Permio-trias con assegnazione delle arenarie al Buntsandstein.

Gallura [2]. - Sui monti alla destra del Campo del Coghinas nei territori di Aggius-Trinità d'Agultu e Bortigiadas affiora il più esteso complesso effusivo porfirico del Permico sardo, finora passato inosservato [16]. Questo attraversa e ricopre gli stessi schisti molto cristallini, che presso le terme di Casteldoria sono iniettati dal poderoso dicco di porfido granitico già segnalato dal Lamar-mora e recentemente oggetto di studio di altri.

Intercalati tra schisti e porfidi sono conservati anche scarsi lembetti di puddinga di schisto o di arenaria, residuo di una erosione del rilievo ercinico anteriore alla venuta delle lave.

Composizione e giacitura di questi sottili depositi clastici continentali sono del tutto simili a quelle del Permico della Barbagia. La fig. 2 (Tav. II) rappresenta nell'insieme questi rapporti nel territorio della Trinità.

Baronie [3]. - Al bordo degli altopiani granitici, che dalla Gallura si estendono fino al versante settentrionale del Gennargentu, sopra le filladi, i mica-schisti e i gneiss (Silurico metamorfico) sono conservate alcune zolle di calcari mesozoici, sulla tettonica dei quali, in rapporto con l'orogenesi alpina, ho richiamato ultimamente l'attenzione [17].

Questi calcari hanno protetto anche scarsi lembi di conglomerato di schisto. Così uno, invero minuscolo, affiora al piede SO del M. Albo in territorio di Lula [15], un altro sotto il M. Tuttavista di Orosei [1], dove però essendo lo schisto inglobato nel porfido permico di Castelpontes potrebbe anche trattarsi di breccia eruttiva.

Ogliastro [4, 5, 7, 8]. - In facies di Verrucano alpino, poco diversa da quella ben nota alla base dei porfidi di Trento e Bolzano, si ripresenta una puddinga di schisto fra Dorgali e Baunei [15]. La fig. 3 (Tav. II) ci mostra questo Permico clastico attraversato e coperto dal porfido, che a sua volta passa sotto i calcari mesozoici del Golfo di Orosei.

Nel territorio di Talana e Villagrande, dove poderosi filoni porfirici attraversano graniti e schisti, sono imprigionati nel porfido altri brandelli della stessa puddinga; così - ad esempio - nella Serra Isadalu poco sopra la vasca di carico della condotta forzata del grande impianto idroelettrico dell'Alto Flumendosa; altrettanto lungo la strada prima di incominciare la salita per Talana.

Ma è specialmente a S dell'ellissoide granitico dell'Ogliastro dove condizioni favorevoli per la conservazione del Permico continentale, protetto da colate porfiriche rispettivamente dai caratteristici tavolati di calcari giuresi (tacchi), si sono rivelate meglio che altrove, per cui mi è stato possibile segnalare tutta una serie di affioramenti passati prima inosservati [14].

Qui dal Capo Sfferracavallo (Tertenia) al ben noto giacimento di antracite di Perdasdefogu questa facies clastica è così frequente da far pensare ad una originaria copertura del rilievo ercinico più estesa che altrove. Ricordo qualche profilo caratteristico. Nella valle del Rio Pramma, alla base dell'espandimento porfirico di Monte Ferru presso Tertenia, la puddinga è compresa tra le filladi e le lave, localmente in facies brecciata (fig. 4, Tav. II). Altrettanto attorno al M. Cocumeu e sotto il M. Cobingius di Quirra, ancora nello stesso territorio, mentre presso il M. Code sulla strada Jerzu-Perdasdefogu sono conservate solo arenarie.

Non mi soffermerò sul giacimento di antracite di Perdasdefogu, già illustrato dal Lamarmora e poi oggetto di ricerche stratigrafiche, paleontologiche e minerarie da parte di parecchi autori [5, 7, 9]. Lo schizzo allegato (fig. 5, Tav. II) ci dà una visione parziale del bacino, nel quale la serie permica, più potente che altrove, è attraversata da grossi dicchi porfirici e coperta dal calcare giurese dei tacchi a sua volta colpito da fratture. Così la coltivazione del giacimento, consistente di sottili straterelli di combustibile intercalati, tormentati dalle eruzioni e dalle dislocazioni, è risultata in definitiva troppo onerosa.

Barbagia [6]. — Dal punto di vista economico invece si è potuto reggere senza difficoltà il giacimento di antracite di Seui. Di questo è stato pubblicato anche un discreto rilevamento [6]. Il potente complesso di lave e di tufi, culminante nel Monte Perdedu, che ha invaso e protetto il piccolo bacino di S. Sebastiano, ha interessato però anche il versante meridionale del Gennargentu, particolare da me riconosciuto solo in questi ultimi anni [17]. Ma qui sulla destra dell'Alto Flumendosa il Permico sedimentare manca; l'eruttivo poggia direttamente sugli schisti ercinici. La fig. 6 (Tav. II) può dare un'idea della limitata estensione del bacino di Seui: tutto attorno affiorano a quota più elevata schisti ordoviciani e porfidi, mentre sotto il Permico clastico (con la ben nota flora autuniana e le lenti di antracite) si trovano schisti gotlandiani. Le lave, in prevalenza facies basiche, lo hanno attraversato e coperto; non appare invece la coltre calcarea giurese, presumibilmente perchè erosa dopo le dislocazioni che l'hanno spezzettata e portata a notevole altezza.

Nei dintorni di Seulo però un altro piccolo bacino (Ingurtipani), indipendente dal primo, è tuttora in parte coperto dal calcare dei tacchi. Ma qui prevale la facies basale clastica; evidentemente la depressione dell'originario rilievo ercinico non era abbastanza ampia da permettere l'accumulo di detrito vegetale in tale quantità da dare origine a banchi coltivabili di antracite.

Del resto l'ineguaglianza del rilievo durante il Permico nell'attuale settore montuoso della Barbagia e dell'Ogliastra è manifesto oltre che dalla diversa potenza del deposito a breve distanza anche dalle facies litologiche prevalentemente grossolane conservate sotto il Toneri di Seui, il Tacco Arcueri di Ussassai e nel tratto intermedio fra il M. S. Vittoria di Esterzili e i tacchi di Jerzu (Genna Fustis, ecc.), secondo le osservazioni di Lamarmora da me integrate ed estese.

Gerrei [9]. — Condizioni poco diverse da quelle degli attigui settori settentrionali sono riconoscibili anche sui due versanti del Medio Flumendosa, specialmente dai dintorni di Ecalaplano fino verso Mandas.

Il Verrucano già riconosciuto da me qui sotto un complesso eruttivo attribuito al Terziario, è stato poi incontrato in più estesi affioramenti nella valle del Mulargia presso Orroli [2]. Il quesito se la parte alta di quella serie, accumulata entrò un antico bacino avente per base calcari e schisti gotlandiani nonchè porfiroidi, abbia a rappresentare — analogamente a quanto si è detto per la Nurra — anche il Trias inferiore, non può dirsi definitivamente risolto.

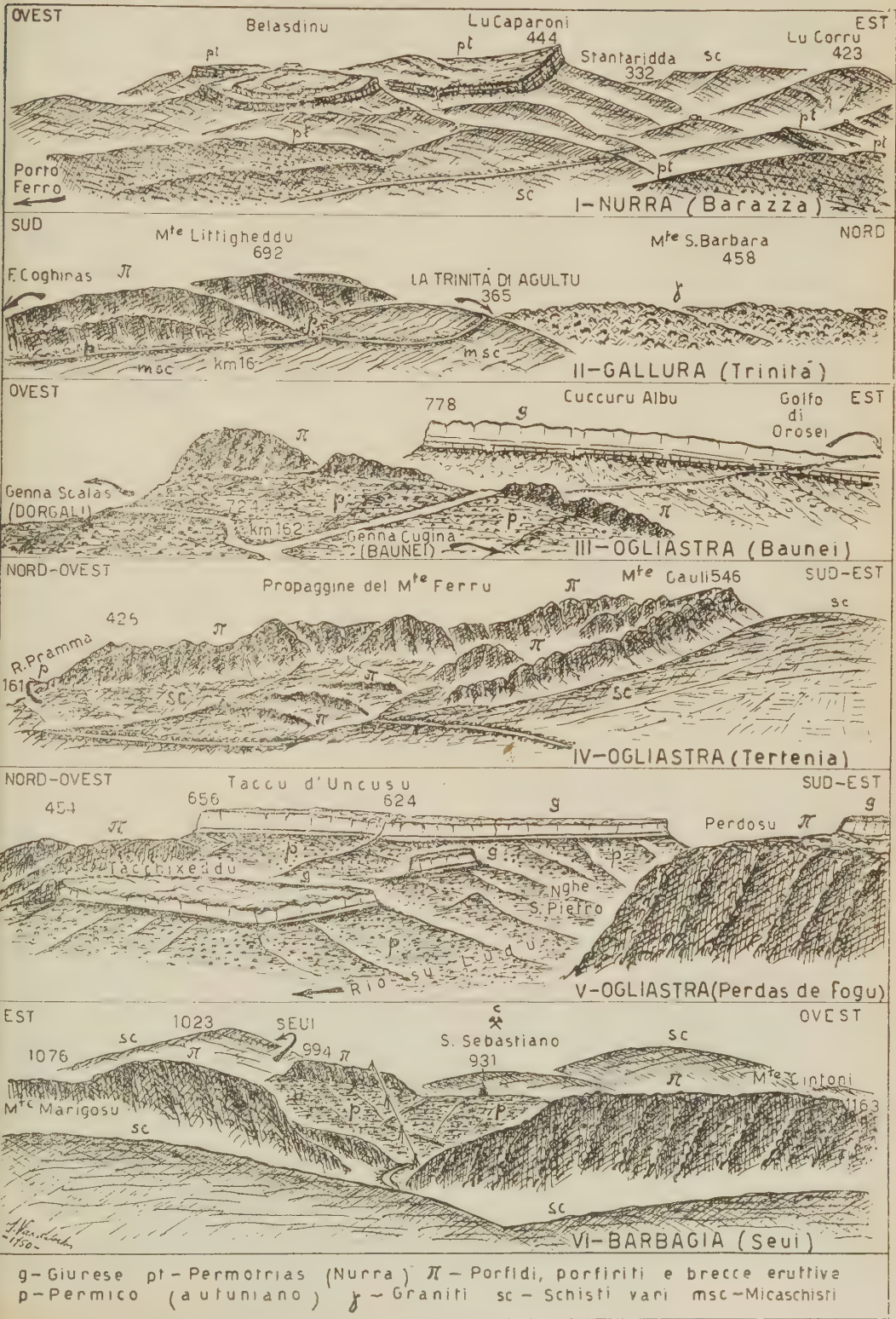
Iglesiente [12]. — La presenza di una flora autuniana anche entro piccole placche orizzontali di conglomerati e brecce discordanti sugli schisti di Cabitza, come figura sulla tavoletta geologica di Iglesias [12], non lascia dubbio sopra una parziale sommersione del rilievo ercinico anche nella Sardegna SO. Qui però, a prescindere dall'antica depressione sinclinale, rappresentata appunto dal corridoio schistoso di Cabitza fra i calcari metalliferi di Monteponi e di S. Giovanni, la possibilità di conservazione fino ad oggi di questi antichi depositi continentali doveva essere ben scarsa, data la persistente emersione del settore; tuttavia in considerazione dell'avanzato grado del carsismo dei calcari cambrici, non era da escludersi a priori che in qualche cavità superficiale fosse stato risparmiato qualche testimonio del Permico. Questo pare sia il caso del piccolissimo deposito di puddinga calcarea mineralizzata e di frammenti di puddinga ordoviciana presso la miniera di Nebida [10] e di qualche altro piccolo deposito clastico isolato di incerta datazione. Anche nel territorio di Domusnovas (Miniera Barasciutta), proprio lo scorso marzo, ho trovato una cavità carsica sul tipo di una dolina riempita di frammenti di puddinga ordoviciana (cioè di schisto cambrico ben due volte rimesso in circolazione durante il Paleozoico). Propendo a ritenere questo riempimento del Permico perchè, pur essendo vicino l'attuale affioramento dell'ellissoide dell'Oridda, nella cavità in parola non si sono trovati ciottoli di granito, che evidentemente allora non era stato smantellato.

D'altra parte anche nel settore schistoso silurico dell'Iglesiente settentrionale è ammissibile la possibilità di rinvenimenti di depositi permici e ciò per una certa analogia con la Nurra, data la presenza di testimoni del Trias epicontinentale presso la costa (Naroci) tra il Capo Pecora e Ingurtosu. Infatti ultimamente nei dintorni di Montevecchio è stata segnata una facies permo-triassica [4]; a mio giudizio però qualche affioramento ha ancora bisogno di essere meglio riveduto.

Campidano [10, 11]. — Visto che in tutti i settori paleozoici della Sardegna sono riconoscibili testimonianze della demolizione del rilievo ercinico, è ben possibile che altri simili sedimenti clastici del Permico, eventualmente anche con qualche inclusione di antracite, siano sottratti alla diretta osservazione dalla colmata terziaria della grande depressione tettonica, che dal Golfo dell'Asinara a quello di Cagliari nasconde le antiche strutture.

IL PERMICO IN SARDEGNA





Per l'estremità settentrionale, fra la Nurra e la Gallura, io propenderei in tal senso [16]. Eguale opinione è stata espressa da altri [3] per la parte meridionale, cioè per il Campidano inteso in senso un po' lato. Qui però bisognerà guardarsi dall'attribuire al Permico anche conglomerati con elementi granitici, sicuramente più recenti, e tener presente — per quanto concerne la formazione dell'antracite — che questa è avvenuta di regola dopo il deposito delle puddinghe basali a frammenti di schisto.

Una larga fascia di queste è conservata ai piedi del versante orientale dell'isola cristallina di M. Grighini, circa fra Allai e Asuni, dove il deposito clastico, localmente anche molto potente, è coperto da lave e tufi oligocenici, per cui in un primo tempo [13] ritenni che fosse almeno eocenico. Dopo questa rassegna però parmi più verosimile l'attribuzione al Permico anche di questo importante accumulo detritico, nel quale recentemente ho cercato invano inclusi di granito e di calcari mesozoici, per cui la sua provenienza è attribuibile piuttosto ad un rilievo ercinico.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] AMSTUTZ A., *Les roches éruptives des environs de Dorgali et Orosei en Sardaigne*. « Bull. Suisse de Min. », 5, Zürich 1925.
- [2] CAVINATO A., *Il Permiano nel territorio di Orroli (Sardegna)*. « Atti Acc. Lincei », 27, Roma 1938.
- [3] CAVINATO A., *Nuovi risultati ed osservazioni nel rilievo geologico del foglio Mandas ecc.* « Atti Acc. Lincei », 29, Roma 1939.
- [4] CAVINATO A. e ZUFFARDI P., *Geologia della miniera di Montevecchio*. (« Notizie sull'industria del Piombo e dello Zinco in Italia »), Milano 1948.
- [5] DORN P., *Keuper in germanischer Fazies in Ostsardinien*. « Zbl. Min. Geol. Pal. », Abt. B, Stuttgart 1940.
- [6] FIORENTIN L., *Rilevamento geologico della regione antracitifera della Barbagia ecc.* « Boll. Uff. Geol. It. », 49, Roma 1924.
- [7] FOIS F., *Note geologico-minerarie sul bacino carbonifero di Perdasdefogu*. « Res. Ass. Miner. Sarda », Iglesias 1939.
- [8] LOTTI B., *Relazione generale riassuntiva di tre sondaggi per la ricerca del carbone paleozoico nei piani di Alghero*. « Res. Ass. Miner. Sarda », Iglesias 1930.
- [9] MAXIA C., *Alcune osservazioni sulla flora autuniana di Perdasdefogu ecc.* « Rivista It. Pal. », 44, Pavia 1938.
- [10] NOVARESE V., *Tavoletta di Nebida* (« Carta geologico-mineraria dell'Iglesiente »), Roma 1920.
- [11] OOSTERBAAN A. M., *Etude géologique et paléontologique de la Nurra ecc.* Utrecht 1936.
- [12] TESTA L., *Tavoletta di Iglesias* (« Carta geologico-mineraria dell'Iglesiente »), Roma 1919.
- [13] VARDABASSO S., *Visioni geomorfologiche della Sardegna*. XII Congr. Geogr. It., Cagliari 1934.
- [14] VARDABASSO S., *Il Permico dell'Ogliastra*. « Rend. Sem. Fac. Scienze », 8, Cagliari 1938.
- [15] VARDABASSO S., *Altri lembi ignorati di Permico nella Sardegna orientale*. Ibid., 11, Cagliari 1941.
- [16] VARDABASSO S., *Vulcanismo permico e vulcanismo oligocenico in Gallura*. Ibid., 12, Cagliari 1942.
- [17] VARDABASSO S., *Il Mesozoico della Sardegna orientate*. Ibid., 16, Cagliari 1948.

Per altre pubblicazioni si rimanda a C. MAXIA [9], rispettivamente alla *Bibliografia mineraria della Sardegna* (Istituto per gli Studi Sardi) dello stesso autore, Cagliari 1941.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Paragone metrico d'intorni superficiali.* Nota di MASSIMO MINEO, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. Dopo aver letto una Nota del Bompiani ⁽¹⁾, mi corre l'obbligo di tornare su una mia precedente Nota, dallo stesso titolo di questa ⁽²⁾.

Dalla Nota del Bompiani, mi sono formato una idea più precisa della questione, che mi pare si possa enunciare così: *Dati due intorni superficiali, riferiti a coordinate curvilinee che diano agli elementi lineari le forme*

$$(1) \quad ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2, \quad d\bar{s}^2 = \bar{E} d\bar{u}^2 + 2 \bar{F} d\bar{u} d\bar{v} + \bar{G} d\bar{v}^2,$$

trovare le condizioni necessarie e sufficienti affinché esista una corrispondenza

$$(2) \quad \bar{u} = \varphi(u, v), \quad \bar{v} = \psi(u, v),$$

tra i due intorni (nella quale si corrispondano i relativi centri), tale che gli sviluppi di ds^2 e $d\bar{s}^2$, nelle vicinanze dei rispettivi centri, coincidano fino ai termini d'un ordine prefissato n , rispetto ai parametri u e v .

Il risultato di questa ricerca del Bompiani è che le condizioni necessarie e sufficienti sono l'identificarsi, nei due centri, delle curvature gaussiane e delle loro derivate fino all'ordine $n - 2$ incluso. Il Bompiani nella Nota citata, stabilisce il risultato fino all'ordine $n = 3$; il Dalla Volta, estende il risultato al caso di un ordine n qualunque ⁽³⁾.

2. Se sulla seconda superficie le (2) si interpretano come formule di trasformazione, il $d\bar{s}^2$ si trasforma in

$$(3) \quad ds_1^2 = E_1 du^2 + 2 F_1 du dv + G_1 dv^2,$$

dove E_1, F_1, G_1 sono ora funzioni di u e v . Allora tra le due superficie si corrispondono punti che hanno gl'identici parametri gaussiani u e v . Supposto che esista una corrispondenza (2) che faccia coincidere gli sviluppi di E, F, G con quelli rispettivamente di E_1, F_1, G_1 fino all'ordine n incluso (rispetto, naturalmente, agli stessi parametri gaussiani u e v), si deducono subito le condizioni necessarie del Bompiani, tenendo presente che la curvatura gaussiana è un invariante differenziale della prima forma fondamentale della superficie. Chiamando K la curvatura

(*) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) E. BOMPIANI, *Isometria di calotte superficiali*. «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni», fasc. I-II, 1948.

(2) Questi «Rendiconti», vol. VII, fasc. 1-4, ferie 1949 (luglio-ottobre).

(3) V. DALLA VOLTA, *Sull'isometria di calotte superficiali*. Questi «Rendiconti», vol. V, 2° sem., fasc. 6, 1948; e anche: «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni», ser. V, vol. 8, fasc. 1-2, 1949. Il Dalla Volta è pure ritornato sulla questione in una Nota in corso di stampa della quale ha voluto comunicarmi il testo.

gaussiana della prima superficie, si ha che K è espressa per E, F, G e le loro derivate prime e seconde:

$$(4) \quad K = f\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial^2 E}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}, \dots\right).$$

E similmente si ha per la seconda superficie:

$$(5) \quad K_1 = f\left(E_1, F_1, G_1, \frac{\partial E_1}{\partial v}, \frac{\partial^2 E_1}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial v}, \dots\right).$$

E poichè, per ipotesi, E_1, F_1, G_1 differiscono da E, F, G per termini di grado $n+1$ in u e v (si può supporre che nei centri dei due intorni si abbia $u=v=0$), si deduce che K e K_1 si eguagliano nei centri dei due intorni insieme con le loro derivate fino a quelle soltanto d'ordine $n-2$ incluso (per via della presenza, nei secondi membri delle formule precedenti, di derivate seconde dei coefficienti delle prime forme fondamentali). Nessuna condizione necessaria si può dedurre nel caso della coincidenza degli sviluppi per $n < 2$.

Quanto a dimostrare la sufficienza di tali condizioni (per $n \geq 2$), non si può non fare entrare in gioco le (2), che devono essere tali da produrre la coincidenza voluta. Ed è quello di cui non tenni conto nella Nota citata: nella quale però accennai – e mostrai effettivamente poi in un'altra Nota ⁽⁴⁾ – con quali particolari sistemi di coordinate curvilinee si poteva stabilire il risultato del Bompiani.

Mi sia permesso qui di fare vedere come si possa rapidamente raggiungere questo risultato *in modo più generale*.

3. Sceglierò i due elementi lineari, come sempre si può fare, sotto la forma

$$(6) \quad ds^2 = du^2 + \sigma^2 dv^2, \quad d\bar{s}^2 = d\bar{u}^2 + \bar{\sigma}^2 d\bar{v}^2,$$

essendo

$$(7) \quad \sigma = 1 + u^2 (\sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_n + \dots),$$

dove σ_i è una forma di grado i in u e v . E una espressione simile ha $\bar{\sigma}$ nelle coordinate \bar{u} e \bar{v} . Le linee $v = \text{costante}$ (e $\bar{v} = \text{costante}$) sono, come è ben noto, geodetiche sulle due superficie; e anche geodetiche sono, su di esse, le linee $u = 0$ e $\bar{u} = 0$.

Siano

$$(8) \quad \bar{u} = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n + \dots, \quad \bar{v} = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n + \dots$$

le formule di corrispondenza tra le due superficie, dove φ_i, ψ_i sono forme di grado i in u e v . I centri dei due intorni sono rispettivamente i punti ($u=0, v=0$) e ($\bar{u}=0, \bar{v}=0$). Dalla (7) segue:

$$(9) \quad \sigma^2 = 1 + 2\sigma_0 u^2 + 2\sigma_1 u^3 + \dots + [2\sigma_{n-2} + (2\sigma_0\sigma_{n-4} + 2\sigma_1\sigma_{n-5} + \dots)u^2]u^2 + \dots$$

(4) Vedi M. MINEO, *Sul confronto dal punto di vista metrico differenziale di due intorni superficiali*. «Atti dell'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Palermo», vol. VIII, 1947-48, parte I.

E una espressione simile, cambiando u e v in \bar{u} e \bar{v} , e σ_i in $\bar{\sigma}_i$, si ha per $\bar{\sigma}^2$.
Per mezzo delle (8), $d\bar{s}^2$ diventa:

$$(10) \quad d\bar{s}^2 = \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right)^2 \bar{\sigma}^2 \right] du^2 + 2 \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \bar{\sigma}^2 \right] du dv + \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right)^2 \bar{\sigma}^2 \right] dv^2.$$

Si vede subito che affinchè ds^2 e $d\bar{s}^2$ coincidano nei termini di grado zero, occorre e basta che si abbia

$$(11) \quad \varphi_1 = \sqrt{1 - \gamma^2} u - \gamma v, \quad \psi_1 = \gamma u + \sqrt{1 - \gamma^2} v,$$

essendo γ un numero reale qualunque (in valore assoluto minore di 1). Affinchè la coincidenza si avveri fino ai termini di primo grado, occorre e basta prendere

$$(12) \quad \varphi_2 = 0, \quad \psi_2 = 0.$$

Si vede quindi, come ha trovato il Bompiani, che *la coincidenza si può sempre realizzare fino ai termini di primo grado senza alcuna condizione per le due superficie*.

Come scegliere φ_3 e ψ_3 affinchè la coincidenza si avveri fino ai termini di 2° grado? Occorrono nove condizioni lineari negli otto coefficienti di φ_3 e ψ_3 ; inoltre, almeno *a priori*, vi è anche da considerare come incognita la quantità γ che figura nelle (11). Un semplice calcolo mostra però che, se $\sigma_0 \neq \bar{\sigma}_0$, le nove condizioni di cui sopra sono *sempre incompatibili*, e non è possibile attuare la corrispondenza voluta; se invece $\sigma_0 = \bar{\sigma}_0$, le nove condizioni diventano compatibili, *per qualsiasi* γ , nei coefficienti di φ_3 , ψ_3 e, per ciascun valore di γ , *tali coefficienti sono determinati in modo unico*; onde (vedi anche appresso), il risultato del Bompiani, e l'esistenza di ∞^1 corrispondenze del tipo voluto, qualora ve ne sia una.

Così, affinchè φ_4 e ψ_4 attuino una coincidenza fino ai termini di 3° grado, occorrono dodici condizioni lineari nei coefficienti di φ_4 e ψ_4 , i quali sono soltanto dieci; in più vi è da considerare γ , che è tuttora incognito; effettuando il calcolo, si trova questa volta, però, che le dodici condizioni nelle undici incognite (coefficienti di φ_4 e ψ_4 , e γ) *sono compatibili se e solo se*

$$(13) \quad 9 \sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 = 9 \bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{12}^2$$

essendo σ_{11} , σ_{12} i coefficienti di u, v in σ_1 (e analogamente per le quantità con le sopralineature):

Se vale la (13) è possibile determinare univocamente γ e i coefficienti di φ_4 , ψ_4 ; e la unica corrispondenza così trovata attua la coincidenza fino al 3° grado.

Osserviamo ora che, come facilmente si rileva, se si interpretano le (2) quali formule di trasformazione sulla seconda superficie, γ non è che il seno dell'angolo, che, in $\bar{u} = \bar{v} = 0$, la linea $u = 0$ forma con la linea $\bar{u} = 0$. Consideriamo ora il sistema di coordinate curvilinee \bar{u}', \bar{v}' , perfettamente determinato, che conserva al $d\bar{s}^2$ la forma (6), e tale che la linea - geodetica - $\bar{u}' = 0$ formi con la geodetica $\bar{u} = 0$, un angolo il cui seno è uguale a γ ; ciò equivale ovviamente a supporre $\gamma = 0$ nella (11).

Se vale la (13), dunque, è sempre possibile, con un'opportuna scelta delle coordinate curvilinee \bar{u}, \bar{v} , ridursi al caso in cui $\gamma = 0$. Allora si trova per induzione

completa che, condizioni non soltanto necessarie, ma anco sufficienti, affinchè la coincidenza abbia luogo fino ai termini di grado n ($n > 2$), sono:

$$(14) \quad \sigma_0 = \bar{\sigma}_0, \sigma_1 = \bar{\sigma}_1, \dots, \sigma_{n-2} = \bar{\sigma}_{n-2} \quad (5),$$

essendo

$$(15) \quad \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_{n+1} = \psi_2 = \psi_3 = \dots = \psi_{n+1} = 0.$$

Infatti, posto che per $\gamma = 0$ le (14) abbiano luogo, affinchè la coincidenza avvenga fino ai termini di grado $n+1$, occorre e basta che si abbia:

$$\frac{\partial \varphi_{n+2}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{n+2}}{\partial v} + \frac{\partial \psi_{n+2}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \psi_{n+2}}{\partial v} + \bar{\sigma}_{n-1} \bar{u}^2 = \sigma_{n-1} u^2,$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_{n+2} &= av^{n+2}, & \psi_{n+2} &= -(n+2)auv^{n+1} + bv^{n+2}, \\ & & & -(n+1)(n+2)auv^n + b(n+2)v^{n+1} + \bar{\sigma}_{n-1}u^2 = \sigma_{n-1}u^2; \end{aligned}$$

e però

$$a = b = 0, \quad \sigma_{n-1} = \bar{\sigma}_{n-1}.$$

Cosicchè, per la coincidenza fino ai termini di grado $n+1$, le condizioni necessarie e sufficienti sono (sempre per $\gamma = 0$)

$$\sigma_0 = \bar{\sigma}_0, \sigma_1 = \bar{\sigma}_1, \dots, \sigma_{n-1} = \bar{\sigma}_{n-1};$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_{n+2} = \psi_2 = \psi_3 = \dots = \psi_{n+2} = 0,$$

come si doveva dimostrare.

4. Al risultato nella forma del Bompiani si arriva immediatamente, data l'espressione semplice della curvatura totale K nel sistema scelto di coordinate curvilinee. Si ha, come è ben noto:

$$(16) \quad K = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2},$$

donde

$$\begin{aligned} (17) \quad & -K \{ 1 + u^2 (\sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_n + \dots) \} = \\ & = 2\sigma_0 + \left(2\sigma_1 + 4u \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \right) + \dots + \left(2\sigma_n + 4u \frac{\partial \sigma_n}{\partial u} + u^2 \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial u^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

E similmente per $\bar{K}(\bar{u}, \bar{v})$. Dalla (17), mettendoci nell'origine $(0, 0)$ dell'intorno:

$$K_0 = -2\sigma_0, \quad \left(\frac{\partial K}{\partial u} \right)_0 = -6 \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}, \quad \left(\frac{\partial K}{\partial v} \right)_0 = -2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial v};$$

$$\left(\frac{\partial^2 K}{\partial u^2} \right)_0 = -2K_0\sigma_0 - 12 \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 K}{\partial u \partial v} \right)_0 = -6 \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u \partial v}, \quad \left(\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} \right)_0 = -\frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial v^2}, \dots$$

(5) Non è da stupire che, ora, la coincidenza fino al 3° grado porti due condizioni ($\sigma_1 \equiv \bar{\sigma}_1$), invece della sola (13), giacchè ora γ è fissato e non si può più considerarla come incognita. Del resto porre $\gamma = 0$ equivale a fare la rotazione di cui si serve il Bompiani. Comunque, questo punto sarà approfondito in un prossimo lavoro.

Queste formule mostrano che la conoscenza di σ_0 equivale alla conoscenza della curvatura totale nel centro dell'intorno; la conoscenza di σ_1 equivale a quella di $(\partial K/\partial u)_0$ e $(\partial K/\partial v)_0$, ecc. E in generale, dalla (17) si deduce che le condizioni (14) equivalgono alle condizioni

$$(18) \quad \begin{aligned} K_0 &= \bar{K}_0, & \left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)_0 &= \left(\frac{\partial \bar{K}}{\partial \bar{u}}\right)_0, & \left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)_0 &= \left(\frac{\partial \bar{K}}{\partial \bar{v}}\right)_0; \dots \\ \dots \left(\frac{\partial^{n-2} K}{\partial u^{n-2}}\right)_0 &= \frac{\partial^{n-2} \bar{K}}{\partial \bar{u}^{n-2}}, \dots, \left(\frac{\partial^{n-2} K}{\partial v^{n-2}}\right)_0 &= \left(\frac{\partial^{n-2} \bar{K}}{\partial \bar{v}^{n-2}}\right)_0. \end{aligned}$$

Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente, per $\gamma = 0$ affinchè gli sviluppi di ds^2 e $d\bar{s}^2$ coincidano fino ai termini di grado n in u e v , è che nei centri dei due intorni abbiano luogo le (18).

Che è il risultato di Bompiani-Dalla Volta.

5. Se invece delle coordinate u e v , definite nel n. 3, si adoperano coordinate geodetiche polari (con le quali la forma del ds^2 si conserva, ma il coefficiente σ^2 ha una forma altra da quella indicata dalla (7)), il risultato da me trovato nei lavori citati è il seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè gli sviluppi di ds^2 e $d\bar{s}^2$ coincidano fino ai termini di grado n nelle coordinate geodetiche polari u, v , è che nei centri degli intorni siano eguali la curvatura gaussiana e le sue derivate rispetto a u fino a quella di ordine $n - 4$.

Risultato che non mi pare privo d'importanza, dal punto di vista dell'ordine di approssimazione raggiungibile per l'applicabilità (*approssimata*) di un pezzo di superficie sopra un altro pezzo di superficie (problema di capitale importanza per esempio in geodesia).

La differenza tra i due risultati dipende dal fatto che nel n. 3 si adoperano coordinate cartesiane curvilinee, come le chiama il Severi⁽⁶⁾; le quali presentano il vantaggio, rispetto alle polari, che la corrispondenza tra le coppie u, v e i punti dell'intorno è biunivoca *senza eccezione*. Condizione, questa, *essenziale* nella nozione di *calotte isometriche*, introdotta dal Bompiani. Nel caso delle coordinate cartesiane curvilinee, le condizioni (18) esprimono il fatto che le due superficie presentano due *calotte isometriche dell'ordine $n + 1$, intorno ai loro centri*: cosa che non si può affermare nel caso delle coordinate geodetiche polari.

(6) Vedi SEVERI, *Sulla curvatura delle superficie e varietà*. «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», to. XLII, p. 5, anno 1917.

Geometria. — *Sulla curvatura delle varietà a tre dimensioni dotate di una connessione affine.* Nota di ALDO COSSU, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. In una Memoria ⁽¹⁾ del 1921 E. Bompiani definisce come *asse di una faccetta piana*, per un punto P di una V_n riemanniana, la direzione per P di quei vettori controvarianti che si mutano in sè per il trasporto (secondo Levi-Civita) lungo un ciclo infinitesimo di origine P appartenente alla faccetta. Si ha quindi che, in generale, per ogni faccetta di una V_n , con n dispari, esiste un asse relativo; mentre, in generale, per n pari non esiste, per ogni faccetta, una siffatta direzione.

Nella presente Nota si estende tale definizione alle varietà a connessione affine lineare. Si osserva subito che, in generale, non esistono, sia n pari o dispari, direzioni soddisfacenti alla suddetta definizione.

Per condurre quindi una analoga ricerca si converrà di definire come assi di una faccetta piana, per un punto P di una A_n a connessione affine, le direzioni di quei vettori che si trasportano per equipollenza in vettori paralleli, lungo un ciclo infinitesimo appartenente alla faccetta. Si chiamerà *asse principale* quello parallelo a quei vettori che si trasportano in sè lungo un ciclo parallelo alla faccetta relativa; mentre si chiamerà *secondario* ogni altro asse.

Da ciò che precede segue subito che ad una generica faccetta per P di una A_n si possono sempre associare n assi secondari. In questa Nota si considera il caso $n = 3$, osservando che molte proprietà si estendono facilmente al caso $n > 3$.

2. Sia A_3 una varietà a connessione affine lineare asimmetrica di parametri $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}(\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3)$ e sia

$$R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}}{\partial x^{\omega}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\omega}^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\tau} \Gamma_{\tau\omega}^{\nu} - \Gamma_{\mu\omega}^{\tau} \Gamma_{\tau\lambda}^{\nu}$$

il tensore di curvatura riemanniana della varietà.

È noto che l'incremento subito da un vettore ξ^{ν} , applicato in un punto P della A_3 , per il trasporto lungo un ciclo infinitesimo appartenente alla faccetta per P, determinata dalle direzioni $dx^{\lambda}, \delta x^{\omega}$, ha direzione

$$(I) \quad \rho \tilde{\xi}^{\nu} = R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} \xi^{\mu} dx^{\lambda} \delta x^{\omega},$$

essendo ρ uno scalare arbitrario non nullo.

Le (I) possono riguardarsi come le equazioni di una rete di proiettività nella stella di centro P appartenente allo spazio affine tangente in P alla A_3 . Segue

(*) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) E. BOMPIANI, *Studi sugli spazi curvi. Del parallelismo in una varietà qualunque*, « Atti Ist. Veneto », to. 80, p. 839 (1920-21).

quindi che, in generale, ad ogni faccetta piana si possono associare 3 assi secondari, per la ricerca dei quali bisognerà risolvere il sistema

$$(1') \quad (R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} dx^\lambda \delta x^\omega - \rho \delta_\mu^\nu) \xi^\mu = 0$$

e quindi l'equazione cubica in ρ

$$(2) \quad -\rho^3 + \eta_{\tau_1}^\tau \rho^2 - \eta_{\tau_1}^{[\tau_1} \eta_{\tau_2}^{\tau_2]} \rho + \eta_{\tau_1}^{[\tau_1} \eta_{\tau_2}^{\tau_2} \eta_{\tau_3}^{\tau_3]} = 0$$

ove $\eta_{\tau}^\tau = R_{\lambda\omega\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} dx^\lambda \delta x^\omega$.

I tre assi secondari associati ad una generica faccetta per P saranno in generale indipendenti; daranno quindi luogo a tre giaciture a cui sono paralleli i vettori covarianti, applicati in P, che si trasportano in vettori paralleli lungo un ciclo infinitesimo, appartenente alla relativa faccetta.

3. Si consideri inizialmente il caso in cui la rete (1) è di proiettività singolari di prima specie. In tal caso deve necessariamente aversi

$$(3) \quad \eta_{\tau_1}^{[\tau_1} \eta_{\tau_2}^{\tau_2} \eta_{\tau_3}^{\tau_3]} \equiv 0$$

qualunque sia la faccetta del ciclo.

Ad ogni generica faccetta per P rimane associato un solo asse principale λ^ν e quindi esisterà una 2-direzione λ_ν a cui sono paralleli tutti i vettori covarianti che si trasportano in sè lungo un ciclo appartenente alla relativa faccetta. Chiamando allora direzione (2-direzione) di curvatura di un vettore ξ^μ (ξ_ν) relativa alla faccetta $dx^\lambda \delta x^\omega$ quella di $R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} \xi^\mu dx^\lambda \delta x^\omega$ ($R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} \xi_\nu dx^\lambda \delta x^\omega$), si avrà per una generica faccetta che

a) ogni vettore ξ^ν non parallelo all'asse principale λ^ν ha direzione di curvatura parallela a λ_ν ;

b) ogni vettore ξ_ν non parallelo a λ^ν ha 2-direzione di curvatura parallela a λ^ν .

In generale sarà $\lambda^\nu \lambda_\nu \neq 0$. I rimanenti assi secondari $\lambda_1^\nu, \lambda_2^\nu$ della generica faccetta son paralleli a λ_ν e possono eventualmente essere coincidenti.

È ovvio che la direzione di curvatura di ξ^ν , sempre relativa alla generica faccetta, e la giacitura parallela a λ^ν e ξ^ν si corrispondono in una proiettività; le direzioni di curvatura parallele alle corrispondenti giaciture nella suddetta proiettività sono gli assi secondari $\lambda_1^\nu, \lambda_2^\nu$.

Siccome si può facilmente dimostrare⁽²⁾ che l'annullarsi identico della (3) è condizione necessaria perchè le direzioni di curvatura, relative ad una generica

(2) Se infatti $\xi_1^{\mu_1}, \xi_2^{\mu_2}, \xi_3^{\mu_3}$ sono tre vettori indipendenti, se le relative direzioni di curvatura sono parallele ad una giacitura deve aversi, qualunque sia la faccetta

$$R_{\lambda_1 \omega_1 \mu_1}^{\cdot\cdot\cdot [\tau_1} R_{\lambda_2 \omega_2 \mu_2}^{\cdot\cdot\cdot \tau_2} R_{\lambda_3 \omega_3 \mu_3}^{\cdot\cdot\cdot \tau_3]} \xi_1^{\mu_1} \xi_2^{\mu_2} \xi_3^{\mu_3} dx^{\lambda_1} dx^{\lambda_2} dx^{\lambda_3} \delta x^{\omega_1} \delta x^{\omega_2} \delta x^{\omega_3} = 0.$$

Se ciò accade per qualunque terna di vettori $\xi_1^{\mu_1}, \xi_2^{\mu_2}, \xi_3^{\mu_3}$ saturando τ_i con μ_i si ha

$$\eta_{\tau_1}^{[\tau_2} \eta_{\tau_2}^{\tau_2} \eta_{\tau_3}^{\tau_3]} = 0$$

qualunque sia dx^λ e δx^ω .

faccetta, dei generici vettori controvarianti siano tutte parallele ad una 2-direzione se ne deduce che

Condizione necessaria e sufficiente affinché per ogni generica faccetta per un punto P di una A_3 esista un solo asse principale è che le direzioni di curvatura, relative alla generica faccetta, dei vettori controvarianti siano parallele ad una 2-direzione, variabile, in generale, con la faccetta. In altre parole la generica proiettività della rete (1) deve essere singolare di prima specie.

Esiste un inviluppo quadrico

$$(4) \quad R_{\lambda_1 \omega_1 \tau_1}^{\cdot \cdot \cdot \tau_1} R_{\lambda_2 \omega_2 \tau_2}^{\cdot \cdot \cdot \tau_2} dx^{\lambda_1} dx^{\lambda_2} \delta x^{\omega_1} \delta x^{\omega_2} = 0$$

di faccette per le quali $\rho = 0$ è radice doppia della (3). Possono quindi, come è noto, esservi due eventualità.

La radice $\rho = 0$ non annulla tutti i minori del secondo ordine estratti dalla matrice dei coefficienti della (1') ed allora per la relativa faccetta è $\lambda^\nu \lambda_\nu = 0$. Esiste inoltre per ciascuna di esse un solo asse secondario $\lambda^\nu \equiv \lambda_2^\nu$ appartenente a λ_ν .

Oppure la radice $\rho = 0$ annulla tutti i minori del secondo ordine estratti dalla matrice dei coefficienti della (1') ed allora per la relativa faccetta la (1) diventa singolare di seconda specie. Si ha allora per la relativa faccetta una giacitura di assi principali, mentre le 2-direzioni di curvatura dei vettori covarianti con 2-direzione di curvatura indeterminata descrivono un fascio.

Al tipo di A_3 in esame appartengono quelle il cui tensore di curvatura riemanniana è dato da

$$(5) \quad R_{\lambda \omega \mu}^{\cdot \cdot \cdot \nu} = \delta_{[\lambda}^\nu R_{\omega] \mu}$$

ove è $R_{\omega \mu} = R_{\tau \omega \mu}^{\cdot \cdot \cdot \tau}$.

Esse sono caratterizzate dalla seguente proprietà. Ogni generico vettore controvariante ha sempre la direzione di curvatura, relativa ad una generica faccetta, parallela a quest'ultima (3). L'asse principale λ^ν e la relativa faccetta $dx^{[\lambda} \delta x^{\omega]}$ di giacitura λ_ω si corrispondono nella reciprocità

$$(6) \quad \tau \lambda_\omega = R_{\omega \mu} \lambda^\nu.$$

Il cono di incidenza inviluppo della reciprocità (6) è il cono quadrico (4) inviluppo di faccette che contengono i relativi assi principali. Questi descrivono l'altro cono di incidenza della (6) $R_{\omega \mu} dx^\omega dx^\mu = 0$.

Gli assi secondari descrivono lo stesso cono di incidenza (4).

Due delle faccette per la direzione di $R_{\lambda \omega \tau}^{\cdot \cdot \cdot \tau} = R_{[\omega \lambda]}$ sono tangenti ai due coni di incidenza suddetti lungo i rispettivi assi principali (5). Per tali faccette non esistono assi secondari.

(3) Cfr. E. BORTOLOTTI, *Geometria delle varietà a connessione affine*, « Ann. di Mat. », ser. IV, to. VIII, p. 80 (1930-31). In questo caso la 2-direzione a cui sono parallele le direzioni di curvatura, relative ad una faccetta, dei generici vettori controvarianti, coincide con la faccetta stessa.

(4) Si suppone naturalmente che $R_{\omega \mu}$ sia di rango 3 ed inoltre $R_{[\omega \mu]} \neq 0$. Se $R_{[\omega \mu]} = 0$ la (6) è una polarità e i due coni di incidenza coincidono. Ciò avviene necessariamente se la A_3 è a connessione simmetrica, cfr. A. COSSU, *Proprietà di curvatura di una particolare classe di varietà a connessione affine*, « Rend. Acc. Lincei », vol. VI, fasc. 6, pp. 702-707 (1949).

(5) I due coni si sono sopposti, come accade in generale, bitangenti.

Fra le A_3 per le quali la rete (1) è di proiettività singolari di prima specie, quelle con il tensore di curvatura del tipo (5), godono della proprietà caratteristica di avere gli assi secondari, di una qualunque generica faccetta, paralleli a quest'ultima.

Se la A_3 è una V_3 riemanniana la (5) si riduce alla condizione perchè coincidano i parallelismi di Levi-Civita e Severi⁽⁶⁾.

4. Si supponga che la generica proiettività della rete (1) sia singolare di seconda specie, per il tensore di curvatura riemanniana deve quindi aversi

$$(7) \quad R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} dx^\lambda \delta x^\omega = a^\nu \varphi_\mu,$$

essendo a^ν e φ_μ due vettori rispettivamente controvariante e covariante.

Tenendo conto che la (7) deve essere valida qualunque sia dx^λ e δx^ω , per la emisimmetria rispetto agli indici di covarianza λ, ω , si potrà avere

$$a^\nu = a_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\cdot\nu} dx^\lambda \delta x^\omega \quad \text{con} \quad a_{(\lambda\omega)}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$$

o

$$\varphi_\mu = \varphi_{\lambda\omega\mu} dx^\lambda \delta x^\omega \quad \text{con} \quad \varphi_{(\lambda\omega)\mu} = 0$$

o

$$a^\nu \varphi_\mu = a^\nu \varphi_{\lambda\omega} \varphi_\mu dx^\lambda \delta x^\omega \quad \text{con} \quad \varphi_{(\lambda\omega)} = 0.$$

Cioè il tensore di curvatura riemanniana può assumere le seguenti forme

$$a) \quad a_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\cdot\nu} \varphi_\mu$$

$$b) \quad a^\nu \varphi_{\lambda\omega\mu}$$

$$c) \quad a^\nu \varphi_{\lambda\omega} \varphi_\mu.$$

Esiste allora per ogni faccetta una 2-direzione di assi principali. Questa è unica per tutte le faccette nei casi *a*), *c*) ed è precisamente data dalla 2-direzione del vettore φ_μ . Mentre nel caso *b*) tra la faccetta $dx^{[\lambda} \delta x^{\omega]}$ e la 2-direzione σ_μ luogo di assi principali intercede una proiettività di equazione

$$\sigma_\mu = \varphi_{\lambda\omega\mu} dx^\lambda \delta x^\omega.$$

Per ogni faccetta si ha inoltre un asse secondario. Nel caso *a*) tale asse secondario λ_i^ν e la relativa faccetta $dx^{[\lambda} \delta x^{\omega]}$ si corrispondono nella reciprocità

$$(8) \quad \lambda_i^\nu = a_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\cdot\nu} dx^\lambda \delta x^\omega$$

mentre nei casi *b*) e *c*) esso è unico per tutte le faccette e precisamente ha la direzione del vettore a^ν .

Nei tre casi l'asse secondario, relativo ad una generica faccetta, è parallelo ad ogni vettore covariante con 2-direzione di curvatura indeterminata.

Ogni vettore controvariante, non parallelo alla giacitura degli assi principali, ha per direzione di curvatura l'asse secondario⁽⁷⁾ della relativa faccetta. Mentre

(6) Cfr. E. BOMPIANI, op. cit., pp. 384-385.

(7) È ovvio che, in generale, esso non sarà parallelo alla giacitura degli assi principali.

ogni vettore covariante, non parallelo all'asse secondario, ha per 2-direzione di curvatura la giacitura degli assi principali della relativa faccetta.

Esiste inoltre un fascio di faccette parallele alla direzione di $R_{\lambda\omega\tau}^{\cdot\cdot\tau}$ per le quali $\rho = 0$ è radice tripla della (3). Nel caso *a*) la direzione di curvatura, relativa ad una qualunque delle faccette del suddetto fascio, di un generico vettore controvariante, appartiene sempre alla 2-direzione di φ_μ . Nel caso *b*) la 2-direzione di assi principali, relativa alla faccetta di quel fascio, descrive un altro fascio avente per asse la direzione di curvatura comune a tutti i vettori controvarianti. Infine nel caso *c*) per le faccette parallele alla direzione di $R_{\lambda\omega\tau}^{\cdot\cdot\tau}$ e quindi di $\varphi_{\lambda\omega}$ la A_3 si comporta rispetto ad un qualunque vettore come una varietà a connessione affine integrabile.

Nei tre casi se la direzione di curvatura, relativa ad una generica faccetta, di un generico vettore controvariante, è sempre parallela alla giacitura degli assi principali la A_3 è a connessione *equiaffine* e viceversa.

Infine è facile verificare che

Condizione necessaria e sufficiente affinché per ogni generica faccetta per un punto P di una A_3 esista una giacitura di assi principali è che le direzioni di curvatura, relative alla generica faccetta, dei generici vettori controvarianti, siano parallele ad una ben determinata direzione.

Tale direzione varia al variare della faccetta nei casi *a*) e *b*); mentre è unica per tutte le faccette nel caso *c*).

Appartengono alla classe di A_3 in esame quelle varietà con il tensore di curvatura riemanniana $R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \delta_{[\lambda}^{\nu} R_{\omega]\mu}$, ove però $R_{\omega\mu} = R_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\tau} = \psi_\omega \varphi_\mu$, con ψ_ω, φ_μ vettori covarianti in generale non paralleli.

5. Nel caso generale in cui la rete (1) è di proiettività non tutte singolari esiste sempre un involuppo cubico

$$(9) \quad \eta_{\tau_1}^{\cdot\tau_1} \eta_{\tau_2}^{\cdot\tau_2} \eta_{\tau_3}^{\cdot\tau_3} = 0$$

di faccette per le quali $\rho = 0$ è in generale radice semplice della (2). Per una generica faccetta del suddetto involuppo valgono quindi le proprietà generali osservate all'inizio del n. 3.

Se inoltre l'involuppo quadrico (4) non ha alcuna parte in comune con l'involuppo (9) esistono sei faccette per le quali $\rho = 0$ è radice doppia della (2).

Fra le A_3 a connessione simmetrica per le quali la rete (1) contiene l'identità sono notevoli quelle con il tensore di curvatura riemanniana della forma

$$(10) \quad R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu R_{\lambda\omega\tau}^{\cdot\cdot\tau} + \frac{1}{8} [\delta_\lambda^\nu (3 R_{\omega\mu} + R_{\mu\omega}) - \delta_\omega^\nu (3 R_{\lambda\mu} + R_{\mu\lambda})].$$

Come è noto esse sono le A_3 a connessione proiettivo-euclidea⁽⁸⁾.

È facile daltronde verificare che la (10) è condizione necessaria e sufficiente affinché la direzione di curvatura di un generico vettore controvariante, parallelo

(8) Cfr. per esempio J. SCHOUTEN, *der Ricci-Kalcul*, Berlin, Springer, p. 131 (1924) e E. BORTOLOTTI, *Spazi a connessione proiettiva*. «Corsi dell'Ist. Alta Mat.», Roma, p. 32 (1941).

alla faccetta relativa, sia pur essa parallela a quest'ultima⁽⁹⁾. Si può quindi concludere che

Condizione necessaria e sufficiente affinché una A_3 a connessione asimmetrica sia rappresentabile con conservazione delle geodetiche su di uno spazio affine, o, come si dice, sia proiettivamente piana⁽¹⁰⁾, è che la varietà a connessione simmetrica associata a quella della A_3 (o una qualunque varietà a connessione affine simmetrica avente le stesse geodetiche della A_3) sia tale che la direzione di curvatura di ogni generico vettore controvariante, parallelo alla faccetta relativa, sia pur esso parallelo a quest'ultima⁽¹¹⁾.

Posta la (10) sotto la forma

$$R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot v} = 2 \delta_{[\lambda}^v \varphi_{\omega]\mu} + 2 \delta_{\mu}^v \varphi_{[\omega\lambda]} \quad (12)$$

con $\varphi_{\lambda\omega} = 1/8 (3 R_{\lambda\omega} + R_{\omega\lambda})$, si verifica subito che due degli assi secondari λ_2^v, λ_3^v , relativi ad una generica faccetta, appartengono sempre alla faccetta stessa. Essi sono le direzioni della faccetta appartenenti al cono di equazione

$$(11) \quad \varphi_{\lambda\omega} dx^\lambda dx^\omega = 0.$$

L'ulteriore asse λ_1^v , che in generale, non appartiene alla faccetta, si corrisponde con essa nella reciprocità

$$(12) \quad \lambda_\omega = \varphi_{\omega\mu} \lambda_\tau^\mu$$

ove con λ_ω si è indicata la giacitura della faccetta.

Il cono di incidenza luogò nella reciprocità (12) è il cono (11).

Sono da osservare infine le A_3 a connessione asimmetrica per le quali ogni direzione è un asse; esse hanno ovviamente il tensore di curvatura riemanniana dalla forma $R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot v} = \delta_{\mu}^v \varphi_{\lambda\omega}$ con $\varphi_{\lambda\omega} = 1/3 R_{\lambda\omega\tau}^{\cdot\cdot\tau}$.

Le uniche faccette rispetto alle quali tutti i vettori hanno direzioni di curvatura indeterminata sono quelle del fascio per la direzione determinata da $R_{\lambda\omega\tau}^{\cdot\cdot\tau}$. Come è noto per tali A_3 il trasporto lineare delle direzioni è integrabile.

(9) Essendo infatti ξ^μ un generico vettore, per un punto P di una A_n , parallelo alla giacitura determinata da $\xi^{[\tau} \eta^{\omega]}$, dovrà aversi $\delta_\alpha^{\beta\gamma} R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot v} \xi^\alpha \xi^\beta \xi^\gamma \xi^\lambda \xi^\mu \eta^\sigma \eta^\omega = 0$ qualunque sia ξ^λ e η^ω . Simmetrizzando prima rispetto a λ, μ, ρ e poi a ω, σ , saturando α con ρ e β con σ , e sottraendo dalla relazione finale quella ottenuta scambiando λ con ω si ha

$$R_{\lambda\omega\mu}^{\cdot\cdot v} = \frac{1}{n^2 - 1} [\delta_\lambda^v (n R_{\omega\mu} - R_{\mu\omega}) - \delta_\omega^v (n R_{\lambda\mu} + R_{\mu\lambda})] + \frac{1}{n + 1} \delta_\mu^v R_{\lambda\omega\tau}^{\cdot\cdot\tau},$$

per $n = 3$ si ha la (10)

(10) Cfr. E. BORTOLOTTI, op. cit. nella (8), p. 32.

(11) Tale condizione è valida ovviamente anche per una A_n con $n > 3$. Si cfr. un'altra condizione necessaria e sufficiente per $n > 3$ in A. COSSU, *Su una notevole classe di varietà a connessione affine*. «Rend. Acc. Lincei», vol. VIII, fasc. 3, pp. 208-212 (1950).

(12) Se $\varphi_{[\omega\lambda]} = 0$ la connessione è equiaffine e si ricade quindi nel tipo di tensore di curvatura (5) o, più in particolare, in quello indicato alla fine del n. 4.

Geometria. — *Gli S_r n -duali e le varietà di Segre degli S_p biduali.*

Nota di ANGELO FADINI, presentata (*) dal Socio G. GIORGI.

I. L'ALGEBRA n -DUALE. — Il prof. Spampinato⁽¹⁾ ha chiamata algebra dei numeri n -duali un insieme di elementi del tipo:

$$(1) \quad \xi = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$

con u_1, u_2, \dots, u_n unità che si moltiplicano con la tabella seguente

$$(2) \quad \begin{cases} u_i u_h = u_h u_i = u_h & (h = 1, 2, \dots, n) \\ u_i u_j = u_j u_i = 0 & (i, j = 2, 3, \dots, n) \end{cases}$$

e con le x_i numeri del corpo complesso. L'unità u_1 è il modulo dell'algebra, le altre unità sono auto e mutuamente nullifiche.

Tale algebra può essere interpretata con matrici del tipo:

$$\mathfrak{N} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & 0 & 0 & \dots & x_1 \end{vmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

infatti le unità v_1, v_2, \dots, v_n si moltiplicano con la stessa tabella (2).

Un'altra notevole interpretazione di quest'algebra si ha considerando l'insieme di matrici di ordine $2(n-1)$, costituite da $(n-1)(n-2)$ matrici nulle di second'ordine «0» e dalle $n-1$ matrici di second'ordine $m_i = \begin{vmatrix} x_i & 0 \\ x_i & x_1 \end{vmatrix}$ ($i = 2, 3, \dots, n$) disposte in diagonale nel modo seguente:

$$\mathfrak{N}' = \begin{vmatrix} m_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{vmatrix}.$$

Infatti un generico elemento dell'algebra può porsi sotto la forma:

$$\xi = \mathfrak{N}' = x_1 U_1 + x_2 U_2 + \dots + x_n U_n$$

dove le $U_1 U_2 \dots U_n$ costituiscono un aggregato di unità e precisamente U_1 , che è il modulo, e la matrice di ordine $2(n-1)$ avente la diagonale principale costituita di unità e tutti gli altri elementi nulli; mentre le altre $n-1$ unità U ,

(*) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) N. SPAMPINATO, *Sulle funzioni in un'algebra complessa dotata di modulo*. Memoria estratta dai «Rend. di mat. della R. Università di Roma e R. Istit. di Alta Matem.», ser. V, vol. 2, fasc. 2 (1941).

sono matrici dello stesso ordine, aventi tutti gli elementi nulli ad eccezione di quello di posto $2i-2, 2i-3$ che è uguale ad 1.

Si verifica subito che le unità U_i si moltiplicano con la tabella (2); dunque: le matrici \mathfrak{M} , così come le matrici \mathfrak{M}' , con $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ numeri complessi, danno un esempio concreto di numeri n -duali e la loro totalità può assumersi come algebra dei numeri n -duali.

È evidente che oltre alle matrici dei tipi \mathfrak{M} ed \mathfrak{M}' vi sono tutte quelle di tipo intermedio, nelle quali alcune coordinate sono raggruppate in matrici di tipo \mathfrak{M} ed altre in matrici di tipo \mathfrak{M}' si da avere matrici di tutti gli ordini compresi tra n e $2(n-1)$ ⁽²⁾.

Dalla rappresentazione con matrici del tipo \mathfrak{M}' o del tipo misto discende la seguente importante osservazione: *l'algebra dei numeri n -duali si può costruire mediante algebre di numeri n_i -duali con $n_i < n$ e precisamente vale il teorema:*

I) *un numero n -duale può riguardarsi come una $(n-1)$ -pla di numeri biduali aventi tutti lo stesso coefficiente del modulo; oppure come un gruppo di r_1 numeri n_1 -duali, r_2 numeri n_2 -duali, \dots , r_h numeri n_h -duali con:*

$$\sum_{i=1}^{i=h} r_i (n_i - 1) = n - 1$$

ciascuno avente lo stesso numero complesso per coefficiente del modulo.

2. L' S_r PROIETTIVO n -DUALE. - In ordine alla definizione generale di S_r ipercomplesso legato ad un'algebra, data dal prof. Spampinato ⁽³⁾, diremo S_r

(2) Così ad esempio l'algebra dei numeri penta-duali può essere interpretata dalle seguenti matrici:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & x_1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & x_1 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cccccc} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & x_1 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cccccc} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & 0 & x_1 \end{array} \right\|,$$

$$\left\| \begin{array}{cccccc} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & x_1 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cccccc} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & x_1 \end{array} \right\|.$$

Si riscontra facilmente che i cinque aggregati di unità, corrispondenti alle singole matrici precedenti, soddisfano tutti alla tabella di moltiplicazione (2).

(3) N. SPAMPINATO, *Teoria delle caratteristiche in un'algebra dotata di modulo ed S_r ipercomplessi*. «Memoria della R. Acc. dei Lincei», ser. 6^a, vol. IV, fasc. IV (1936).

numerico n -duale la totalità delle $(r+1)$ -ple di numeri n -duali non tutti nulli, nè divisori dello zero e di caratteristica massima; diremo invece S_r proiettivo n -duale un insieme di elementi che possa mettersi in corrispondenza biunivoca, senza eccezioni, con tali $(r+1)$ -ple di numeri n -duali.

Una $(r+1)$ -pla di numeri n -duale $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(r+1)})$ con

$$\xi^{(i)} = x_1^{(i)} u_1 + x_2^{(i)} u_2 + \dots + x_n^{(i)} u_n \quad (i = 1, 2, \dots, r+1)$$

è di caratteristica massima solo se i coefficienti $x_i^{(i)}$ del modulo u_i non sono tutti nulli; ma allora la $(r+1)$ -pla $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(r+1)})$ con

$$\eta^{(i)} = x_1^{(i)} U_1 + x_2^{(i)} U_2 + \dots + x_n^{(i)} U_n \quad (i = 1, 2, \dots, r+1)$$

è di caratteristica massima quando e solo quando lo è la $(r+1)$ -pla $(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(r+1)})$. Inoltre se μ è un numero n -duale non nullo nè divisore dello zero, le due $(r+1)$ $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(r+1)})$ e $(\mu\eta^{(1)}, \mu\eta^{(2)}, \dots, \mu\eta^{(r+1)})$ hanno la stessa caratteristica, così come avviene per le due $(r+1)$ -ple: $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(r+1)})$ e $(\mu\xi^{(1)}, \dots, \mu\xi^{(r+1)})$ dunque: l' S_r numerico n -duale può considerarsi indifferentemente come l'insieme delle $(r+1)$ -ple di numeri n -duali $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(r+1)})$ o $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(r+1)})$, entrambe di caratteristica massima e definite equivalenti se differiscono per un fattore n -duale non nullo nè divisore dello zero.

Consideriamo un punto dell' S_r numerico n -duale, cioè una $(r+1)$ -pla $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(r+1)})$ di numeri n -duali, di caratteristica massima e costruiamo la matrice $\|\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(r+1)}\|$ ottenuta affiancando le $r+1$ matrici $\eta^{(i)}$, avremo:

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x_2^{(2)} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & x_1^{(r+1)} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2^{(1)} x_1^{(1)} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x_2^{(2)} x_1^{(2)} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & x_2^{(r+1)} x_1^{(r+1)} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_1^{(1)} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1^{(2)} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x_1^{(r+1)} 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_3^{(1)} x_1^{(1)} \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3^{(2)} x_1^{(2)} \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x_3^{(r+1)} x_1^{(r+1)} \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_1^{(1)} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_1^{(2)} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & x_1^{(r+1)} 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_n^{(1)} x_1^{(1)} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_n^{(2)} x_1^{(2)} \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & x_n^{(r+1)} x_1^{(r+1)} \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Questa si compone di $n-1$ matrici del tipo:

$$(4) \quad \left\| \begin{vmatrix} x_1^{(i)} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_i^{(2)} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_i^{(r+1)} 0 \\ x_i^{(1)} x_1^{(1)} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_i^{(2)} x_1^{(2)} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_i^{(r+1)} x_1^{(r+1)} \end{vmatrix} \right\| \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

ognuna delle quali è costituita da una $(r+1)$ -pla di caratteristica massima di numeri *biduali* e pertanto al variare delle $x_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), ($j = 1, 2, \dots, r+1$) queste $n-1$ $(r+1)$ -ple descrivono $n-1$ S_r numerici biduali. Si osservi però che tutte queste $(r+1)$ -ple di numeri biduali hanno le stesse coordinate $x_i^{(j)}$, ciò porta che gli $n-1$ S_r numerici biduali che esse descrivono hanno mutuamente i bipunti in corrispondenza proiettiva. Sussiste pertanto il teorema:

II) Un S_r n -duale è la totalità delle $(n-1)$ -ple di punti di $n-1$ S_r biduali distinti, i cui S_r complessi di bipunti sono mutuamente proiettivi.

Infatti fissare un punto dell' S_r n -duale equivale a fissare la matrice (3), ossia le $n-1$ matrici (4), cioè $n-1$ punti di $n-1$ S_r biduali con i bipunti in corrispondenza proiettiva.

3. LA VARIETÀ BIDUALE IMMAGINE DELL' S_r n -DUALE. - Al teorema II) si può dare un'altra forma estendendo all' S_r proiettivo biduale la nota definizione di varietà di Segre⁽⁴⁾. Diremo varietà biduale di Segre, di specie n ed indici p_1, p_2, \dots, p_n , la varietà delle n -ple di punti $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ che si vengono a formare associando un punto qualunque A_1 di S_{p_1} proiettivo biduale, con un punto qualunque A_2 di un S_{p_2} proiettivo biduale, \dots , con un punto qualunque A_n di un S_{p_n} proiettivo biduale.

Ciò posto si riconosce subito che esiste uno stretto legame tra l' S_r n -duale e la varietà di Segre di specie $n-1$ ed indici tutti uguali ad r dell' $S_{(r+2)^{n-1}-1}$ proiettivo biduale. Infatti le $(n-1)$ -ple di punti che costituiscono i punti di questa varietà si ottengono associando ad $n-1$ ad $n-1$ i punti di $n-1$ S_r biduali *in tutti i modi possibili*; mentre le $(n-1)$ -ple di punti degli stessi $n-1$ S_r biduali, che formano i punti dell' S_r n -duale, sono scelte con la condizione che i relativi S_r complessi di bipunti siano in corrispondenza proiettiva. Pertanto possiamo enunciare il teorema II) nella forma seguente:

III) $L'S_r$ n -duale è una varietà W appartenente alla varietà di Segre di specie $n-1$ ed indici tutti uguali ad r dell' $S_{(r+2)^{n-1}-1}$ proiettivo biduale.

Così ad esempio l' S_1 triduale è una varietà W appartenente alla varietà di Segre di specie 2 ed indici (1, 1) dell' S_3 biduale. Per determinare le equazioni di questa varietà consideriamo in un S_3 biduale due S_1 : r, s ; se $\xi = x_1 u_1 + x_2 u_2$, $\eta = y_1 u_1 + y_2 u_2$ sono le coordinate omogenee di un punto corrente su r e $\xi' = x'_1 u_1 + x'_2 u_2$, $\eta' = y'_1 u_1 + y'_2 u_2$ quelle di un punto corrente su s , le equazioni della varietà di Segre di specie 2 ed indici (1, 1) sono:

$$(5) \quad \begin{cases} X_1 = x_1 x'_1 u_1 + (x_1 x_3 + x'_1 x_2) u_2 \\ X_2 = x_1 y'_1 u_1 + (x_1 y_3 + x_2 y'_1) u_2 \\ X_3 = x'_1 y_1 u_1 + (x_3 y_1 + x'_1 y_2) u_2 \\ X_4 = y_1 y'_1 u_1 + (y_1 y_3 + y'_1 y_2) u_2 \end{cases}$$

e quelle della varietà W , immagine dell' S_1 triduale sono:

$$(6) \quad \begin{cases} X_1 = x_1^2 u_1 + x_1 (x_2 + x_3) u_2 \\ X_2 = x_1 y_1 u_1 + (x_1 y_3 + x_2 y_1) u_2 \\ X_3 = x_1 y_1 u_1 + (x_1 y_2 + x_3 y_1) u_2 \\ X_4 = y_1^2 u_1 + y_1 (y_2 + y_3) u_2 \end{cases}$$

cosicchè lo studio dell' S_1 triduale è ricondotto a quello della varietà W dell' S_3 biduale di equazioni parametriche (6).

(4) GAETANO SCORZA, *Sulle varietà di Segre*. « Nota della R. Acc. delle Scienze di Torino » (1909-1910).

In modo analogo si determinano le equazioni parametriche negli altri casi; basta partire dalle equazioni parametriche della corrispondente varietà di Segre e porre in esse uguali tutti i coefficienti della u_1 .

4. LE RAPPRESENTAZIONI COMPLESSE DELL' S_r PROIETTIVO n -DUALE. — Le rappresentazioni complesse dell' S_r proiettivo n -duale dipendono dal tipo di matrici che si adotta per interpretare l'algebra n -duale.

In corrispondenza alle matrici del tipo \mathfrak{M} si ha una rappresentazione in un $S_{n(r+1)-1}$ proiettivo complesso; in corrispondenza a matrici di tipo \mathfrak{M}' la rappresentazione si effettua in un $S_{2(n-1)(r+1)-1}$ proiettivo complesso ed ovviamente in corrispondenza a matrici di tipo misto si hanno rappresentazioni complesse in spazi di dimensioni intermedie tra $n(r+1)-1$ e $2(n-1)(r+1)-1$.

Consideriamo le rappresentazioni nei due spazi di dimensioni $n(r+1)-1$ e $2(n-1)(r+1)-1$.

Data la $(r+1)$ -pla $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(r+1)})$ di numeri n -duali di caratteristica massima, interpretate le ξ come matrici del tipo \mathfrak{M} affiancandole si ottiene una matrice di n righe ed $n(r+1)$ colonne, del tipo:

$$(7) \left\| \begin{array}{cccccccccccc} x_1^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & x_1^{(r+1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2^{(1)} & x_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 & x_2^{(2)} & x_1^{(2)} & 0 & \dots & 0 & \dots & x_2^{(r+1)} & x_1^{(r+1)} & 0 & \dots & 0 \\ x_3^{(1)} & 0 & x_1^{(1)} & \dots & 0 & x_3^{(2)} & 0 & x_1^{(2)} & \dots & 0 & \dots & x_3^{(r+1)} & 0 & x_1^{(r+1)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(1)} & 0 & 0 & \dots & x_1^{(1)} & x_n^{(2)} & 0 & 0 & \dots & x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(r+1)} & 0 & 0 & \dots & x_1^{(r+1)} \end{array} \right\|.$$

Interpretiamo gli elementi delle righe di tale matrice come coordinate omogenee di n punti P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) di un $S_{n(r+1)-1}$ proiettivo complesso. Questi punti sono indipendenti perchè la caratteristica della matrice (7) è massima (ossia n) e perciò individuano un S_{n-1} . Si verifica facilmente che la $(r+1)$ -pla $(\mu\xi^{(1)}, \mu\xi^{(2)}, \dots, \mu\xi^{(r+1)})$, con μ numero n -duale non nullo nè divisore dello zero, individua lo stesso S_{n-1} , pertanto questo S_{n-1} corrisponde biunivocamente al punto $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(r+1)})$ dell' S_r numerico n -duale.

Al variare delle ξ nell' S_r numerico n -duale i punti P_i variano nell' $S_{n(r+1)-1}$ e precisamente il punto P_1 varia nell' S_r : α individuato dagli $r+1$ punti, vertici della piramide di riferimento, $A_1, A_{n+1}, A_{2n+1}, \dots, A_{nr+1}$; mentre ogni altro punto P_h ($h = 2, 3, \dots, n$) accoppiato con P_1 individua un $2r$ -complesso Γ di rette del tipo di quelli indicati dal prof. Spampinato⁽¹⁾ quali immagini di S_r biduali proiettivi. Si hanno così, nell' $S_{n(r+1)-1}$ proiettivo complesso $n-1$ $2r$ -complessi Γ di rette, tutti con lo stesso asse α e giacenti in $n-1$ S_{2r+1} distinti, intersecantesi lungo l' S_r α . Dunque: l' S_r proiettivo n -duale si rappresenta in un $S_{n(r+1)-1}$ proiettivo complesso mediante un nr -complesso Φ di S_{n-1} individuato dalle $\infty^{nr}(n-1)$ -ple di rette uscenti dai punti di un S_r : α ed appartenenti ad $n-1$ $2r$ -complessi speciali Γ , aventi l'asse α in comune e giacenti in $n-1$ S_{2r+1} che si recano sólo lungo l' S_r α .

Ad una rappresentazione complessa analoga si perviene considerando l'algebra n -duale come insieme di matrici di tipo \mathfrak{M}' . Infatti riferendosi alla matrice (3) ed interpretando gli elementi delle singole righe come coordinate omogenee di $2(n-1)$ punti Q_i d'un $S_{2(n-1)(r+1)-1}$ proiettivo complesso si viene ad individuare in tale spazio un S_{2n-3} perchè i $2(n-1)$ punti Q_i sono indipendenti. Si verifica subito che la $(r+1)$ -pla $(\mu\eta^{(1)}, \mu\eta^{(2)}, \dots, \mu\eta^{(r+1)})$, con μ numero n -duale non nullo nè divisore dello zero, individua lo stesso S_{2n-3} ; dunque questo S_{2n-3} è l'immagine del punto $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(r+1)})$ dell' S_r numerico n -duale.

Al variare delle η nell' S_r numerico n -duale i punti Q_i variano nell' $S_{2(n-1)(r+1)-1}$ e precisamente i punti $Q_1, Q_3, \dots, Q_{2n-3}$ variano rispettivamente negli $n-1$ S_r indipendenti: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ con $\alpha_i \equiv A_{2i-1} A_{2n+2i-3} \dots A_{2r(n-1)+2i-1}$ dove i punti A_i sono i vertici della piramide di riferimento dell' $S_{2(n-1)(r+1)-1}$. Tali $S_r \alpha_i$ sono tra loro riferiti proiettivamente perchè i punti $Q_1, Q_3, \dots, Q_{2n-3}$ hanno tutti nei rispettivi S_r in cui variano, le stesse coordinate. Ogni altro punto Q_{2i} accoppiato al punto Q_{2i-1} , determina un $2r$ -complesso di rette giacenti nell' S_{2r+1} individuato dai punti fondamentali: $A_{2i-1} A_{2i} A_{2n+2i-3} A_{2n+2i-2} \dots A_{2r(n-1)+2i}$; Ma allora, poichè un punto dell' S_r proiettivo n -duale ha per immagine nello $S_{2(n-1)(r+1)-1}$ proiettivo complesso l' S_{2n-3} individuato dai punti Q_i , si ha: *dati in un $S_{2(n-1)(r+1)-1}$ proiettivo complesso $n-1$ $2r$ -complessi di rette Γ giacenti in $n-1$ S_{2r+1} indipendenti e, riferiti gli assi α_i di tali $2r$ -complessi Γ a due a due proiettivamente, si considerino gli S_{2n-3} che congiungono $n-1$ rette appartenenti ciascuna ad uno degli $n-1$ $2r$ -complessi Γ , ed uscenti dai punti degli assi α_i omologhi nelle proiettività fissate tra gli assi stessi. La totalità di tali S_{2n-3} costituisce un nr -complesso Ψ di S_{2n-3} che rappresenta l' S_r proiettivo n -duale.*

Si riscontra subito che facendo coincidere gli $n-1$ $S_r \alpha_i$, assi degli $n-1$ $2r$ -complessi Γ l' nr -complesso di S_{2n-3} , Ψ si trasforma nell' nr -complesso di S_{n-1} , Φ ottenuto con la rappresentazione precedente.

Altre rappresentazioni complesse dell' S_r proiettivo n -duale si ottengono interpretando l'algebra n -duale mediante matrici di tipo misto tra \mathfrak{M} ed \mathfrak{M}' .

Geometria. — *Sulle varietà quasi-asintotiche.* — I. *Proprietà elementari collegate alla nozione di specie.* Nota di GIACOMO SABAN, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. In questi ultimi anni sono stati pubblicati alcuni lavori sulle varietà quasi-asintotiche⁽¹⁾ coi quali può dirsi chiusa la prima fase delle ricerche in questo campo. Dopo i primi esempi di varietà dotate di superficie quasi-asinto-

(*) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) La definizione di curve e di varietà quasi-asintotiche è stata data da E. BOMPIANI in *Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi*. «Proceedings of the Fifth Int. Congress of Mathem.», Cambridge (1912), vol. II, p. 24. Alle quasi-asintotiche sono dedicati i seguenti lavori del Bompiani: *Sopra alcune estensioni di teoremi di Meusnier e di Eulero*. «Atti Acc. Torino», 48, n. 5 (1912-13); *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli*

tiche ⁽²⁾, una Nota del Longo ⁽³⁾, in cui viene costruita una varietà sulla quale si trovano varietà subordinate quasi-asintotiche di tutte le dimensioni, risolve in modo soddisfacente la questione dell'esistenza.

D'altra parte si sono avute, specie ad opera del Villa ⁽⁴⁾, ricerche nelle quali si passava già ad applicazioni di queste nozioni. Così, ultimamente il Vaona ⁽⁵⁾, pur dando un ulteriore esempio di varietà dotate di superficie quasi-asintotiche, mostrava, fra l'altro, che sulla grassmanniana delle rette di S_n , queste superficie rappresentano i sistemi doppiamente infiniti di rette che godono di alcune particolari proprietà.

Ma rimane ancora da svolgere in modo organico la teoria delle varietà quasi-asintotiche, e, quale necessaria premessa ad ulteriori ricerche su questo argomento, che dovranno ovviamente farsi mediante equazioni alle derivate parziali, ho creduto opportuno raccogliere nel presente lavoro alcuni teoremi ed osservazioni elementari su queste varietà, alle quali si può pervenire facendo uso soltanto del metodo proiettivo.

In questa prima parte ho esposto alcuni teoremi che riguardano in modo particolare la specie, mentre nella parte successiva intendo esaminare la relazione che intercorre fra varietà quasi-asintotiche ad una data e le varietà a loro subordinate: pervengo infine ad un teorema che dà la condizione sufficiente perchè su una varietà generica non possano trovarsi varietà quasi-asintotiche di un certo tipo.

I. — PROPRIETÀ ELEMENTARI COLLEGATE ALLA NOZIONE DI SPECIE.

2. Ricordiamo che si chiama varietà V_k quasi-asintotica $\sigma'_{r,s}$ ($0 < r < s$) di una V_m una varietà subordinata della V_m , tale che lo $S(r)$ osculatore ⁽⁶⁾ alla V_m in un punto di V_k , e lo $S(s)$ osculatore ivi alla V_k abbiano uno spazio congiun-

iperspazi. «Rend. Circ. Mat. Palermo», 37 (1914); *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica.* «Atti Acc. Torino» (1914); *Sullo spazio d'immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve.* «Rend. Istit. Lombardo» (1914); *Sur les courbes quasi-asymptotiques des surfaces dans un espace quelconque.* «C. R. Acad. des Sciences» (1919); *Analisi metrica delle varietà quasi-asintotiche sulle superficie degli iperspazi.* «Rend. Acc. Lincei», ser. V, vol. 25 (1916); *Geometria proiettiva di un'equazione a derivate parziali, lineare omogenea. — I. Classificazione delle varietà quasi-asintotiche. — II. Sistemi invarianti associati ad un sistema di varietà quasi-asintotiche.* «Rend. Lincei», XXVIII (1938).

(2) C. BOGDAN, *Sopra una classe di V_3 che ammettono un'infinità di superficie quasi-asintotiche dipendenti da una funzione arbitraria.* Questi «Rendiconti», ser. VI, vol. XXVII (1938) e M. VILLA, *Sulle superficie quasi-asintotiche della V_4^6 di S_8 che rappresenta le coppie dei punti di due piani.* «Rend. Cl. Sc. R. Accad. d'Italia», ser. VII, vol. I, pp. 228-237 (1940).

(3) C. LONGO, *Sopra una classe di varietà che ammettono varietà subordinate quasi-asintotiche.* Questi «Rendiconti», ser. VIII, vol. V, pp. 19-21 (1948).

(4) Cfr. la seconda Nota citata in (2).

(5) G. VAONA, *Curve e superficie quasi-asintotiche della varietà di Grassmann che rappresenta le rette di uno spazio lineare.* «Boll. Un. Mat. Ital.», ser. III, Anno IV, pp. 360-367 (1949).

(6) Ricordiamo che lo spazio $S(r)$ osculatore d'una varietà in un suo punto è lo spazio lineare riempito dagli S_r osculatori a tutte le curve della varietà spiccate da quel punto. Cfr. E. BOMPIANI, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero.* «Atti Accad. Scienze di Torino» (1912-13), vol. XLVIII, n. 2 a 5.

gente di dimensione d inferiore a quella che compete ad una generica V_k di V_m . Allora la dimensione d può assumere un determinato numero di valori, decrescendo a partire da uno massimo, $d_0 = c - 1$, dove c è la dimensione dello spazio congiungente nel caso generico. Quindi le varietà quasi-asintotiche V_k di medesimi indici r ed s , si distinguono ancora dal carattere t , introdotto dal Villa⁽⁷⁾ e da lui chiamato la *specie* della quasi-asintotica: la si può definire mediante l'equazione $t = c - d$.

Ricordiamo ancora che lo $S(p)$ osculatore generico ad una qualsiasi varietà V_q ha dimensione $\binom{p+q}{q} - 1$, e conveniamo di indicare con $S^q(p)$ lo $S(p)$ osculatore alla V_q in un suo punto generico.

Consideriamo allora una varietà V_k subordinata ad una V_m data: lo $S^k(s)$ ha dimensione $\binom{s+k}{k} - 1$, mentre lo $S^m(r)$ ha dimensione $\binom{r+m}{m} - 1$: ma se $0 < r < s$, lo $S^k(r)$ è contenuto in $S^m(r)$, e siccome la dimensione di $S^k(r)$ è $\binom{r+k}{k} - 1$, soltanto

$$\rho = \binom{s+k}{k} - \binom{r+k}{k}$$

punti di $S^k(s)$ sono generalmente indipendenti da quelli di $S^m(r)$. La dimensione c dello spazio congiungente lo $S^k(s)$ d'una generica V_k di V_m con lo $S^m(r)$ di V_m in un punto comune è dunque

$$(1:1) \quad c = \binom{r+m}{m} + \binom{s+k}{k} - \binom{r+k}{k} - 1.$$

3. Possiamo allora estendere alle varietà un teorema, dovuto al Villa⁽⁸⁾, per le curve quasi-asintotiche. Indichiamo a questo scopo con \cup , \cap rispettivamente la riunione e l'intersezione di due spazi lineari, con \emptyset lo spazio vuoto, con $\text{Dim}[\dots]$ la dimensione dello spazio (ottenuto eventualmente come combinazione di spazi) racchiuso nelle parentesi quadre. Basta ora riprodurre, appena modificandola, la dimostrazione del Villa, traducendola via via nel simbolismo introdotto.

Supponiamo data una varietà V_k , quasi-asintotica $\sigma'_{r,s}$ di una varietà V_m , e non giacente entro uno spazio lineare di dimensione $\binom{s-1+k}{k} - 1$. Allora si ha, per quanto s'è detto al n. 2,

$$\text{Dim}[S^m(r) \cap S^k(s)] = \binom{r+k}{k} + t - 1 > \binom{r+k}{k} - 1.$$

Sia $r < p < s$, e consideriamo $S^k(p)$: è $\text{Dim}[S^k(p)] = \binom{p+k}{k} - 1$. Consideriamo in $S^k(p)$ un qualsiasi spazio S_g (con $g = \binom{p+k}{k} - 1 - \binom{r+k}{k}$) che sia sghembo con $S^k(r)$, cioè tale che sia

$$(1:2) \quad S_g \cap S^k(r) = \emptyset.$$

(7) Cfr. il n. 1 della Nota del VILLA citata in (2).

(8) M. VILLA, *Ricerche sulle curve quasi-asintotiche*. Questi «Rendiconti», ser. VI, vol. XXVIII, pp. 246-253 (1938).

Poniamo

$$S_i = S^m(r) \cap S^k(s):$$

è ovviamente $i = \binom{r+k}{k} - 1 + t$. In tali ipotesi S_g è sghembo con S_i . Supponiamo difatti che sia vero il contrario: sia allora O un punto della intersezione non vuota di questi due spazi: O giace in entrambi, ma S_g è per ipotesi contenuto in $S^k(p)$, ed S_i appartiene per definizione ad $S^m(r)$, quindi O fa parte della intersezione di questi due spazi. Ma d'altra parte, essendo sempre $S^k(r)$ contenuto in $S^m(r)$, anche $S^k(r)$ appartiene ad $S^m(r) \cap S^k(p)$. Ora O giace in S_g , sghembo con $S^k(r)$ per la (1:2), cioè O non appartiene ad $S^k(r)$. Ne risulta che

$$\text{Dim}[S^m(r) \cap S^k(p)] \geq \text{Dim}[S^k(r) \cup O] > \binom{r+k}{k} - 1,$$

cioè l'ipotesi che l'intersezione di S_i con S_g abbia almeno un punto porta di conseguenza che la varietà V_k sia non una quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$, bensì una quasi-asintotica $\sigma_{r,p}$, con $p < s$. Essendo questo contrario alle ipotesi, rimane stabilito che S_g è effettivamente sghembo con S_i . Dunque

$$(1:3) \quad \text{Dim}[S_i \cup S_g] \geq \binom{p+k}{k} - 1 + t > \binom{p+k}{k} - 1.$$

Essendo $p > r$, ed S_i contenuto in $S^m(r)$, S_i appartiene pure ad $S^m(p)$, come pure appartiene ad $S^m(p)$ lo spazio $S^k(p)$, poichè $m > k$: ma S_g vi giace, quindi $S_i \cup S_g$ è contenuta in $S^m(p)$. Analogamente S_i è in $S^k(s)$, ed $S^k(p)$, che contiene S_g , dovendosi pure trovare in $S^k(s)$, $S_i \cup S_g$ è contenuto in $S^k(s)$. Si ha quindi che $S_i \cup S_g$ giace in $S^m(p) \cap S^k(s)$, e, per la (1:3)

$$\text{Dim}[S^m(p) \cap S^k(s)] \geq \text{Dim}[S_i \cup S_g] \geq \binom{p+k}{k} - 1,$$

cioè la varietà V_k è una quasi-asintotica $\sigma_{p,s}$, con $r < p < s$. Dalla formula (1:3) viene d'altra parte che $t' \geq t$. Quindi, nella ipotesi che la V_k non sia contenuta per intero entro uno spazio lineare di dimensione $\leq \binom{s-1+k}{k} - 1$, resta dimostrato il teorema seguente:

Ogni varietà V_k , quasi-asintotica $\sigma'_{r,s}$, di una varietà V_m , è anche quasi-asintotica $\sigma'_{p,s}$ con $r < p < s$, e $t' \geq t$, della medesima varietà.

Vedremo invece in uno dei numeri successivi quello che si può dire nel caso che la varietà sia contenuta entro uno spazio lineare.

4. Supponiamo che la specie t delle V_k quasi-asintotiche di indici r ed s di V_m possa assumere τ valori, e similmente indichiamo con τ' i valori che può assumere la specie delle V_k quasi-asintotiche di indici p ed s ($r < p < s$). Allora dal teorema precedente si trae facilmente che $\tau' \geq \tau$.

È facile migliorare questo risultato. Abbiamo visto al n. 2 che lo spazio congiungente lo $S^k(s)$ d'una generica V_k di V_m con lo $S^m(r)$ di questa ha la dimensione c data dalla formula (1:1): invece l'intersezione di questi due spazi ha la dimensione $\binom{r+k}{k} - 1$. Ebbene, d , dimensione dello spazio congiungente nel

caso di V_k quasi-asintotica di indici r ed s , non può assumere tutti i valori compresi tra questi due limiti. Se difatti indichiamo con τ la quantità

$$(1:4) \quad \tau = \binom{s+k}{k} - \binom{s+k-1}{k} = \binom{s+k-1}{k-1},$$

si possono definire sulla V_m generica prescelta, varietà V_k quasi-asintotiche di soltanto τ specie diverse. Perchè, se la dimensione dello spazio congiungente fosse $d = c - \tau - p$, con $\tau < \tau + p < \varphi$ (cfr. n. 2), ovvero $d = \binom{r+m}{m} - 1 + p$, con $0 < p < \binom{s+k-1}{k} - \binom{r+k}{k}$, cioè se V_k avesse specie superiore a τ , ogni generico spazio di dimensione $\binom{s+k-1}{k} - 1$ contenuto in $S^k(s)$ avrebbe lo spazio d'intersezione con $S^m(r)$ di dimensione

$$i = \binom{s-1+k}{k} + p - 1 > \binom{r+k}{k} - 1,$$

quindi anche lo spazio $S^k(s-1)$ di V_k avrebbe intersezione di dimensione superiore a quella che ordinariamente le dovrebbe corrispondere con $S^m(r)$, cioè la V_k stessa sarebbe una varietà quasi-asintotica $\sigma_{r,s-1}$ di data specie ⁽⁹⁾.

Facciamo osservare infine che dalla formula (1:4) risulta che il numero di specie di varietà quasi-asintotiche $\sigma_{r,s}$ di dimensione k su una V_m , è indipendente sia da r che da m , quindi:

a) Su una varietà V_m possono esistere un medesimo numero di specie di V_k quasi-asintotiche $\sigma_{p,s}$ e $\sigma_{q,s}$ ($p, q < s$).

b) Due generiche varietà V_m e V_n ($m, n < k$) possono ammettere un medesimo numero di specie di quasi-asintotiche V_k di indici r ed s .

5. Consideriamo una V_m contenente spazi lineari S_k ($k < m$) in numero discreto od infinito. È ovvio che questi spazi S_k , considerati come V_k subordinate di V_m , sono varietà quasi-asintotiche della V_m .

Difatti, esaminiamo lo spazio $S^k(s)$, dove supponiamo s qualunque: questo spazio non è regolare ⁽¹⁰⁾, e si riduce ad S_k stesso. S_k , a sua volta, appartenendo alla V_m , giace nel suo spazio osculatore $S^m(r)$: quindi la dimensione dello spazio congiungente $S^m(r)$ con $S^k(s)$ è quella di $S^m(r)$, cioè $\binom{r+m}{m} - 1$. Siccome nel caso generale è invece

$$(1:1) \quad c = \binom{r+m}{m} + \binom{s+k}{k} - \binom{r+k}{k} - 1,$$

S_k è una quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ di V_m di specie

$$t = \binom{k+s}{k} - \binom{k+r}{k}:$$

(9) Dalla formula (1:4), ottenuta estendendo per l'appunto l'argomentazione del Villa (sempre la Nota citata in (2)) sulle curve quasi-asintotiche, si riottiene immediatamente che ne esistono solamente di specie uno, e che quindi la distinzione in specie è, in quel caso speciale, superflua.

(10) Lo spazio $S^m(n)$ osculatore ad una varietà generica V_m dicesi, con Bompiani, regolare quando ha dimensione $\binom{n+m}{m} - 1$.

deve però essere verificata la limitazione $t \leq \tau$, cioè deve essere

$$\binom{r+k}{k} \geq \binom{s-1+k}{k}.$$

Questo ha luogo per $r \geq s-1$, ma avendosi altresì $s > r$, r non può assumere che l'unico valore $r = s-1$, quindi

Ogni spazio lineare S_k contenuto in una varietà V_m è una varietà quasi-asintotica di indici $s-1$ ed s (s qualunque) e di specie $t = \tau$ di V_m .

Passiamo ora a considerare le varietà V_h ($h < k$) immerse in uno S_k contenuto in una V_m .

Osserviamo anzitutto che $S^h(q)$ giace in $S^k(q)$, cioè in S_k : supponiamo allora d'aver scelto un intero p in guisa che

$$(1:5) \quad \binom{h+p-1}{h} - 1 < k < \binom{h+p}{h} - 1.$$

Lo spazio $S^h(p)$ non è quindi regolare, e lo spazio congiungente $S^h(p)$ con $S^m(r)$ ha dimensione $\binom{r+m}{m} - 1$. Essendo

$$(1:1) \quad c = \binom{r+m}{m} + \binom{p+h}{h} - \binom{r+h}{h} - 1$$

la V_h è una quasi-asintotica di V_m di specie

$$t = \binom{p+h}{h} - \binom{r+h}{h}.$$

L'osservazione fatta prima vale ancora, cioè dovendo essere $t \leq \tau$, si ha

$$\binom{r+h}{h} \geq \binom{p-1+h}{h},$$

ovvero, essendo inoltre $p > r$, $r = p-1$. E dunque:

Ogni V_h appartenente ad uno spazio lineare S_k di una varietà V_m , con h e p scelti in modo che sia verificata la (1:5), è una varietà quasi-asintotica della V_m , di indici $q-1$, q (q qualunque $\geq p$) e di specie $t = \tau$.

Infine possiamo considerare le varietà V_h di V_m contenute in uno spazio lineare S_k non facente parte di V_m , e, se $k > m$, non contenente V_m . Scelto ancora p in modo che valga la doppia ineguaglianza (1:5), sarà di nuovo $S^h(p)$ contenuto in S_k . Quindi lo spazio congiungente $S^m(q)$ ($q < p$) con $S^h(p)$ avrà dimensione minore di quella che dovrebbe avere per la formula (1:1), e dunque:

Ogni V_h subordinata di una varietà V_m e giacente in uno spazio lineare S_k , è una varietà quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ di V_m con r ed s qualunque, ma verificanti alle ineguaglianze $r < s$, $s > p$ (p determinato dalla (1:5)).

6. Supponiamo che la V_k sia una varietà quasi-asintotica $\sigma_{s-1,s}^\tau$ (τ dato dalla (1:4)) della varietà V_m : ciò significa che $S^k(s)$ è contenuto in $S^m(s-1)$. Se la V_k è regolare deve dunque essere

$$\binom{k+s}{k} \leq \binom{m+s-1}{m}:$$

quindi, prefissati m e k , risultano determinati da questa ineguaglianza i valori s per i quali possono esistere sulla V_m delle varietà $V_k \sigma_{s-1, s}^\tau$.

Se invece è

$$(1:6) \quad \binom{k+s}{k} > \binom{m+s-1}{m}$$

perchè la varietà V_k rimanga una quasi-asintotica $\sigma_{s-1, s}^\tau$, necessariamente essa non deve essere regolare nel punto considerato, e quindi in ciascun suo punto.

Ma le uniche varietà non regolari in ogni loro punto, che non siano spazi lineari o contenute in essi, sono le varietà luoghi di spazi lineari ⁽¹¹⁾: consideriamo quindi una V_k che sia luogo di ∞^α spazi lineari $S_{k-\alpha}$ ($0 \leq \alpha \leq k$). Lo spazio $S_k^k(s)$ di una tale varietà V_k ha dimensione

$$\binom{\alpha+s}{s} + (k-\alpha) \binom{\alpha+s-1}{s-1} - 1 \quad (12)$$

e deve dunque essere verificata la condizione

$$(1:7) \quad \binom{\alpha+s}{s} + (k-\alpha) \binom{\alpha+s-1}{s-1} \leq \binom{m+s-1}{m}$$

perchè, nonostante la (1:6), la V_k sia $\sigma_{s-1, s}^\tau$. Prefissati k , m ed s , la (1:7) determina uno o più valori di α che definiscono le varietà luoghi di spazi per cui ciò accade, quindi:

Data una V_m , e $k < m$, soddisfacenti alla (1:6), se esistono V_k subordinate alla V_m e formate da $\infty^\alpha S_{k-\alpha}$ con α verificante la (1:7), queste sono tutte e sole le V_k quasi-asintotiche $\sigma_{s-1, s}^\tau$ della V_m .

Ad esempio, prendiamo una V_4 , e consideriamone le V_3 che ne siano le varietà quasi-asintotiche $\sigma_{2,3}^{10}$: la (1:6) è verificata (20, 15), e quindi non esistono V_3 quasi-asintotiche regolari. La (1:7) diventa

$$\binom{\alpha+3}{3} + (3-\alpha) \binom{\alpha+3-1}{3-1} \leq 15$$

e, dovendo essere $0 \leq \alpha \leq 3$, si trova che gli unici due valori compatibili con queste due ineguaglianze sono $\alpha = 0$ ed $\alpha = 1$; concludendo:

a) se la V_4 contiene spazi lineari S_3 questi sono varietà quasi-asintotiche $\sigma_{2,3}^{10}$ (in conformità con quanto abbiamo visto nei nn. precedenti);

b) se la V_4 contiene V_3 formate da sistemi ∞^1 di S_2 (piani), queste sono pure varietà quasi-asintotiche $\sigma_{2,3}^{10}$;

c) invece non sono quasi-asintotiche del tipo assegnato le V_3 formate da ∞^2 rette (tali che ∞^1 di esse non giacciono in piani).

(11) Cfr. ad esempio, C. SEGREGÈ, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, «Rendic. Circ. Matem. di Palermo», to. XXX (1910).

(12) Questa formula si verifica facilmente, tenendo presente che le equazioni parametriche del generico punto d'una varietà luogo di ∞^α spazi $S_{k-\alpha}$ sono lineari in $k-\alpha$ parametri.

Geometria. — *Sopra alcune superficie algebriche uniformizzabili.*

Nota di ALDO ANDREOTTI, presentata (*) dal Socio F. SEVERI.

Le classi di superficie algebriche di cui si conosce una rappresentazione parametrica con funzioni analitiche uniformi di due variabili sono in numero molto ristretto (superficie razionali, riferibili a rigate, ellittiche, iperellittiche, superficie delle coppie non ordinate di punti di una curva algebrica, superficie prodotto di due curve algebriche, involuzioni su ciascuno di tali tipi, ...).

Picard (1), studiando alcuni sistemi di nuove trascendenti, generalizzanti sotto un certo aspetto le classiche funzioni abeliane, affacciò per primo l'ipotesi che tali funzioni potessero essere utilizzate per la uniformizzazione di tipi di superficie più generali di quelli fino allora parametrizzabili.

Si tratta qui di quei sistemi di funzioni meromorfe, studiati per la prima volta, nel caso di una sola variabile, da Poincaré, e successivamente, per più variabili dallo stesso Picard, i quali ammettono un teorema di moltiplicazione. Con ciò s'intende che esistano certe costanti a, b, \dots, l , (tante quante sono le variabili u, v, \dots, w) non tutte a modulo unitario, tali che i valori delle funzioni del sistema nel « punto » (au, bv, \dots, lw) si esprimano razionalmente per quelli nel punto (u, v, \dots, w) .

Ebbene Picard, nella Nota citata, enuncia, dando appena un cenno della dimostrazione, un teorema secondo il quale una superficie algebrica possedente una trasformazione razionale in sé, con determinate proprietà differenziali nell'intorno d'un punto unito, è parametrizzabile colle funzioni suindicate. Egli osserva che alla famiglia delle superficie suddette appartengono le superficie razionali e quelle iperellittiche ed aggiunge: *il serait, je crois, intéressant de rechercher s'il y a d'autres surfaces que les précédentes... rentrant dans la classe sur laquelle certaines équations fonctionnelles appellent ainsi l'attention.*

In una Memoria di prossima pubblicazione (cui ho accennato a piè di pagina) dò risposta al problema precedente. Anzitutto dimostro compiutamente il teorema di Picard; e poi *provo la possibilità di uniformizzare colle dette funzioni la superficie generica di talune famiglie di superficie algebriche* (quali ad esempio le superficie del 4° ordine contenenti una coppia di rette incidenti o no; le superficie di Enriques di genere $p_g = 0$, bigenere $P_2 = 1$, trigenere $P_3 = 0$) *che non sono né razionali né iperellittiche né appartengono ad alcuno dei tipi indicati.* Delle funzioni che intervengono assegno le espressioni effettive in serie di funzioni razionali.

L'ultimo degli esempi citati appare particolarmente interessante; per valori particolari dei moduli si ottengono superficie iperellittiche che già si erano presentate nei classici lavori di Enriques-Severi e Bagnera-De Franchis. Ciò è del

(*) Nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) In una Nota dei « Comptes rendus » del 4 luglio 1904. Per le citazioni circostanziate riferentisi all'argomento rinviamo alla Memoria, sullo stesso soggetto, che apparirà prossimamente nelle « Memorie dell'Accademia Nazionale dei XL ».

tutto naturale se si pensa che le funzioni abeliane appaiono come caso particolare di quelle di Picard-Poincaré. Su queste superficie già da tempo (1910) Severi; proprio in vista del problema dell'uniformizzazione, aveva attratto l'attenzione degli studiosi in una delle sue Memorie sulla base.

Al termine del lavoro si prova che le superficie algebriche non razionali uniformizzabili colle funzioni di Picard-Poincaré hanno necessariamente il genere lineare $p^{(1)} \leq 1$ sicchè, se si escludono le superficie razionali, quelle riferibili a rigate e le ellittiche ed iperellittiche, restano soltanto superficie con un fascio di genere uguale all'irregolarità di curve ellittiche o superficie regolari con tutti i generi uguali ad 1. Gli esempi addotti mostrano che entrambi questi casi sono possibili.

Mi sembra anche opportuno di ricordare una proposizione di passaggio: *ogni trasformazione razionale d'una superficie non razionale di genere lineare $p^{(1)} > 1$ in sé è necessariamente birazionale* ²⁾.

Non resta naturalmente escluso che esistano funzioni ancor più generali con le quali si possano parametrizzare classi più vaste di superficie.

Geometria algebrica. — *Sulla classificazione delle superficie algebriche regolari con un fascio di curve ellittiche.* Nota di FEDERICO GAETA, presentata (*) dal Socio F. SEVERI.

Nel corso di ricerche sulle superficie algebriche con un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali ho avuto necessità di perfezionare e rettificare in qualche punto quelle d'Enriques⁽¹⁾ sulla classificazione delle superficie regolari di genere lineare assoluto $p^{(1)} = 1$ con un fascio lineare, privo di punti base, $|C|$ di curve ellittiche⁽²⁾. In questa Nota dò un breve sunto dei risultati in proposito. Ricostruisco completamente con metodo nuovo la teoria delle superficie di determinante uno, impostando esplicitamente in questo caso il problema dei moduli delle superficie algebriche (secondo le vedute di Severi). Con lo stesso metodo si ritrovano le famiglie di superficie di determinante due studiate da Enriques; passo poi a studiare i rapporti che intercedono fra le s ($s \geq 0$) curve ellittiche doppie $2C_1, 2C_2, \dots, 2C_s$, del fascio $|C|$, i sistemi pluricanonici della

(2) Teorema che può pensarsi caso particolare di una proprietà generale riguardante le coppie di superficie algebriche che abbiano un plurigenere P_k uguale cui corrisponda un sistema k -canonico colla parte variabile irriducibile e semplice; ogni trasformazione razionale fra due superficie siffatte è di necessità birazionale.

(*) Nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) Nei lavori *Sui piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$* , «Rend. Acc. Lincei», 1° settembre 1898 e *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$* . «Rend. Acc. Lincei», febbraio 1914 riprodotte nel libro postumo *Le superficie algebriche*, Zanichelli, Bologna 1949, Cap. VII, p. 257 e sg.

(2) Vedi la mia Memoria di prossima pubblicazione *Sulle rigate doppie di genere lineare assoluto $p^{(1)} = 1$* . I metodi adoperati si estendono agevolmente alle superficie irregolari ove il fascio lineare $|C|$ è sostituito da un fascio irrazionale $\{C\}$ di genere uguale all'irregolarità.

superficie ed il gruppo della divisione algebrica ⁽³⁾ delle curve tracciate su di essa. Infine dò la classificazione completa di tutte le superficie di determinante uno e genere p possedenti un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali, giovandomi della classificazione precedentemente stabilita.

I. SUPERFICIE DI DETERMINANTE UNO. — Sia F un modello proiettivo privo di singolarità e di curve eccezionali di una superficie algebrica regolare di genere p (aritmetico = geometrico), con un fascio lineare $|C|$, privo di punti base, di curve ellittiche, di determinante uno ⁽⁴⁾.

Le curve C possiedono un'unisecante irriducibile U (almeno). Il sistema canonico $|K|$ di F coincide col multiplo secondo $p - 1$ del fascio $|C|$:

$$K \equiv (p - 1) C \text{ }^{(5)}$$

e da ciò segue immediatamente che il grado virtuale $[U, U]$ di U esprime in funzione di p , essendo $[U, U] = -(p + 1)$.

Ne segue che il sistema lineare completo $|\Gamma| = |2U + (2p + 2)C|$ di grado $4p + 4$ e genere $3p + 2$ è irriducibile di dimensione $r \equiv 2p + 3$ ⁽⁶⁾, possiede U come curva fondamentale e quindi è privo di punti base. $|\Gamma|$ è composto con l'involuzione I generata dalla $g_2^1 = |2(U, C)|$ sulla generica C .

La rigata Φ^{2p+2} immagine proiettiva di $|\Gamma|$ è un cono razionale normale doppio di $[2p + 3]$ ⁽⁷⁾; l'immagine della unisecante U è un punto V (vertice), le C si mutano in rette per V e le curve Γ si mutano in curve razionali d'ordine $2p + 2$. Ne deriva che $r = 2p + 3$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la rappresentazione delle coppie di I sul cono doppio Φ^{2p+2} sia priva di eccezioni essenziali, è che il fascio $|C|$ sia privo di curve spezzate ⁽⁸⁾.

A posteriori risulta che questa condizione si verifica sulle superficie di genere p e determinante uno che, come vedremo, appaiono a moduli generali.

Sopra una siffatta superficie F si riconosce subito in base al citato criterio d'equivalenza di Severi, che la curva di coincidenza di I è spezzata nella curva U più una curva D irriducibile e priva di punti multipli trisecante le curve C e soddisfacente l'equivalenza:

$$D \equiv 3U + 3(p + 1)C$$

(3) Vedi SEVERI, *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve tracciate sopra una superficie algebrica*. «Rend. Circ. Mat. di Palermo», 2° semestre 1910.

(4) Ricordiamo che chiamasi determinante di una superficie con un fascio $\{C\}$ di curve ellittiche il minimo numero di punti che si possono determinare razionalmente sopra una curva del fascio in funzione del parametro da cui dipende.

(5) Lo si riconosce subito quando il fascio $|C|$ è privo di curve spezzate, applicando un noto criterio d'equivalenza di SEVERI (ved. la sua opera *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* a cura di CONFORTO e MARTINELLI) Ed. Cremonese, Roma 1941, p. 190.

(6) Secondo il teorema di Riemann-Roch per la superficie, ved. ad esempio SEVERI loc. cit. precedentemente Cap. VII, p. 369 e seg.

(7) Indicheremo con $[r]$ uno spazio lineare di dimensione r .

(8) Cioè di eccezioni diverse da quelle offerte dalla curva U ed il vertice V del cono.

Da questa si deduce:

$$(1) \quad \Delta \equiv 3(V + (2p + 2)C)$$

per la componente Δ della curva di diramazione del cono Φ^{2p+2} doppio immagine di D . L'equivalenza (1) esprime che Δ appartiene al sistema triplo di quello delle sezioni iperpiane del cono che è segabile col sistema delle forme cubiche di $[2p + 3]$.

Ogni superficie regolare, di genere p , con un fascio $|C|$ di curve ellittiche, privo di curve spezzate, è birazionalmente equivalente senza eccezioni essenziali, ad un cono razionale normale doppio Φ^{2p+2} di $[2p + 3]$ la cui curva di diramazione è spezzata nell'intorno del vertice V aumentato della sezione (irriducibile e priva di punti multipli) di Φ con una forma cubica dell'ambiente.

Reciprocamente: sopra ogni Φ^{2p+2} di $[2p + 3]$ si può assegnare una curva Δ , sezione con una forma cubica generica, come curva di diramazione (da aggiungersi all'intorno del vertice V) di un cono doppio regolare con un fascio $|C|$ di curve ellittiche, di genere p e determinante uno⁽⁹⁾.

La totalità dei coni razionali doppi Φ^{2p+2} di $[2p + 3]$ con curva $V + \Delta$ di diramazione birazionalmente distinti costituiscono una varietà algebrica irriducibile che chiamiamo con $\mathcal{C}_1(p)$, di dimensione $10p + 8$ ⁽¹⁰⁾.

La varietà $\mathcal{C}_1(p)$ non è ulteriormente ampliabile in una varietà di superficie di determinante uno e genere p , cioè costituisce una famiglia di superficie individuata dai caratteri $q = 0$, $p^{(1)} = 1$, $d = 1$, p .

$\mathcal{C}_1(p)$ contiene pure le superficie coi ricordati caratteri, il cui fascio $|C|$ possiede curve spezzate. Lo spezzamento più generale di una curva \bar{C} del fascio è quello di due componenti razionali irriducibili con una coppia di punti comuni coniugati in I . Il relativo cono doppio non rappresenta più senza eccezioni la superficie. L'unica eccezione essenziale proviene dalla componente della curva spezzata \bar{C} che non ha nessun punto comune con U la quale si muta in un punto doppio della curva Δ . Reciprocamente se la curva Δ acquista un nodo ordinario la curva \bar{C} omologa della generatrice per questo punto è spezzata nel modo suddetto.

I coni doppi di $\mathcal{C}_1(p)$ le cui curve Δ posseggono $2p + 1$ nodi ordinari riempiono una varietà subordinata irriducibile birazionalmente equivalente alla varietà dei piani doppi di genere p del tipo I di Enriques che non costituisce una famiglia nel senso ricordato essendo ulteriormente ampliabile.

La varietà irriducibile dei coni doppi di $\mathcal{C}_1(p)$ le cui curve Δ posseggono $2p + 2$ nodi ordinari (subordinata alla precedente) è birazionalmente equivalente alla varietà dei piani doppi di genere p del tipo II di Enriques⁽¹¹⁾.

(9) L'esistenza del cono doppio è equivalente a quella del piano doppio dedotto a partire da una rappresentazione piana qualsiasi del cono.

(10) Lo si riconosce subito osservando che due generici Φ^{2p+2} di $[2p + 3]$ sono omografici e che sopra un medesimo Φ^{2p+2} due coni doppi possono essere equivalenti quando le relative curve Δ siano equivalenti rispetto al gruppo ∞^{2p+7} delle omografie di $[2p + 3]$ che mutano Φ^{2p+2} in sè ed allora soltanto.

(11) Ved. ENRIQUES libro citato in (1) p. 260 e sg. L'acquisto di un nodo ordinario di Δ fa diminuire di uno il numero di moduli; ciò spiega la differenza di moduli della famiglia $\mathcal{C}_1(p)$ e delle varietà di piani doppi di tipo I o II di genere p dati da Enriques (salvo un errore di calcolo in quelli di tipo II).

Riassumendo:

Le superficie regolari col $p^{(1)} = 1$ di determinante uno si distribuiscono in infinite famiglie dipendenti dall'unico carattere p (genere aritmetico = geometrico) e la superficie di ogni famiglia dipende da $10p + 8$ parametri indipendenti (moduli) ⁽¹²⁾.

2. SUPERFICIE DI DETERMINANTE DUE ($s = 0$). — Una superficie regolare F col $p^{(1)} = 1$, di determinante due possiede un'infinità di sistemi lineari irriducibili di bisecanti le curve del fascio $|C|$, tra le quali giova distinguere quello $|B|$ di grado virtuale $m = [B, B]$ minimo. Supponiamo in questo n. che $|C|$ sia privo di curve ellittiche doppie ($s = 0$), m esprimesi in funzione del genere virtuale π di B mediante la formula:

$$m = 2(\pi - p).$$

La dimensione di $|B|$ non può superare uno e da ciò, in virtù del teorema di Riemann-Roch, discende la disuguaglianza:

$$v = p - \pi \geq 0.$$

Prendo provvisoriamente π ($0 \leq v$) come nuovo carattere per la classificazione, e cerco di determinare le famiglie rispetto ai caratteri sottintesi $q = 0$, $p^{(1)} = 1$ e quelli $d = 2$, $s = 0$, p , π (sempre supponendo $\pi \leq p$). Distinguo i casi $v > 0$ e $v = 0$; con un metodo analogo a quello accennato per le superficie di determinante uno ottengo i seguenti risultati, supponendo esistente la superficie F :

1° caso: $v > 0$. — La bisecante B di grado minimo negativo ($= -2v$) è linearmente isolata. Se il fascio $|C|$ è privo di curve spezzate, F è birazionalmente equivalente senza eccezioni essenziali ad un cono razionale normale doppio Φ^v di $[v + 1]$ con curva di diramazione Δ irriducibile e priva di punti multipli soddisfacente l'equivalenza:

$$(2) \quad \Delta \equiv 4V + (4p - 2\pi + 2)R$$

(V vertice del cono, R generatrice).

2° caso: $v = 0$. — F possiede un secondo fascio $|B|$, privo di punti base, di bisecanti le curve C , di curve di genere p . F è birazionalmente equivalente senza eccezioni ad una quadrica non specializzata doppia, con curva di diramazione irriducibile e priva di punti multipli, quadrisecanti le generatrici di una schiera e $(2p + 2)$ — secanti quelle dell'altra.

In ambedue i casi si riconosce l'esistenza di tali superficie per tutti i valori possibili di p e π . La totalità delle classi di superficie birazionalmente distinte con dati caratteri p, π costituisce una famiglia $\mathcal{C}_2(p, \pi)$ dipendente da $9p + \pi + 9$ moduli se $\pi < p$ e da $10p + 8$ moduli per $p = \pi$.

Una superficie F variabile entro la famiglia $\mathcal{C}_2(p, \pi)$ può tendere ad una superficie particolare \bar{F} sulla quale B si spezza in una bisecante \bar{B} di grado minore ($= m - 4$) più una curva C . Il genere virtuale di \bar{B} è $\pi - 2$. Ne segue facilmente che la famiglia $\mathcal{C}_2(p, \pi)$ contiene quella $\mathcal{C}_2(p, \pi - 2)$ come varietà subor-

(12) Non sussiste dunque il paradosso segnalato da ENRIQUES nella p. 261 del suo libro citato, essendo $10p + 8 \geq 9p - 2p^{(1)} + 12$ per $p \geq 2$.

dinata se $\pi \geq 2$. Applicando questa osservazione più volte si deduce che le superficie di determinante due (con $s = 0$) di genere p si distribuiscono in due famiglie $\mathcal{C}_2(p, p)$ e $\mathcal{C}_2(p, p-1)$ distinguibili dal fatto che le loro curve B siano della stessa parità di p o meno.

Le superficie di $\mathcal{C}_2(p, p-1)$ o $\mathcal{C}_2(p, p)$ rispettivamente coincidono coi piani doppi dello stesso genere dei tipi I' o II' d'Enriques che costituiscono due famiglie (contrariamente a quanto accade per $d=1$), dipendenti da $10p+8$ moduli ($=9p+p-1+9$ per quella $\mathcal{C}_2(p, p-1)$, essendo $\pi = p-1$).

3. IL GRUPPO DELLA DIVISIONE SULLE SUPERFICIE CON $s > 0$. - Per le superficie di determinante due con s curve ellittiche C_1, C_2, \dots, C_s tali che:

$$2C_1 \equiv 2C_2 \cdots \equiv 2C_s \equiv C$$

con $s > 0$ il metodo adoperato conduce come per $s = 0$ ai piani doppi III' d'Enriques che danno luogo a famiglie dipendenti da $10p+s+8 (=8p+P_2+9)$ moduli. L'unica differenza degna di rilievo è che, per s fisso, il genere p individua una famiglia e non due, ciò che dipende dal fatto che lo staccamento di una curva C_i dal sistema $|B|$ diminuisce il carattere π di un'unità e non di due.

Il sistema canonico $|K|$ di F è definito dall'equivalenza:

$$K \equiv C_1 + C_2 + \cdots + C_s + (p-1)C$$

e quello bicanonico dalla:

$$2K \equiv (s+2p-2)C$$

dalla quale si deduce la formula d'Enriques che esprime il bigenere P_2 in funzione di s e del genere p :

$$(3) \quad s = P_2 - 2p + 1.$$

Per esaminare il rapporto fra il bigenere ed il gruppo della divisione delle curve tracciate su F basta osservare che sottraendo da una somma di $2h (\leq s)$ curve distinte fra le C_i , ad esempio le C_1, C_2, \dots, C_{2h} , la curva hC , otteniamo una curva Z :

$$(4) \quad Z = C_1 + C_2 + \cdots + C_{2h} - hC$$

che è evidentemente un divisore dello zero di periodo due.

Dimostro che reciprocamente ogni divisore dello zero è equivalente (algebricamente e quindi linearmente) ad una curva Z del tipo (4).

Sostituendo in (4) hC per $2hC_s$ possiamo scrivere ogni curva Z nella forma:

$$Z \equiv (C_1 - C_s) + (C_2 - C_s) + \cdots + (C_{2h} - C_s) \equiv Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{2h}$$

in guisa che ogni curva Z risulta equivalente ad una combinazione lineare delle $Z_i = C_i - C_s (i = 1, 2, \dots, s-1)$ con coefficienti che assumono soltanto i valori zero od uno.

Ne segue che il gruppo della divisione di F è prodotto diretto di $P_2 - 2p$ ($= s - 1$) gruppi ciclici del secondo ordine; in conseguenza l'invariante σ di Severi per queste superficie esprimesi in funzione del bigenere secondo la formula:

$$\sigma = 2^{P_2 - 2p}.$$

In particolare per le superficie di genere zero risulta $\sigma = 2^{P_2}$, per esempio per le superficie d'Enriques ($p = 0$, $P_2 = 1$) risulta $\sigma = 2^{(13)}$.

4. CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE DI $\mathcal{C}_1(p)$ CON UN GRUPPO INFINITO DISCONTINUO DI TRASFORMAZIONI BIRAZIONALI. — Applicando alle superficie regolari di determinante uno di $\mathcal{C}_1(p)$ ($p > 0$) un noto risultato di Enriques⁽¹⁴⁾ si vede che condizione necessaria e sufficiente affinché una superficie F di $\mathcal{C}_1(p)$ ammetta un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali è che il fascio $|C|$ possieda due unisecanti U_1 ed U_2 almeno. Ponendo $[U_1, U_2] = \gamma + 1$, le superficie di $\mathcal{C}_1(p)$ che ammettono un gruppo siffatto si distribuiscono in infinite sottofamiglie $\mathfrak{D}_1(p, \gamma)$ dipendenti dall'intero γ (che è pure uguale al genere virtuale della bisecante spezzata $U_1 + U_2$). Ciascuna di queste famiglie possiede $9p + 8$ moduli.

γ percorre tutti gli interi a partire da $-1: \gamma = -1, 0, 1, \dots$. La superficie « a moduli generali » di $\mathfrak{D}_1(p, \gamma)$ (con $\gamma < p$)⁽¹⁵⁾ si rappresenta senza eccezioni essenziali sopra un cono razionale normale doppio $\Phi^{p-\gamma}$ di $[p - \gamma - 1]$ la cui curva di diramazione Δ è una quadrisecante le generatrici con un solo punto multiplo secondo $2\gamma + 2$ nel vertice origine di $\gamma + 1$ rami cuspidali ordinari del secondo ordine.

In particolare per $\gamma = -1$ la curva Δ del Φ^{p+1} doppio di $[p + 2]$ è l'intersezione del cono con una forma generica del quart'ordine dell'ambiente.

Le superficie di $\mathfrak{D}_1(p, \gamma)$ per $\gamma > -1$ possono pensarsi come degenerazioni di una superficie variabile entro le famiglie $\mathcal{C}_2(p, p)$ o $\mathcal{C}_2(p, p - 1)$ di determinante due quando una determinata bisecante tende a spezzarsi nelle due unisecante U_1, U_2 .

Una conseguenza immediata di questi risultati è che la superficie F a moduli generali di $\mathcal{C}_1(p)$ non possiede un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali⁽¹⁶⁾, e siccome su tale superficie il fascio $|C|$ è privo di curve spezzate, il numero base assoluto delle superficie a moduli generali di $\mathcal{C}_1(p)$ è due. Siccome non c'è torsione la base minima di F è l'unisecante U più una curva C .

Osserviamo finalmente che l'aumento del numero base assoluto sulla superficie della famiglia $\mathcal{C}_1(p)$ è una condizione non algebrica spezzata in un'infinità numerabile di condizioni algebriche di dimensione p ed in una condizione algebrica semplice (relativa allo spezzamento di una curva del fascio $|C|$).

(13) I metodi esposti in questo n. 3 si generalizzano in modo semplicissimo alle superficie di determinante due con un fascio $\{C\}$ di genere uguale all'irregolarità e, in modo meno immediato, alle superficie col $p^{(1)} = 1$ di determinante superiore.

(14) Ved. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali*. « Rend. Acc. Lincei », (5), vol. 15, II semestre 1906, p. 665.

(15) Per $\gamma \geq p$ rimando alla mia Memoria citata in (2).

(16) Invece sopra ogni superficie algebrica con un fascio $\{C\}$ di curve ellittiche di genere uguale all'irregolarità, esiste un'infinità di trasformazioni razionali della superficie in sè, come dimostro in una recente Nota in corso di pubblicazione negli Atti dell'Istituto veneto.

Topologia. — *Topologia delle curve situate sopra superficie generali del 3° ordine con meno di 27 rette reali.* Nota di MARGHERITA PIAZZOLLA BELOCH, presentata (*) dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. In una mia Memoria dei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » del 1931⁽¹⁾ mi sono occupata della topologia delle curve situate sopra una superficie generale del 3° ordine con 27 rette reali, dimostrando tra l'altro che:

I circuiti d'ordine pari G che si possono tracciare sulla superficie si dividono in tre categorie:

- 1^a Circuiti G aventi tutte le rette della superficie per parisecanti;
- 2^a Circuiti G aventi 15 rette per parisecanti, e 12 per disparisecanti;
- 3^a Circuiti G aventi 11 rette per parisecanti, e 16 per disparisecanti.

I circuiti d'ordine dispari D che si possono tracciare sulla superficie si dividono in tre categorie:

- 1^a Circuiti D aventi tutte le rette della superficie per disparisecanti;
- 2^a Circuiti D aventi 15 rette per disparisecanti, e 12 per parisecanti;
- 3^a Circuiti D aventi 11 rette per disparisecanti, e 16 per parisecanti.

Una curva algebrica, priva di punti multipli, data sulla superficie generale del 3° ordine con 27 rette reali, non può avere più di 7 circuiti d'ordine dispari, qualunque sia l'ordine della curva.

In particolare se la curva possiede un circuito (d'ordine dispari) avente tutte le rette della superficie per disparisecanti, essa non può avere altri circuiti d'ordine dispari.

Esistono sulla superficie effettivamente curve algebriche sghembe, prive di punti multipli, aventi esattamente 7 circuiti d'ordine dispari (ossia il massimo).

2. Accanto alla superficie del 3° ordine con 27 rette reali (e 45 piani tritangenti reali) esistono come è noto⁽²⁾ altre quattro specie di superficie generali del 3° ordine e sono:

- I specie, superficie con 27 rette reali e 45 piani tritangenti reali;
- II specie, superficie con 15 rette reali e 15 piani tritangenti reali;
- III specie, superficie con 7 rette reali e 5 piani tritangenti reali;
- IV specie, superficie con 3 rette reali e 7 piani tritangenti reali;
- V specie, superficie con 3 rette reali e 13 piani tritangenti reali.

(*) Nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) M. PIAZZOLLA BELOCH, *Sulla configurazione delle curve situate sopra una superficie generale del 3° ordine con 27 rette reali.* (« Rend. Circ. Mat. Palermo », tomo LV).

(2) v. R. STURM, *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung.* (Leipzig 1867); L. CREMONA, *Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre.* (« Journ. f. Math. », 1868; *Opere Matematiche*, tomo III).

Le prime quattro specie si possono rappresentare ⁽³⁾ sopra un piano in modo che le immagini delle sezioni piane siano cubiche passanti per sei punti fondamentali. Per la V specie ciò invece non è possibile.

In questa rappresentazione per la I specie tutti i punti fondamentali sono reali, per la II specie quattro punti fondamentali sono reali e gli altri due immaginari coniugati, per la III specie due punti fondamentali sono reali e quattro immaginari, coniugati a coppie, per la IV specie i sei punti fondamentali sono tutti immaginari e coniugati a coppie.

Le prime quattro specie si compongono tutte di una sola falda, la V specie invece si compone di due falde, una d'ordine dispari e l'altra d'ordine pari (ovale).

3. Alle superficie delle specie II, III, IV si possono applicare i procedimenti e metodi della detta mia Memoria, modificandoli opportunamente secondo la particolarità della rappresentazione piana. La V specie si può trattare direttamente, come mostrerò più oltre.

Si trova così per le superficie della II e III specie che:

Sopra una superficie generale del 3° ordine con 15 rette reali (7 rette reali) i circuiti d'ordine pari G che vi si possono tracciare si dividono in due categorie:

1^a Circuiti G aventi tutte le 15 (rispettivamente 7) rette della superficie per parisecanti;

2^a Circuiti G aventi 7 (rispettivamente 3) rette per parisecanti, e 8 (risp. 4) per disparisecanti.

I circuiti dispari D si dividono in due categorie:

1^a Circuiti D aventi tutte le 15 (risp. 7) rette della superficie per disparisecanti;

2^a Circuiti D aventi 7 (risp. 3) rette per disparisecanti, e 8 (risp. 4) per parisecanti.

Una curva algebrica, priva di punti multipli, situata sopra una superficie del 3° ordine di II (e III) specie con 15 (risp. 7) rette reali, non può avere più di 5 (risp. 3) circuiti d'ordine dispari.

In particolare se essa possiede un circuito d'ordine dispari avente tutte le rette della superficie per disparisecanti, essa non può avere altri circuiti d'ordine dispari.

Esistono effettivamente sulle dette superficie curve algebriche sghembe aventi il suddetto massimo numero di circuiti d'ordine dispari.

Per le superficie di IV e V specie invece si trova che:

Sopra una superficie generale del 3° ordine con 3 rette reali e 7 (risp. 13) piani tritangenti reali esiste una sola categoria di circuiti d'ordine pari che hanno le tre rette reali nella superficie tutte per parisecanti, ed esiste una sola categoria di circuiti d'ordine dispari che hanno le tre rette reali della superficie tutte per disparisecanti.

(3) Ved. loc. cit. (2).

Una curva algebrica d'ordine n , priva di punti multipli, situata sopra una superficie del 3° ordine di IV (o V) specie con 3 rette reali e 7 (risp. 13) piani tritangenti reali, non possiede alcun circuito d'ordine dispari se n è pari, ne possiede uno e uno solo se n è dispari⁽⁴⁾.

OSSERVAZIONE. — Il massimo numero N di circuiti d'ordine dispari che può presentare una curva algebrica situata sopra una superficie del 3° ordine, appartenente ad una delle prime quattro specie, è legato all'ordine di connessione C della superficie medesima, che secondo Klein⁽⁵⁾, per le superficie delle specie I, II, III, IV è rispettivamente 8, 6, 4, 2, mentre N è rispettivamente 7, 5, 3, 1, come si è detto.

Dunque $N = C - 1$.

Meccanica. — *Proprietà grupपालi del tensore energetico.* Nota II di ALDO KRANJC, presentata^(*) dal Socio G. GIORGI.

Fra tutti i possibili gruppi di trasformazioni d'un S_4 consideriamo quelli che mutano in se il ds^2 . Essi prendono il nome di movimenti, perchè fisicamente corrispondono a moti rigidi del corpo determinante l' S_4 . Le trasformazioni infinitesimali sono soggette ad alcune limitazioni esprimenti la rigidità del corpo.

Pel principio d'isomorfismo avremo allora che ogni operazione di ricoprimento corrisponderà ad un movimento in se dell' S_4 . Anzichè determinare tutti i possibili gruppi d'operazioni sul tensore energetico e calcolare quindi l' S_4 corrispondente risolvendo le (1), si può quindi seguire la via opposta.

(4) Per le superficie della IV specie questi risultati si trovano anche qui con gli stessi metodi della mia sopracitata Memoria; per quelle della V specie invece si deducono dalle considerazioni seguenti. La falda d'ordine pari (ovale) di quest'ultima specie di superficie contiene soli circuiti d'ordine pari, che non segano evidentemente le tre rette reali della superficie, le quali giacciono sulla falda d'ordine dispari di essa. La falda d'ordine pari (ovale) divide lo spazio in due regioni, una in cui si possono condurre per intero delle rette o dei piani (*regione esterna*), l'altra in cui ciò non è possibile (*regione interna*). La falda d'ordine dispari della superficie contiene le tre rette della superficie, e soltanto su di essa si possono tracciare circuiti d'ordine dispari. Questa falda si può proiettare in modo biunivoco, sopra un piano π , da un punto O , preso ad arbitrio internamente alla falda d'ordine pari. Le sue tre rette reali r_1, r_2, r_3 , si proietteranno in tre rette del piano π , ogni suo circuito d'ordine pari in un circuito d'ordine pari, e ogni circuito d'ordine dispari in un circuito d'ordine dispari. Da ciò segue che ogni circuito d'ordine pari della superficie sega le rette r_1, r_2, r_3 , ognuna in un numero pari di punti, e ogni circuito d'ordine dispari della superficie le sega ognuna in un numero dispari di punti, e che due circuiti d'ordine dispari sulla superficie si segano in un numero dispari di punti. Da ciò seguono le proprietà enunciate.

(5) F. KLEIN, *Ueber Flächen dritter Ordnung*. § 17 («Math. Annalen», Bd. 6, 1873; «Ges. Math. Abhandlungen», Bd. 2).

(*) Nella seduta del 13 maggio 1950.

La determinazione degli S_4 che ammettono un gruppo continuo o discontinuo di movimenti è stata oggetto di studi di Fubini⁽¹⁾. In questa Nota ci limiteremo a considerare solo gli spazii dati da

$$(3) \quad ds^2 = V^2 dt^2 - \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s \quad (r, s = 1, 2, 3)$$

con V costante, le a_{rs} funzioni solo di $x_1 x_2 x_3$, e che ammettono un gruppo continuo di movimenti. Ciò corrisponde alla ricerca di soluzioni statiche in cui la velocità della luce sia costante. La metrica (3), oltre a presentare interesse nel caso delle soluzioni statiche, è di fondamentale importanza nella teoria cinematica di Milne⁽²⁾.

Le equazioni (1) mal si prestano all'applicazione che ne vogliamo fare. È preferibile l'impiego delle equazioni di Levi-Civita:

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha^{(rk)} a_{ik} = R & , \quad \frac{\beta T_{00}}{V^2} = R - \lambda \\ \alpha^{(ik)} - \lambda a^{(ik)} = -\beta T^{(ik)} \end{cases}$$

dove $\alpha^{(ik)}$ è il simbolo di Ricci relativo alla forma $a_{rs} dx_r dx_s$.

Dalle $T^{(ik)}$ si ottengono gli sforzi X_{ik} mediante le

$$(5) \quad X_{ik} = \frac{T_{ik}}{\sqrt{a_{ii} a_{kk}}}.$$

La densità d'energia è data da T_{00}/V^2 .

Gli S_3 , dotati d'un gruppo continuo di movimenti possono avere solo 1, 2, 3, 4 o 6 parametri. La loro forma e struttura si può sempre ricondurre ad uno ed uno solo degli spazii determinati da Bianchi⁽³⁾. In totale essi sono 17; sostituendo le espressioni delle a_{rs} nelle (4), si possono ottenere tutte le possibili forme dei tensori energetici statici ammettenti gruppi continui di ricoprimenti e pei quali la velocità della luce sia costante. I calcoli non presentano difficoltà, ma in alcuni casi sono alquanto laboriosi. Perciò esamineremo soltanto i casi più semplici e di maggiore interesse fisico.

Lo spazio ammettente un gruppo ad un parametro è d'immediata interpretazione fisica. Poichè esso ha per espressione $dl^2 = a_{ik} dx_i dx_k$ con le a_{ik} dipendenti da y e z , ma non da x , ne viene che le componenti del tensore energetico dovranno esse pure essere indipendenti da x . Ciò avverrà ad esempio nel caso di uno spazio riempito da fette di materia tutte uguali fra loro e sovrapposte l'una all'altra, oppure d'un anello circolare filiforme omogeneo.

Fra gli spazii ammettenti un G_2 di movimenti ha interesse fisico particolare il caso abeliano, cui corrisponde $dl^2 = dx^2 + \alpha dy^2 + 2\beta dy dz + \gamma dz^2$ con α, β, γ funzioni della sola x e tali che $\alpha, \gamma > 0$ ed $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$.

(1) *Sugli spazii che ammettono un gruppo continuo di movimenti*. «Ann. Mat. Pura ed App.», serie III, vol. VIII, p. 39 (1903).

(2) Ved. MILNE, *Relativity, gravitation and world structure*. «Oxford University Press», 1935.

(3) Ved. BIANCHI, *Sugli spazii a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*. «Mem. Soc. It. Sc.», serie III, to. IX, p. 267 (1898).

Si ottiene

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\beta T^{00}}{\sqrt{2}} + \lambda &= \frac{1}{4\Delta} (\beta'^2 - \alpha' \gamma') - \gamma'' \frac{\alpha}{2\Delta} + \beta'' \frac{\beta}{\Delta} - \alpha'' \frac{\gamma}{2\Delta} + \frac{1}{4\Delta^2} (2\alpha\gamma\beta'^2 - \\ &\quad - 4\alpha\beta\beta'\gamma' + \alpha^2\gamma'^2 - 4\beta\gamma\alpha'\beta' + 2\beta^2\beta'^2 + 2\beta^2\alpha'\gamma' + \gamma^2\alpha'^2) \\ -\beta T^{(11)} &= \frac{1}{4\Delta} (\beta'^2 - \alpha' \gamma') - \lambda; \quad -\beta T^{(12)} = -\beta T^{(13)} = 0; \quad \Delta = \alpha\gamma - \beta^2 \\ -\beta T^{(22)} &= -\frac{\gamma''}{2\Delta} + \frac{1}{4\Delta^2} (\gamma\beta'^2 - 2\beta\beta'\gamma' + \alpha\gamma'^2) - \lambda \frac{\gamma}{\Delta} \\ -\beta T^{(23)} &= \frac{\beta''}{2\Delta} - \frac{1}{4\Delta^2} (\gamma\beta'\alpha' - \beta\beta'^2 - \beta\alpha'\gamma' + \alpha\beta'\gamma') + \lambda \frac{\beta}{\Delta} \\ -\beta T^{(33)} &= -\frac{\alpha''}{2\Delta} + \frac{1}{4\Delta^2} (\gamma\alpha'^2 - 2\beta\alpha'\beta' + \alpha\beta'^2) - \lambda \frac{\alpha}{\Delta}. \end{aligned} \right.$$

Fra gli S_3 dotati di un G_3 di movimenti, tre di essi ammettono un G_3 intransitivo, e cinque un G_3 transitivo. Le superfici invarianti corrispondenti al primo caso sono superfici a curvatura costante. È evidente pertanto che su queste superfici il tensore energetico è omogeneo. A seconda del segno della curvatura si hanno i tre tipi:

$$dl^2 = dx^2 + \psi(x)(dy^2 + dz^2)$$

$$dl^2 = dx^2 + \psi(x)(dy^2 + \sin^2 y dz^2)$$

$$dl^2 = dx^2 + \psi(x)(dy^2 + e^{2y} dz^2)$$

a cui corrispondono le componenti $T^{(ik)}$

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\beta T^{00}}{\sqrt{2}} + \lambda &= \frac{\psi'^2}{4\psi^2} - \frac{\psi''}{\psi}; \quad -\beta T^{(11)} = -\frac{\psi'^2}{4\psi^2} - \lambda; \\ T^{(12)} &= T^{(13)} = T^{(23)} = 0 \\ -\beta T^{(22)} &= -\beta T^{(33)} = -\frac{\psi''}{2\psi^2} + \frac{\psi'^2}{4\psi^3} - \frac{\lambda}{\psi} \end{aligned} \right.$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\beta T^{00}}{\sqrt{2}} + \lambda &= \frac{1}{\psi} \left(1 - \psi'' + \frac{\psi'^2}{4\psi} \right); \quad -\beta T^{(11)} = \frac{1}{\psi^2} \left(\psi - \frac{1}{4}\psi'^2 \right) - \lambda; \\ T^{(12)} &= T^{(13)} = T^{(23)} = 0 \\ -\beta T^{(22)} &= \frac{1}{2\psi^2} \left(\frac{\psi'^2}{2\psi} - \psi'' \right) - \frac{\lambda}{\psi}; \quad T^{(33)} = \frac{T^{(22)}}{\sin^2 y} \end{aligned} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\beta T^{00}}{\sqrt{2}} + \lambda &= \frac{1}{\psi} \left(1 - \psi'' + \frac{\psi'^2}{4\psi} \right); \quad -\beta T^{(11)} = -\frac{1}{\psi^2} \left(\psi + \frac{1}{4}\psi'^2 \right) - \lambda; \\ T^{(12)} &= T^{(13)} = T^{(23)} = 0 \\ -\beta T^{(22)} &= \frac{1}{2\psi^2} \left(\frac{\psi'^2}{2\psi} - \psi'' \right) - \frac{\lambda}{\psi}; \quad T^{(33)} = \frac{T^{(22)}}{e^{2y}}. \end{aligned} \right.$$

Esaminiamo dal punto di vista fisico il caso della superficie $x = \text{cost.}$ a curvatura nulla, cioè il primo caso. Passando dalle componenti controvarianti $T^{(ik)}$ agli sforzi X_{ik} si ha

$$X_{11} = T^{(11)}; \quad X_{22} = T^{(22)}\psi = X_{33}$$

da cui

$$X_{11} = \frac{\psi'^2}{4\beta\psi^2} + \frac{\lambda}{\beta}; \quad X_{22} = X_{33} = \frac{\psi''}{2\beta\psi} - \frac{\psi'^2}{4\beta\psi^2} + \frac{\lambda}{\beta}.$$

$$\text{Densità di energia} = \frac{\psi'^2}{4\beta\psi^2} - \frac{\psi''}{\beta\psi} - \frac{\lambda}{\beta} = \frac{T^{00}}{\sqrt{2}}.$$

Pertanto una stratificazione di materia in piani $x = \text{cost.}$, sottoposti a sforzi perpendicolari dati da X_{11} , densità data da T_{00}/V^2 , ed in cui ogni punto del piano $x = \text{cost.}$ sia sottoposto a sforzi di componenti X_{22} ed X_{33} nel piano, dà origine ad una curvatura dell' S_3 del tipo studiato. Si osservi che la condizione $T_{00} = \text{cost.}$ su tutto il piano corrisponde al fatto che questo è superficie invariante rispetto al G_3 ; i movimenti del piano consistono in due traslazioni parallelamente agli assi y e z , ed in una rotazione arbitraria intorno ad un punto qualsiasi del piano: infatti le trasformazioni infinitesimali del G_3 sono $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, $z(\partial/\partial y) - y(\partial/\partial z)$, e si vede subito che si hanno scorrimenti in se delle superfici $x = \text{cost.}$, $y^2 + z^2 = \text{cost.}$ (basta sostituire nelle equazioni di Killing), cioè piano e cilindro il cui asse di rotazione è la varietà sistatica $y, z = \text{cost.}$ cioè una qualsiasi geodetica perpendicolare al piano yz . L'intransitività del gruppo è rispecchiato nella diversa densità della materia sulle varie superfici $x = \text{cost.}$, sì che in generale esse non sono identiche.

Analogamente per gli altri due casi; questi tre tipi di spazii corrispondono fisicamente ad un campo elettrico uniforme; è evidente infatti che le condizioni di simmetria sono quelle ora esaminate, e quindi si può dire a priori che lo spazio dovrà appartenere ad uno dei tre tipi esaminati; infatti ciò è quanto risulta da ricerche di Levi-Civita (4).

Le stesse considerazioni di simmetria permettono, come è noto, di scegliere un S_3 dotato d'un G_6 di movimenti nel caso della massa o della carica elettrica puntiforme, salvo poi a determinare il coefficiente del dl^2 che in generale non sarà costante.

Rimangono i casi del G_3 transitivo e del G_4 , fisicamente meno interessante. Si hanno le formule

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + e^x [dy^2 + 2x dy dz + (x^2 + n^2) dz^2] \\ \frac{\beta T_{00}}{V^2} + \lambda &= -\frac{1+3n^2}{4n^2} \quad ; \quad T_{(12)} = T_{(13)} = 0 \\ -\beta T_{(11)} &= \frac{1-n^2}{4n^2} - \lambda \quad ; \quad -\beta T_{(22)} e^x = x^2 \frac{1-n^2}{4n^4} - \\ &\quad - \frac{x}{n^2} - \frac{n^2+3}{4n^2} - \lambda \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right) \\ -\beta T_{(23)} e^x &= \frac{x(n^2-1)+2n^2}{4n^4} + \frac{\lambda x}{n^2} \quad ; \quad n^2 T_{(33)} e^x = T_{(11)} \end{aligned} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + e^{2x} dy^2 + 2ne^{(h+1)x} dy dz + e^{2hx} dz^2 \\ \frac{\beta T_{00}}{V^2} + \lambda &= \frac{1}{4(1-n^2)^2} [-3n^4(h+1)^2 + n^2(7h^2 + 10h + 7) - \\ &\quad - 4(h^2 + h + 1)] \\ -\beta T_{(11)} &= \frac{n^2(h+1)^2 - 4h}{4(1-n^2)^2} - \lambda \quad ; \quad T_{(12)} = T_{(13)} = 0 \\ -\beta T_{(22)} e^{2x} &= \frac{n^2(5h^2 - 2h + 1) - 4h^2}{4(1-n^2)^2} - \frac{\lambda}{1-n^2} \\ \frac{1-n^2}{n} \beta T_{(23)} e^{(h+1)x} &= -\beta T_{(11)} \\ -\beta T_{(33)} e^{2hx} &= \frac{n^2(h^2 - 2h + 5) - 4}{4(1-n^2)^2} - \frac{\lambda}{1-n^2} \end{aligned} \right.$$

(4) « Rend. Lincei », vol. XXVI, 1° sem., p. 522; vol. XXVII, 2° sem., p. 242.

Questi due casi si riferiscono al G_3 transitivo. Omettiamo, perchè troppo complessi, gli altri tre casi analoghi.

Rispetto al G_4 invece le formule risolutive sono:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + dy^2 + 2x dy dz + (x^2 + 1) dz^2 \\ \frac{\beta T^{(00)}}{V^2} + \lambda &= -\frac{1}{4} ; \quad -\beta T^{(11)} = -\beta T^{(33)} = \frac{1}{4} - \lambda ; \quad T^{(12)} = T^{(13)} = 0 \\ -\beta T^{(22)} &= \frac{1}{4}(x^2 - 3) - \lambda(x^2 + 1) ; \quad -\beta T^{(23)} = x\beta T^{(11)} \end{aligned} \right.$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + e^{2x} dy^2 + 2ne^x dy dz + dz^2 \\ \frac{\beta T^{(00)}}{V^2} + \lambda &= \frac{-3n^4 + 7n^2 - 4}{4(1 - n^2)^2} ; \quad T^{(12)} = T^{(13)} = 0 \\ -\beta T^{(11)} &= \frac{n^2}{4(1 - n^2)} - \lambda ; \quad -\beta T^{(22)}(1 - n^2)e^{2x} = -\beta T^{(11)} \\ -\beta T^{(23)}e^x \frac{1 - n^2}{n} &= \beta T^{(11)} ; \quad -\beta T^{(33)} = \frac{5n^2 - 4}{4(1 - n^2)^2} - \frac{\lambda}{1 - n^2} \end{aligned} \right.$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + (\sin^2 x + n^2 \cos^2 x) dy^2 + 2n \cos x dy dz + dz^2 \\ \frac{\beta T^{(00)}}{V^2} + \lambda &= 1 - \frac{n^2}{4} ; \quad T^{(12)} = T^{(13)} = 0 \\ -\beta T^{(11)} &= -\beta T^{(22)} \sin^2 x = \frac{\beta T^{(23)} \sin^2 x}{n \cos x} = \frac{n^2}{4} - \lambda \\ -\beta T^{(33)} \sin^2 x &= 4 \sin^2 x - 3n^2 \sin^2 x + n^4 \cos^2 x - \lambda(\sin^2 x + n^2 \cos^2 x). \end{aligned} \right.$$

Dato quindi un problema fisico determinato, in generale non sarà possibile porre il ds^2 nell' S_4 sotto la forma scelta, perchè V sarà variabile. Ciononostante si cercherà dapprima di determinare l' S_3 in modo da soddisfare alle proprietà di simmetria ricavabili dai dati, e poi si procederà alla determinazione della V .

Quanto alla determinazione del numero dei gradi di simmetria, cioè del numero delle possibili operazioni continue di ricoprimento, sarà problema da risolvere caso per caso; utili criterii possono essere la ricerca di varietà sistatiche ed invarianti, di varietà soggette a scorrimenti ecc. Inoltre, come si è visto, le $T^{(ik)}$ non sono in generale indipendenti; ora per stabilire una metrica è necessario, ma non sufficiente, definire operativamente l'uguaglianza di due grandezze e quindi è possibile dire che due componenti del tensore energetico sono uguali anche senza conoscere la metrica; perciò bisognerà scegliere quegli spazi che, mediante opportuni valori di costanti ed appropriate funzioni, sono compatibili colla relazione d'uguaglianza.

Meccanica. — *Sulle deformazioni plastiche.* Nota di PLACIDO CICALA, presentata (*) dal Socio M. PANETTI.

1. Le leggi che legano tensioni a deformazioni nel campo elastoplastico sono diversamente formulate da varie teorie, delle quali alcune, dette incrementali, postulano relazioni differenziali, altre, che possono chiamarsi di tipo olonomo, pongono in relazione i valori attuali delle componenti di tensione e di deformazione. Critiche sono state mosse alle teorie dell'uno e dell'altro tipo, nessuna delle quali ha ricevuto sinora completa conferma sperimentale. Recentemente è stata proposta da S. B. Batdorf e B. Budiansky una teoria ⁽¹⁾, di tipo differente da quelli sopra indicati; essa esprime la deformazione plastica come risultante degli scorrimenti che, in ciascuna delle ∞ direzioni su ciascuna delle ∞^2 giaciture, la tensione tangenziale produce secondo una legge che dipende dalla evoluzione della componente stessa e dal materiale in esame ⁽²⁾. La teoria, fondata su un concetto fisico semplice, conduce a sviluppi analitici assai complessi; si presenta però particolarmente interessante, potendo spiegare fenomeni che appaiono in contrasto con le precedenti teorie. In base ad essa, si esamineranno le variazioni nel tensore degli sforzi prodotte dalle piccole deformazioni, in un corpo previamente portato in campo plastico per tensione uniassica.

2. Siano σ_{ij} le componenti di tensione nel punto che si considera ($\sigma_{11} = \sigma_x$, $\sigma_{12} = \tau_{xy}$, ..., $\sigma_{33} = \sigma_z$). Su una sezione la cui giacitura è definita dall'angolo φ che la normale n forma con l'asse z e dall'angolo α che il piano nz fa con y , in una direzione che forma un angolo β col piano nz , si ha la componente di tensione

$$(1) \quad \tau = \frac{1}{2} a_{ij} \sigma_{ij}$$

scritta secondo la notazione tensoriale; il determinante $|a|$ è simmetrico ed è

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11} = \sin 2\alpha \sin \beta \cos \varphi - a_{33} \sin^2 \alpha \\ a_{33} = \cos \beta \sin 2\varphi = -a_{22} - a_{11} \\ a_{12} = \cos 2\alpha \sin \beta \cos \varphi - a_{33} \sin \alpha \cos \alpha \\ a_{13} = \cos \alpha \sin \beta \sin \varphi + \sin \alpha \cos \beta \cos 2\varphi \\ a_{23} = -\sin \alpha \sin \beta \sin \varphi + \cos \alpha \cos \beta \cos 2\varphi \end{cases}$$

(*) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) *A Mathematical Theory of Plasticity based on the Concept of Slip*. «N. A. C. A. Tec. Note», N. 1871, aprile 1949.

(2) Una teoria affine, limitata a materiali esenti da incrudimento, nella quale pertanto lo slittamento si limita alle direzioni di massima τ , fu usata da Prandtl. Cfr. anche REUSS, *Fließpotential oder Gleitebenen?* «Z. a. M. M.», Band 12, Heft 1, p. 15, febbraio 1932.

Secondo Batdorf e Budiansky, le componenti della deformazione plastica sono espresse da

$$(3) \quad \epsilon''_{ij} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\beta \int_0^{\pi/2} a_{ij} F(\tau) \cos \varphi d\varphi$$

essendo $\epsilon''_{11} = \epsilon''_x$ la dilatazione plastica della fibra parallela a x , $\epsilon''_{12} = 1/2 \gamma''_{xy}$, ..., $\epsilon''_{33} = \epsilon''_z$. La funzione F , caratteristica del materiale, rappresenta lo scorrimento specifico prodotto dalla componente τ . Si ammette che per $\tau \leq \tau_p$ (limite di proporzionalità) sia $F = 0$. Nella prima deformazione, F è una funzione crescente di τ ; essa resta costante quando τ diminuisce.

3. Nel caso di trazione semplice, indicando con σ la tensione che si suppone agente secondo l'asse z , per $\sigma > \sigma_p = 2\tau_p$ appaiono deformazioni plastiche calcolabili secondo le (3), essendo le integrazioni estese al campo

$$(4) \quad -\pi < \alpha < \pi, \quad -\mu < \beta < \mu, \quad \frac{\pi}{4} - \psi < \varphi < \frac{\pi}{4} + \psi$$

dove

$$\cos \mu = \frac{\sigma_p}{\sigma} \quad \cos 2\psi = \frac{\cos \mu}{\cos \beta}.$$

Per il calcolo delle dilatazioni plastiche ϵ'' secondo z , e quindi dei moduli secante E_s e tangente E_t , valgono le equazioni

$$(5) \quad \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} = \frac{\epsilon''}{\sigma} = \frac{1}{2\sigma} \int_{\Omega} a_{33} F d\Omega$$

$$(6) \quad \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} = \frac{d\epsilon''}{d\sigma}$$

essendo l'integrale esteso al campo Ω definito dalle (4) e

$$d\Omega = d\alpha \cdot d\beta \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

Raggiunto questo stato di tensione attraverso una estensione sempre crescente, si supponga di produrre una modificazione infinitesima nello stato di deformazione. Per semplicità di notazione, nel seguito, si indicheranno con ϵ''_{ij} , σ_{ij} , τ gli incrementi delle corrispondenti grandezze. Scriviamo le relazioni fra questi incrementi nella forma

$$(7) \quad \epsilon''_{ij} = A_{ij, hk} \sigma_{hk}.$$

I coefficienti A non dipendono solo dallo stato iniziale. Nella teoria che si considera essi sono anche funzioni dei quozienti degli incrementi, per il fatto che gli integrali che li esprimono si estendono solo alla parte di Ω dove l'incremento τ è positivo. In particolare, se σ_z è tale che sia $\tau < 0$ in tutto il campo, le A sono nulle. Se la variazione σ_z è tale che in tutto Ω sia $\tau > 0$, si ottiene:

$$(9) \quad \begin{cases} E_d \varepsilon''_x = \frac{1+a}{4} \sigma_x + \frac{1-a}{4} \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z \\ E_d \varepsilon''_y = \frac{1-a}{4} \sigma_x + \frac{1+a}{4} \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z \\ E_d \varepsilon''_z = \sigma_z - (\sigma_x + \sigma_y)/2 \\ E_d \gamma''_{xy} = a \tau_{xy} \quad E_d \gamma''_{xz} = b \tau_{xz} \quad E_d \gamma''_{yz} = b \tau_{yz} \end{cases}$$

essendo

$$(10) \quad a = \frac{J_2}{J_1} \quad b = \frac{J_3}{J_1} \quad \frac{1}{E_d} = \frac{1}{E_f} - \frac{1}{E} = J_1$$

$$(11) \quad J_1 = \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{dF}{d\tau} a_{33}^2 d\Omega \quad J_2 = \int_{\Omega} \frac{dF}{d\tau} a_{12}^2 d\Omega \quad J_3 = \int_{\Omega} \frac{dF}{d\tau} a_{13}^2 d\Omega.$$

4. Calcoli numerici vennero effettuati nel caso più semplice

$$(12) \quad F = (\tau - \tau_p) F'$$

essendo F' costante. Si trova

$$(13) \quad \begin{cases} 15 J_1/F' = 4 I_0 - (2 + 3 \cos^2 \mu) I_1 + I_2 \\ 3 J_2/F' = 1,5 J_1/F' + 2 I_0 - 4 I_1 + 2 I_2 \\ 5 J_3/F' = 4 I_0 - 2 \sin^2 \mu I_1 - 4 I_2 \end{cases}$$

essendo

$$I_i = \sqrt{2} \pi \cos \mu \int_{-\mu/2}^{\mu/2} \cos^i \psi \cdot 2 \psi \cos \psi (\cos^2 2\psi - \cos^2 \mu)^{-1/2} d\psi \quad (i = 0, 1, 2).$$

Ponendo

$$\sin \psi = t \sin (\mu/2)$$

si riconosce che I_1 e I_2 possono esprimersi mediante gli integrali ellittici completi di prima e seconda specie; I_0 è un integrale completo di terza specie⁽³⁾.

I valori di a e b sono rappresentati dalle linee omonime della fig. 1. Servendosi delle (5) e (12) si trova⁽⁴⁾

$$(14) \quad 1/E_s - 1/E = J_3/3.$$

Il diagramma tensioni-deformazioni che così si ottiene ha la forma indicata nella fig. 1 (a). Si osserva che il fattore F' affetta le ε'' , ma non influisce sui valori di a e b .

5. Interessa confrontare i risultati con quelli di teorie anteriori. Le espressioni a cui conduce la teoria incrementale di Reuss possono porsi nella forma delle (9) con $a = b = 0$; quelle dedotte dalla teoria di tipo olonomo di Hencky danno

$$(15) \quad a = b = 3 E_d \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right).$$

(3) Mediante riduzioni analoghe a quelle che conducono alle (13), possono calcolarsi, col-l'aiuto della tabulazione esistente e dell'integrale I_0 , i valori di J_1, J_2, J_3 quando F sia espressa come serie di potenze di τ .

(4) L'integrale (5) venne calcolato numericamente da Batdorf e Budiansky.

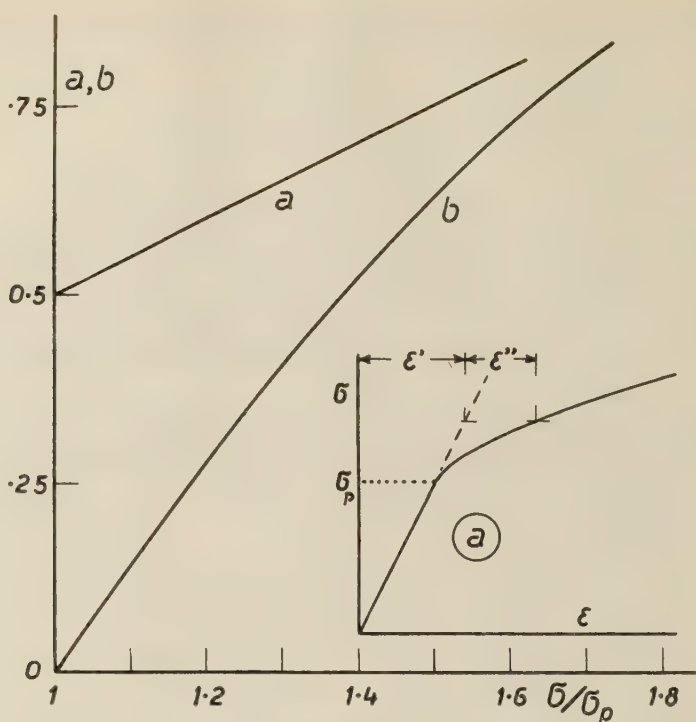


Fig. 1.

Dalle (9), (10), (14) e (15) risulta che i valori di $G' = \tau_{xz}/\gamma_{xz} = \tau_{yz}/\gamma_{yz}$ calcolati secondo la teoria qui considerata e quella di Hencky coincidono. Si conclude che, se un cilindro, trazonato oltre il limite elastico, viene sottoposto a torsione, per deformazioni incipienti il modulo G' è dato da

$$(16) \quad \frac{1}{G'} = \frac{1}{G} + \frac{3}{E_s} - \frac{3}{E}$$

se contemporaneamente alla torsione si introduce un aumento della tensione assiale, tale che le (9) siano valide. Per questo occorre che sia ⁽⁵⁾

$$(17) \quad \frac{\sigma_z}{\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}} \geq 2 \tan \mu.$$

Invece, se l'incremento σ_z della tensione assiale ha il valore opposto, risulta $G' = G$. Si trova inoltre che, se la tensione assiale non viene modificata, deve aversi

$$(18) \quad \frac{1}{G'} = \frac{1}{G} + \frac{3}{2E_s} - \frac{3}{2E}.$$

La classica prova di estensione e torsione può dunque avere valore discriminativo, purchè all'applicare l'azione torcente, si modifichi contemporaneamente lo sforzo assiale. Se questa variazione non ha effetto sul modulo tangenziale, le teorie incrementali che danno sempre $G' = G$ risultano confermate. In caso contrario esse risulterebbero inadeguate a spiegare il fenomeno che la teoria di Batdorf-Budiansky prevede.

(5) Infatti si trova che $\tan \mu$ è il massimo valore assoluto di a_{13}/a_{33} nello spazio Ω .

Meccanica. — *Sur le processus d'association des particules élémentaires.* Nota di IOAN I. PLACINTEANU, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

Les phénomènes caractéristiques pour la région atomique — dûs, en général, aux processus de fusion, désagrégation ou transformation des particules élémentaires qui prennent part à la constitution de la matière (neutrons, protons, électrons, positrons, deutérons, particules alfa, photons, etc.), sont de beaucoup plus compliqués que ceux connus et dominés par la physique actuelle, qui puise ses méthodes d'investigation des deux principes généraux: la conservation de l'énergie et la conservation de l'impulsion. Il paraît certain que l'évolution des phénomènes nucléaires est régie — outre les deux principes énergétiques ci-dessus cités et universellement valables — encore par un autre effet, qui n'a pas encore été précisé, effet qui entre en action dans l'interval de temps qui mesure la durée du processus envisagé.

Les essais de suppléer le manque d'un tel effet par des hypothèses comme celles d'une force newtonienne de type exponentiel, ou des « forces d'échange » (1), n'ont pas encore aboutit à des résultats définitifs.

Étant donné que les phénomènes d'association s'effectuent avec perte de masse propre, il est possible de formuler un principe, que j'appelle « principe adiabatique » — lequel, superposé aux deux principes énergétiques, est capable de rendre un sens physique et une justification théorique au processus d'association des particules élémentaires dans le noyau atomique.

I. — Dans la Note ci-présente j'essaye de définir un tel « effet adiabatique » pour l'association de deux particules, dans la région du noyau atomique à l'aide d'une propriété établie par M. G. Armellini (2) pour un système plan de deux corps à masses variables, soumis à l'action newtonienne: $f \cdot M \cdot m \cdot r^{-2}$; où f = la constante gravifique newtonienne; $M = m_1 + m_2$ est la masse totale; m est la masse réduite définie par la relation $1/m = 1/m_1 + 1/m_2$, où m_1 et m_2 sont les masses des deux corps et r leur distance réciproque.

Le problème de M. Armellini, cité plus haut, a été repris et étendu par T. Levi-Civita (3), à l'aide des considérations d'invariance adiabatique (le théorème de Gibbs-Hertz): le système des deux corps à masses variables, soumis à l'action newtonienne, évolue de telle manière que le hamiltonien peut être regardé comme une fonction (continue et dérivable) de certains paramètres adiabatiques (masses,

(*) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) D. IWANENKO, A. SOKOLOV, « Z. f. Phys. », 119 (1936); « Nature », Lond. 138 (1936).

(2) G. ARMELLINI, « Memorie della Società Italiana delle Scienze (dei XL) », vol. 29 (1915).

(3) TULLIO LEVI-CIVITA, « Atti del Congresso dei Matematici », Bologna, 1928; « Abhandlungen aus dem math. Seminar der Hamburgischen Universität », 1928; « Atti del Congresso Internazionale dei Fisici », Como, 1928; « Journal of Mathematics and Physics », America, XIII, 1937.

distance réciproque, vitesses angulaires, moments d'inertie) qui peuvent varier (*a priori*) arbitrairement, mais très, lentement avec le temps. Pour un tel système – de type Stäckel – Levi-Civita a démontré les théorèmes suivants, que je vais appeler les théorèmes de Armellini et Levi-Civita :

1. « Le produit entre la distance réciproque des deux corps et leur masse totale reste constant ». Il est à remarquer que dans la formule établie par Levi-Civita (loc. cit., I, p. 23, formule 10'') la constante est réduite à l'unité de masse initiale.

2. « Les vitesses angulaires des rotations propres devient, avec le temps, égales entre elles et égales à la vitesse angulaire du mouvement de révolution ».

Pour employer cet effet dans le processus d'association des particules élémentaires il est nécessaire de faire quelques précisions préalables. Savoir : 1. Les théorèmes de Armellini et de Levi-Civita sont valables – avec les modifications nécessaires relativement à la force – aussi bien pour un champ de nature *coulombienne* (action électrique et magnétique), le seul qui règle l'interaction des deux particules en contact suffisamment intime (distances nucléaires) 2. Nous faisons l'hypothèse essentielle suivante : les particules sont considérées comme des petits magnets élémentaires, dont la charge (moment magnétique par unité de longueur) est définie à l'aide du moment magnétique expérimental. Cette hypothèse est parfaitement justifiée par le fait de l'existence d'un moment magnétique du neutron – particule électriquement neutre. 3. Nous allons tenir compte du fait connu que les mouvements, dans la région du noyau atomique sont régies par la mécanique non relativiste.

Cela étant précisée, soit e la charge électrique et μ la charge magnétique. Si l'on prend au lieu du potentiel newtonien, le potentiel coulombien, on doit mettre à la place de la quantité fM , respectivement les quantités : e^2/m , $\mu_1 \mu_2/m$. Dans ce cas, les théorèmes de Armellini et Levi-Civita vont prendre la forme suivante que je vais désigner sous le nom de *principe adiabatique* :

Première loi fondamentale : « Dans le processus d'association de deux particules dont les masses et la distance réciproque varient adiabatiquement, le rapport entre leur distance et la masse réduite, reste constant » ;

Deuxième loi fondamentale : « Si les particules ont des rotations propres, l'invariance adiabatique a comme effet que les vitesses angulaires des rotations propres s'égalisent entre elles et avec la vitesse du mouvement de révolution, autour leur centre de gravité ».

Ce « principe adiabatique », défini par ces deux lois-ci constitue, selon mon point de vue, un effet supplémentaire, superposable à ceux qui résultent de l'application des deux principes généraux de l'énergie et de l'impulsion, dans le processus d'association des particules dans les régions nucléaires.

II. – Dans cette partie nous donnons une application (pour le moment) qualitative de ce principe aux quelques cas typiques d'association pour les masses, en conformité avec la première loi fondamentale énoncée plus haut.

1. *Neutron + Neutron*. La propriété surprenante du neutron (particule électriquement neutre) de posséder un moment magnétique propre, en contradiction avec

la théorie de Dirac, nous suggère de considérer cette particule comme un magnét élémentaire de moment propre $\mu_n = -1,94 \cdot \mu_0$, où $\mu_0 = e/m_n c \hbar = 0,5 \cdot 10^{-23}$ gauss. cm³. est le magnéton nucléaire. Si deux neutrons magnétiques s'installent dans une position antiparallèle, il en résulte la mise en action d'une force attractive de grandeur $\mu_n^2 : r^2$ qui a comme effet la constitution d'une biparticule (hypothétique) neutre, de moment magnétique égal à zéro et de masse $2 m_n - \Delta$, où Δ est le « défaut de masse » nécessaire pour produire l'énergie d'association. Le principe adiabatique entre en action au moment où la distance des deux magnets est suffisamment petite; alors, la première loi fondamentale:

$$\frac{r}{m_n} = \text{constante},$$

d'où résulte:

$$\frac{\delta r}{\delta m_n} = \text{const.},$$

nous indique que la variation $\delta m_n \cdot c^2$ étant égale à l'énergie de couplage ($8 \text{ MeV} = 1,28 \cdot 10^{-5} \text{ erg.}$) la variation de la distance δr doit être de l'ordre de grandeur de $8 \cdot 10^{-16} \text{ cm}$; — ce qui est en accord avec les dimensions empiriques des particules lourdes.

L'hypothèse du neutron magnétique n'est pas en contradiction avec la propriété du neutron de pénétrer dans le noyau atomique (d'autant plus facilement qu'il est plus lent), car le champ positif du noyau exerce une action attractive sur le neutron, dont le moment magnétique négatif est équivalent à une charge électrique négative.

2. *Neutron + Proton*; système à une charge électrique positive, constitué par l'action magnétique entre les deux magnets élémentaires de moments: $\mu = +2,74 \mu_0$ et $\mu_n = -1,94 \mu_0$ — sous la forme d'une biparticule de type deutéron.

La première loi fondamentale donne:

$$\frac{r}{m_p} + \frac{r}{m_n} = \text{const.}$$

Le défaut de masse dans la constitution du deutéron est plus petit (2 MeV) que celui nécessaire pour la formation d'une biparticule neutronique — fait qui trouve, d'après notre théorie, une justification dans l'action supplémentaire de la charge positive du proton qui produit un accroissement de l'attraction des deux particules magnétiques. Le moment magnétique de la particule résultante est $\mu_d = \mu_n + \mu_p = \mu_0$, en conformité avec les données expérimentales.

3. *Deutéron + Deutéron* = particule alfa; système constitué par l'action magnétique entre deux deutérons dans une position antiparallèle, action qui domine la répulsion électrique; en effet, $e = 4,77 \cdot 10^{-10}$, tandis que $\mu = \mu_d : r_d \simeq 10^{-8}$, où r_d signifie le rayon deutérique de l'ordre de grandeur 10^{-10} cm . La stabilité et la fréquence de la particule alfa sont dues à la fréquence de la position d'antiparallélisme des deux deutérons au moment de l'émission d'un noyau radioactif (instable). L'expulsion de la particule α par les noyaux très lourds (de charge Ze , en commençant par $Z \geq 84$) s'explique par le fait que la répulsion électrique entre le

noyau et la particule α n'est plus compensée par l'attraction magnétique, pour un Z suffisamment grand.

4. *Proton + Proton*: c'est plutôt un état (instable) du système neutron + proton, système qui assure la présence des protons dans le noyau. La position d'antiparallélisme peut donner lieu à un deutéron (hypothétique) à charge double à celle du deutéron expérimental - ce qui reste à être vérifié.

5. *Neutron + Positron*; système à charge électrique positive, constitué par l'action magnétique entre les deux particules de masses m_n, m_+ et de moments magnétiques $\mu_n = -1,94 \cdot \mu_0$ et $\mu_+ = +e/m_+ c \hbar = 0,922 \cdot 10^{-20}$ gauss. cm³ = un magnéton de Bohr. Notre loi fondamentale:

$$\frac{r}{m_+} + \frac{r}{m_n} = \text{constante},$$

nous dit qu'à partir d'une distance suffisamment petite, si la masse du positron va se transformer en énergie de couplage: $m_+ \rightarrow 0$, il en résulte que $r \rightarrow 0$ aussi, ce qui conduit à un processus de fusion: il en résulte donc une particule nouvelle; savoir, le proton; dû à l'affinité de la matière pour l'électricité positive. Le processus de fusion, sous l'action massive du magnéton de Bohr (positif) sur le magnet neutronique (négatif et mille fois plus faible) a comme conséquence immédiate le renversement de sens pour le moment magnétique du neutron. Le résultat est que le proton sera munit d'un moment magnétique égal à: $\mu_p = +1,94 \cdot \mu_0$ (moment propre dû à l'enversement de sens du moment neutronique) + $1 \mu_0$ (produit par la charge positive du positron dispersée sur la surface du neutron initial). La valeur expérimentale + 2,78 μ_0 au lieu de la valeur théorique 2,94 μ_0 indique une différence qui peut être expliquée par la perte de masse pendant le processus de fusion.

C'est donc l'affinité de la matière pour l'électricité positive que nous mettons à la base du phénomène physique de la constitution et de la stabilité du noyau atomique. Cette théorie est similaire à celle formulée par M. D. Iwanenko (4) mais à la place de ses β^- — champs (électroniques) nous admettons plutôt la domination des β^+ — champs (positroniques) dans le noyau atomique.

6. *Proton + Electron*; système similaire au précédent qui conduit, par fusion, au neutron initial, avec annihilation des deux charges électriques. L'électron joue, dans ce processus, le rôle d'un agent d'échange concernant les position réciproques du proton et du neutron dans le noyau atomique.

7. *Electron + Positron*; système intéressant, déterminé par l'action coulombienne électrique attractive superposée à l'action magnétique, aussi attractive. La première loi fondamentale:

$$\frac{r}{m_+} + \frac{r}{m_-} = 2 \frac{r}{m_-} = \text{constante},$$

conduit à un processus de fusion: $r \rightarrow 0$ pour $m_+ = m_- \rightarrow 0$, avec perte de masse pour donner naissance à un *photon*. La masse totale perdue $M = m_+ + m_-$

(4) D. IWANENKO, « Nature », Lond., p. 281 (1934).

est égale à la masse nécessaire pour procurer (par le défaut de masse) l'énergie minimale: $Mc^2 = 1 \text{ MeV}$ qui doit posséder un photon pour se décomposer en une paire électron + positron. Donc, la première loi de notre principe adiabatique nous procure une justification et un sens physique pour l'hypothèse déjà faite par nous ⁽⁵⁾, concernant la *théorie électronique de la lumière*; hypothèse développée ultérieurement par M. Louis de Broglie (dans sa bien connue théorie des neutrinos et antineutrinos) et reprise dans une série de travaux intéressants par M. J. Destouches ⁽⁶⁾, sous la forme préconisée par nous; en accord aussi avec M. P. Jordan ⁽⁷⁾ qui réserve les champs des neutrinos pour une éventuelle théorie corpusculaire de la gravitation.

En conclusion pour cette partie de notre théorie, les considérations précédentes mettent en évidence la possibilité d'interpréter le processus d'association de deux particules formant un système de type Stäckel, par l'effet d'invariance adiabatique déduit des théorèmes de Armellini et Levi-Civita – effet qui se superpose aux lois énergétique dans les phénomènes nucléaires.

III. – Si les deux particules sont munies de rotations propres – comme c'est le cas des particules élémentaires à *spin* – la deuxième loi fondamentale de notre principe adiabatique nous permet de formuler aussi des règles pour la composition des spins. Naturellement, on doit se guider par les données de l'expérience; donc, en admettant que les particules ont les spins suivants: électron ($1/2 \hbar$); positron ($1/2 \hbar$); proton ($1/2 \hbar$); neutron ($1/2 \hbar$); deutéron (\hbar); photon (\hbar); particule α (0). Si notre théorie est juste, on doit retrouver les valeurs expérimentales par déduction de l'effet d'association à l'aide du principe adiabatique (savoir, la deuxième loi fondamentale) sans recourir à des hypothèses supplémentaires (l'intervention des particules catalytiques de type neutrino, où Yukawa).

Nous allons distinguer deux cas. 1. *Système constitué par deux particules de masses égales* (n. 1, 2, 3, 4, 7). Le mouvement du système résultant se compose des rotations propres des particules composantes autour des axes qui passent par leurs centres de gravité (axes, que nous supposons perpendiculaires au plan dans lequel se meuvent les centres de gravité) – et du mouvement de révolution autour du centre des masses du système total, qui se trouve au milieu de la distance des centres des deux particules. On doit faire distinction entre les axes de rotations parallèles (n. 2, 7) et antiparallèles (n. 1, 3, 4).

La deuxième loi fondamentale nous permet de formuler la *règle n. 1*: « le spin de la particule résultante par l'association de deux particules de masses égales est donné par la valeur du moment *total* (spin proprement dit + rotation révolutive) de chaque particule, si les spins initiaux sont parallèles. Dans le cas d'antiparallélisme, le spin de la particule résultante est égal à zéro ».

(5) I. I. PLACINTEANU, « C. R. Ac. Sc. Paris », t. 196, p. 1474 (1933); t. 197, p. 549 (1933); t. 203, p. 1343 (1936); t. 204, p. 485, 1238 (1937); « C. R. Ac. Sc. Roum. », II, p. 133, 242 (1938); « Journal de Physique », Paris; t. XII, p. 127 (1936).

(6) J. DESTOUCHES, « C. R. Ac. Sc. Paris »; t. 203, p. 921 (1936); t. 204, p. 1803 (1937).

(7) P. JORDAN, *Anschauliche Quantentheorie*, Berlin, 1936; « Die Naturwissenschaften », XII, 1937.

Soient donc \bar{s}_A, \bar{s}_B les spins des particules composantes A et B et soit \bar{l} le moment cinétique de la trajectoire; le moment total sera: $\bar{s}_A + \bar{l}$ pour A et $\bar{s}_B + \bar{l}$ pour B. La seconde loi fondamentale nous dit que $\bar{s}_A = \bar{l} = \bar{s}_B$; de manière que, d'après la règle n. 1, la rotation propre de chaque particule est égale à $2\bar{s}_A = 2\bar{s}_B$, dans le cas du parallélisme et égal à zéro dans le cas d'antiparallélismes des axes de rotation.

Vérification: neutron $(+ 1/2 \hbar)$ + neutron antiparallèle $(- 1/2 \hbar) =$ biparticule hypothétique de spin zéro; neutron $(1/2 \hbar)$ + proton $(1/2 \hbar) =$ deutéron (\hbar) ; deutéron $(+ \hbar)$ + deutéron antiparallèle $(- \hbar) =$ particule α (0); électron $(1/2 \hbar)$ + positron $(1/2 \hbar) =$ photon (\hbar) .

2. *Particule lourde + particule légère* (n. 5; 6). Le centre de gravité du système coïncide effectivement avec le centre de gravité de la particule lourde: donc, le mouvement de révolution de celle-ci se confond avec son mouvement de rotation propre. Dans le processus de fusion, la particule légère s'anéantissant, le système résultant se réduit à la particule lourde; donc, la rotation du système global va être identique à la rotation propre de la particule lourde.

La deuxième loi fondamentale nous permet de formuler, dans ce cas, la règle n. 2: « le spin de la particule résultante par un processus de fusion entre une particule lourde et une particule légère - avec anéantissement de celle-ci - est égal au spin initial de la particule lourde ».

Vérification: neutron $(1/2 \hbar)$ + positron $(1/2 \hbar) =$ proton $(1/2 \hbar)$;

proton $(1/2 \hbar)$ + électron $(1/2 \hbar) =$ neutron $(1/2 \hbar)$.

Il est à remarquer que M. J. Destouches⁽⁸⁾ a essayé de formuler de telles règles, à l'aide de la théorie de M. Dirac, mais il a été obligé de *postuler*, sans aucune justification, la perte d'un des spins composants. Notre principe adiabatique nous procure une explication logique et conséquente de ce fait, sans hypothèses supplémentaires.

En conclusion, notre théorie repose sur la constatation que le processus d'association des particules élémentaires s'effectue avec perte de masse propre, qui produit l'énergie d'association. Dans l'hypothèse que ce phénomène a lieu par une évolution adiabatique, nous trouvons dans le *principe adiabatique*, formulé à l'aide des deux théorèmes de M. Armellini et de Levi-Civita, un sens physique et une justification théorique pour le processus d'association des particules élémentaires, dans la région du noyau atomique.

(8) J. DESTOUCHES, « C. R. Ac. Sc. Paris »; t. 202, p. 387 (1936).

Astronomia (Astrofisica). — *Il sistema doppio DM Persei* (*).

Nota di ATTILIO COLACEVICH, presentata (**) dal Socio G. ABETTI.

Durante la mia permanenza all'Osservatorio di Mac Donald nel Texas eseguii, tra il 24 novembre ed il 12 dicembre dello scorso anno, una serie di osservazioni fotoelettriche della variabile ad eclisse DM Persei. Gli elementi fotometrici di questa variabile risultavano⁽¹⁾ poco noti mentre osservazioni spettroscopiche⁽²⁾ rivelavano curiose peculiarità nel sistema; infine essa si prestava bene sia per la posizione in quell'epoca dell'anno, sia per le caratteristiche dello strumento a disposizione.

Lo strumento adoperato fu il fotometro fotoelettrico a cella con moltiplicazione interna (1P21) applicato al riflettore di 13" di quell'Osservatorio. Questo complesso, costruito dall'astronomo W. A. Hiltner, che qui sentitamente ringrazio per l'insegnamento della tecnica di osservazione e per avermi permesso l'uso del suo strumento, permette di determinare le grandezze stellari, per stelle di splendore paragonabile a quello della variabile DM Persei, con una precisione di ± 0.003 grandezze per ogni singola osservazione in favorevoli condizioni atmosferiche. Una osservazione consistente in due puntate su una stella di confronto ed una, intermedia, sulla variabile veniva fatta in circa otto minuti portando, nel nostro caso, a determinazioni aventi un errore probabile di ± 0.007 grandezze; questo aumento nell'errore probabile si ritiene dovuto al fatto che si osservò anche in notti poco buone e talvolta a grandi distanze zenitali per poter concludere la ricerca nel poco tempo a disposizione. Vennero compiute nel complesso 345 osservazioni con il filtro giallo Corning 3385 in lunghezza d'onda effettiva di 5500 Å e 160 osservazioni in lunghezza d'onda effettiva di circa 4400 Å usando il filtro Corning 5850. Come stella di confronto venne scelta HD 14434 di tipo spettrale B2 e, per assicurarsi della costanza della luce di questa, vennero inoltre eseguite 43 osservazioni della stella HD 14581 di tipo spettrale A0.

Lo spoglio delle osservazioni ed il confronto con i dati precedentemente noti portò a stabilire con maggiore precisione gli istanti dei minimi dati da B. V. Kukarkin e E. K. Ghiz⁽³⁾ in base ad osservazioni fotografiche e che risultano ora:

$$T = G. G. 2433 \ 251^d.6930 \pm 0^d.0005 + 2^d.727728 E.$$

Questi istanti sono espressi in giorni giuliani corrispondenti al tempo medio di Greenwich eliocentrico dei minimi; E indica il numero d'ordine dei minimi a partire da quello segnato. Altri elementi della curva di luce sono ancora:

(*) Lavoro eseguito nell'Osservatorio di Mc Donald dell'Università del Texas (U. S. A.) a mezzo di una borsa di studio del C. N. R.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) *Princeton Obs.* « Contr. N. 22 », 1947.

(2) « *Astrophys. Journal* », 102, p. 496 (1945).

(3) *Stelle variabili*, « Bollettino della Accademia Sovietica di Scienze », tome 6, p. 335 (1949).

	5500 Å	4400 Å
Massimo di luce	7 ^m . 90	7 ^m . 71
Minimo di luce principale	8 . 58	8 . 48
Minimo di luce secondario	(8 . 02)	(7 . 78)
Durata dell'eclisse principale vero e proprio . . .	0 ^p . 161	0 ^p . 161
Durata dell'eclissi secondaria	0 . 153	—
Durata dell'eclissi di atmosfera	0 . 372 :	0 . 360 ::

Le grandezze stellari sono stabilite con riferimento alla stella di confronto HD 14434. Il valore dei minimi secondari è stato stabilito come verrà detto fra poco. La durata delle eclissi, che sono sempre parziali, è data in parte del periodo di rivoluzione del sistema; i valori della durata dell'eclisse di atmosfera sono un poco incerti (:) o notevolmente incerti (::).

Mentre ci si riserva di pubblicare altrove un'analisi più dettagliata di queste osservazioni, vengono qui riprodotti i luoghi normali delle osservazioni fatte con il filtro giallo (ved. figura). Ciascun luogo normale è costituito dalla riunione in media di quattro osservazioni, quindi l'errore probabile di ognuno di essi è dell'ordine di ± 0.003 grandezze stellari. Risulta dalle osservazioni la simmetria della curva attorno al minimo principale (anche per l'eclisse di atmosfera); quindi i luoghi normali vennero costruiti in dipendenza unicamente dalle fasi in valore assoluto, cosicchè i punti dati alla fase P si ritrovano in quella 1-P.

Ogni luogo normale è rappresentato da un punto. Risulta evidente a prima vista che tra la fase 0.080 e quella 0.186 si ha un andamento anormale della curva di luce. Questa è data ponendo in ordinate la intensità del sistema in luogo della sua grandezza ed assumendo pari ad uno la intensità fuori d'eclisse. Il valore unitario soddisfa la luminosità del sistema tra le fasi 0.186 e l'inizio del minimo secondario e ciò indica che esso non presenta i cosiddetti effetti di ellitticità o di riflessione. Ritengo che l'assorbimento di radiazione che si registra tra le fasi sopramenzionate debbano attribuirsi ad una atmosfera assorbente come spiego in seguito. Qualunque sia l'origine sua, è per la prima volta che un simile fenomeno viene riscontrato in una doppia ad eclisse. Forse qualche cosa di simile si trova nelle osservazioni di A. P. Linnell⁽⁴⁾ della variabile ad eclisse UX Ursae Majoris, dove una stasi analoga si osserva però solamente alla fine dell'eclisse, mentre in questo caso è simmetrico. Però le osservazioni di questa variabile rapidissima (dodici ore di periodo) sono molto difficili per il suo piccolo splendore (13.8-15.2 grandezze).

Per proseguire conviene stabilire l'ammontare dei minimi secondari. Nel caso di due astri sferici e senza oscuramento al lembo, si sa, dalla teoria delle doppie ad eclissi, che le intensità durante la eclissi secondaria si possono ottenere riducendo proporzionalmente quelle corrispondenti dell'eclisse principale.

Dell'eclisse secondaria se ne conosce una buona parte e con il criterio sopradetto si stabilisce con buona precisione il valore del minimo che risulta pari a 0.117 ± 0.010 grandezze. Il confronto tra il minimo principale e quello

(4) *Sky and Telescope*, p. 168 (1949).

secondario indica che l'unità di superficie della componente meno luminosa è 4.5 volte meno emissiva dell'altra. Dalla scala delle temperature del Brill⁽⁵⁾, basata sulle leggi di emissione del corpo nero, si ricava che, se si assume per la componente più luminosa uno spettro B₅ (come risulta dalle osservazioni spettroscopiche), quella meno luminosa si può classificare A6. Si ha allora con un semplice calcolo, che se il minimo principale alla lunghezza d'onda effettiva di 4400 Å ha il valore dato dalle osservazioni, quello secondario in questa lunghezza d'onda deve essere profondo 0.060 grandezze stellari.

Conviene stabilire le dimensioni di questo sistema ad eclisse. È logico pensare che non sia possibile applicare a questo scopo i metodi usuali di analisi di una curva di luce; infatti questa deve ritenersi alterata, anche dentro l'eclisse principale, dalla presenza di un'eclissi atmosferica. Ad ogni buon conto si può dire che calcoli fatti a tale scopo hanno confermato l'impossibilità di soddisfare le osservazioni, tenuto conto della loro precisione. Si può però adoperare una formula che tien conto solo della profondità dei due minimi in due diverse radiazioni, nell'ipotesi più accettabile che il valore del minimo stesso sia da ritenersi alterato della stessa quantità dalla eclisse atmosferica nelle due radiazioni. Se indichiamo con a_0 la parte di area occultata ai minimi, con k il rapporto dei raggi delle due componenti (supposte sferiche), con l_1 ed l_2 l'ammontare della luce perduta nei due minimi, assumendo come unitario il valore della luminosità del sistema al massimo, si ha la seguente relazione che risulta dalla teoria di questi sistemi:

$$a_0 = l_1 + \frac{l_2}{k^2}.$$

Le incognite da stabilire sono a_0 e k ed è evidente che, avendo i dati l_1 ed l_2 per due diverse radiazioni, si possono trovare i valori incogniti con sufficiente precisione; in particolare risulta:

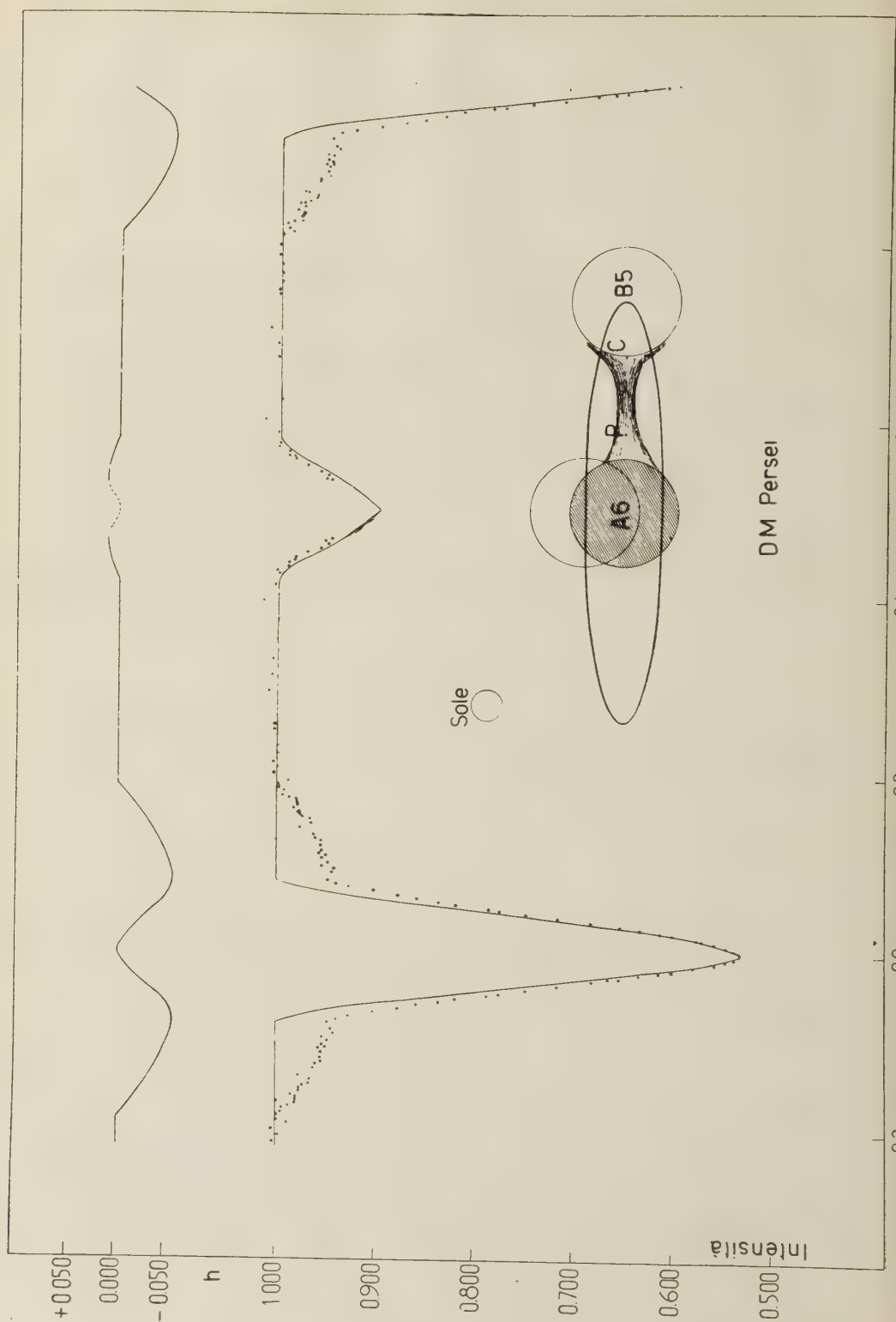
$$k^2 = \frac{l'_2 - l''_2}{l''_1 - l'_1}$$

dove con uno o due apici si indicano gli elementi riguardanti le due curve di luce.

I dati trovati e quelli calcolati come sopra detto portano a $k^2 = 0.95$. Assumeremo, date le ipotesi fatte, come sufficientemente approssimato il risultato $k = 1$. Cioè le due componenti sono di uguale raggio: che risulta pari a 0.254 del raggio dell'orbita relativa. Si ha inoltre $a_0 = 0.570$ e l'asse del sistema è inclinato rispetto alla visuale di un angolo di 80°. Con questi elementi si può calcolare la luminosità del sistema alle diverse fasi ed il risultato ne è indicato nella figura con tratto continuo sovrapposto ai luoghi normali.

A. J. Deutsch⁽²⁾ nel 1945 ha ottenuto all'Osservatorio di Mac Donald 49 spettrogrammi di questa variabile con lo spettrografo a quarzo attaccato al riflettore di 82". La maggior parte degli spettrogrammi ha una dispersione di 55 Å per mm ad Hγ. La zona misurata si estende da questa riga fino a circa 3800 Å nell' u. v.

(5) *Handbuch der Astrophysik*, V/1, p. 135.



Soltanto lo spettro di una delle componenti risulta visibile ed è di tipo B₅. Le righe osservate appartengono all'idrogeno e all'elio neutro a parte la riga K del calcio ionizzato che risulta principalmente dovuta a materia interstellare. Le righe spettrali sono tutte in assorbimento, non cambiano nella loro apparenza durante il periodo e risultano simmetriche in tutte le fasi.

Dalle osservazioni risulta un differente comportamento delle righe dovute all'elio ed all'idrogeno. Esse concordano nel dare gli stessi valori della velocità radiale della stella B₅ durante l'allontanamento, mentre i valori per l'idrogeno sono circa la metà durante le fasi di avvicinamento. Da vari indizi anche per altre stelle, confermati nello studio di questo sistema, risulta che si deve ritenere che le velocità radiali determinate con le righe dell'elio sono dovute al moto orbitale della stella B₅, mentre i valori derivanti dalle righe dell'idrogeno devono ritenersi anormali. Senza entrare in merito alla questione si accettano i risultati spettroscopici del Deutsch ottenuti con le righe dell'elio neutro e, tenuto conto dell'inclinazione nota del sistema, si ha

$$a_1 = 2.52 \times 10^6 \text{ km} \quad ; \quad m_2^3 / (m_1 + m_2)^2 = 0.0831 \text{ volte il Sole.}$$

In queste a_1 rappresenta il raggio dell'orbita della stella di spettro B₅, m_1 la sua massa ed m_2 la massa dell'altra stella. Conoscendo il rapporto delle masse si potrebbe determinare da questi dati, sia il raggio a dell'orbita relativa del sistema (e quindi i raggi delle due stelle), sia le masse delle sue componenti. Conoscendo il potere emissivo di una stella di tipo B₅ rispetto a quello del Sole e volendo che i risultati trovati soddisfino la relazione massa luminosità, risulta con rapide approssimazioni che il valore del rapporto delle masse che meglio soddisfa alle condizioni richieste è $m_1 = 3 m_2$. Si ottiene quindi il seguente sistema di elementi per questo sistema:

$$a = 10.1 \times 10^6 \text{ km}$$

$$r_1 = r_2 = 2.6 \times 10^6 \text{ km} = 3.6 \text{ volte il raggio del Sole.}$$

$$m_1 = m_{B_5} = 4.0 \quad ; \quad m_2 = m_{A_6} = 1.3 \text{ volte la massa del Sole.}$$

La grandezza assoluta della componente B₅ risulta pari a -1.0 e quella della componente A₆ pari a $+0.7$. La differenza di grandezza è sufficiente a spiegare la mancanza di righe della componente meno luminosa nella regione fotografica. Vi è però possibilità di trovare delle righe della stella A₆, specie in vicinanza del minimo principale, nella regione rossa ed infrarossa dello spettro. La distanza del sistema è di circa 650 parsecs, valore piuttosto alto che è confermato dalla presenza della riga del calcio interstellare.

Il problema peculiare che presenta questo sistema riguarda l'interpretazione dello scarto tra le osservazioni ed i valori calcolati dell'intensità luminosa. Questo scarto è segnato in figura sopra la curva di luce ed ammonta ad un massimo del 6% della radiazione complessiva del sistema. Si assume che i minimi non siano alterati dall'effetto atmosferico, cioè che ai minimi gli scarti siano nulli. Conviene inoltre ricordare che sono rappresentati scarti medi e ci

sono buoni indizi per affermare che il loro andamento è lievemente diverso di volta in volta. È probabile che anche altre stelle ad eclisse presentino lo stesso fenomeno; esso richiede per essere rivelato osservazioni molto precise ed estese a tutta la curva di luce, in modo da non essere confuso con gli effetti di riflessione e di ellitticità delle componenti.

L'esistenza di atmosfere estese attorno alle stelle è stato fino ad oggi invocato per spiegare un gran numero di fenomeni spettroscopici presentati nei sistemi ad eclisse e le osservazioni e la teoria, appoggiandosi a vicenda, hanno permesso di mettere fuori dubbio l'esistenza loro. La presenza dell'atmosfera si manifesta con la comparsa di righe di emissione (di idrogeno) al principio ed alla fine di un'eclisse totale, allorché la componente più luminosa è avvolta nell'atmosfera come è il caso della variabile RW Tauri secondo l'interpretazione fattane da A.H. Joy⁽⁶⁾. Allorché invece è la componente a più bassa temperatura ad essere avvolta in una atmosfera questa si usa rivelare con la comparsa di righe peculiari sempre al principio ed alla fine dell'eclisse; numerosi sono i casi che se ne conoscono, citiamo quelli di β Lyrae, ζ Aurigae, U Cephei, U Sagittae⁽⁷⁾.

Nel caso attuale non è plausibile l'esistenza di un'atmosfera brillante attorno alla componente B₅. Questa atmosfera, come si deduce dalla perdita di luce osservata quando una frazione ne viene eclissata tra le fasi 0.080-0.186, contribuirebbe per circa il 6% della luminosità complessiva. Essa dovrebbe quindi dare origine a delle righe di emissione e se fosse estesa ad involucro tutto intorno all'astro, contribuirebbe in realtà per il 50% alla radiazione del sistema.

Convieni quindi pensare all'esistenza di un'atmosfera assorbente attorno alla componente meno luminosa. L'estensione di questa atmosfera, agli effetti fotometrici, si determina facilmente. Infatti dalla curva di luce risulta che essa esiste alla fase 0.186 e i due astri sono in quadratura ad un quarto di periodo cioè alla fase 0.25. Tenuto conto dell'effetto di prospettiva, e dell'inclinazione del sistema, risulta che l'atmosfera si estende da uno degli astri fino ad una distanza 0.1 dalla superficie dell'altro (in unità del raggio dell'orbita relativa). Ora, se è già difficile pensare ad un'atmosfera di questo genere intorno alla stella più massiccia, è impossibile pensare all'esistenza di un'atmosfera di tali dimensioni avvolgente quella meno massiccia. Nell'ipotetico schema in figura si è indicato con P il punto nel quale le forze di attrazione delle due stelle si bilanciano; una atmosfera che, con centro in A₆ si estenda fino a quasi la superficie di B₅, dinamicamente impossibile. Anche un anello di materia, come per esempio quello di Saturno, che numericamente spiegherebbe bene le caratteristiche del fenomeno, non è probabile per le stesse ragioni.

L'ipotesi che meglio si presta per questo caso è del tipo di quella presentata da O. Struve⁽⁷⁾ per U Sagittae e ad essa si richiama la rappresentazione grafica in figura. Si suppone che esista un flusso di materia che, partendo dalla componente A₆, si porti verso quella B₅ e, girando attorno a questa stella, ritorni verso A₆, oppure si disperda nello spazio, oppure in parte si disperda ed in parte ritorni verso A₆.

(6) « Publ. Astron. Soc. Pacif. », 54, p. 35 (1942).

(7) « Monthly Notices of the R. A. S. », vol. 109, p. 487 (1949).

Questo cono di materia, di per sè stesso non luminoso in modo apprezzabile, copre di una nuvola oscura la parte di B₅ prospiciente ad A₆, e si può supporre che assorba circa il 50 % del flusso ricevuto, il quale viene principalmente* poi diffuso. In parte esso è responsabile della distorsione nella curva delle velocità radiali ricavata dalle righe dell'idrogeno e trovata dal Deutsch⁽²⁾. Durante la rotazione del sistema questa zona oscura, presenta per prospettiva una diversa area all'osservatore. Un opportuno valore dell'area e del coefficiente di assorbimento permette di spiegare anche quantitativamente gli scarti trovati nella curva di luce.

Il fatto che le due superficie si trovano a diverse temperature ed hanno splendori superficiali unitari che stanno in rapporto 1 : 4.5, permette di accettare la mancanza in vicinanza del minimo secondario, di un effetto analogo a quello osservato al minimo principale. Questo dovrebbe risultare dello stesso tipo di quello osservato, ma ridotto più che proporzionalmente in scala. Come si è detto la zona intorno al minimo secondario non è bene coperta dalle osservazioni e nulla se ne può concludere. Similmente sarebbe opportuna una serie di osservazioni nell'infrarosso, oltre i 15.000 Å, per una migliore conoscenza del mezzo assorbente.

L'esistenza di una deviazione dalla curva di luce teorica in corrispondenza dell'eclisse secondaria è meno rilevante e può avere origine sia nella causa qui trattata, come anche può essere dovuta ad un oscuramento al lembo della componente A₆. Ulteriori osservazioni in due colori sono ad ogni modo necessarie in questa parte della curva di luce.

Geofisica. — *Indizi di corrispondenze tra fenomeni geofisici e moto polare.* Nota II di TITO NICOLINI, presentata^(*) dal Socio L. CARNERA.

4. **PRESSIONE ATMOSFERICA IN ALCUNE REGIONI DELLA TERRA.** — Continuando a ricercare variazioni meteorologiche eventualmente connesse al ciclo di Chandler, sono state considerate le serie di valori della pressione atmosferica in varie parti del globo. Sono disponibili molte lunghe serie di questo elemento; una collezione di dati per molte località fu pubblicata dal Solar Physics Committee nel 1908⁽¹³⁾. Un esame completo di così ampia raccolta di materiale richiederebbe un grande lavoro; ma alcune prove effettuate sono state poco incoraggianti. Un primo esame dei valori diretti della pressione (cioè senza eliminazione della variazione annuale), ha dato risultati negativi per Capodimonte (Napoli, 1867-1924, serie non inclusa nella precedente raccolta), Buenos Aires (1862-1896), Goya (1876-1897), Cordoba (1873-1907); (queste stazioni argentine sono caratterizzate da una notevole uni-

(*) Nella seduta del 15 aprile 1950.

(13) *Monthly mean values of Barometric Pressure for 73 Selected Stations over the Earth's Surface*; compiled at the Solar Physics Observatory, South Kensington. London, H. M. Stationery Office, 1908.

formità della pressione rispetto al tempo), Santiago (1862-1902); Città del Capo; Adelaide, Sidney. In questo primo tentativo davano invece indicazioni favorevoli e con notevole concordanza le stazioni indiane di Bombay, Madras, Calcutta; per

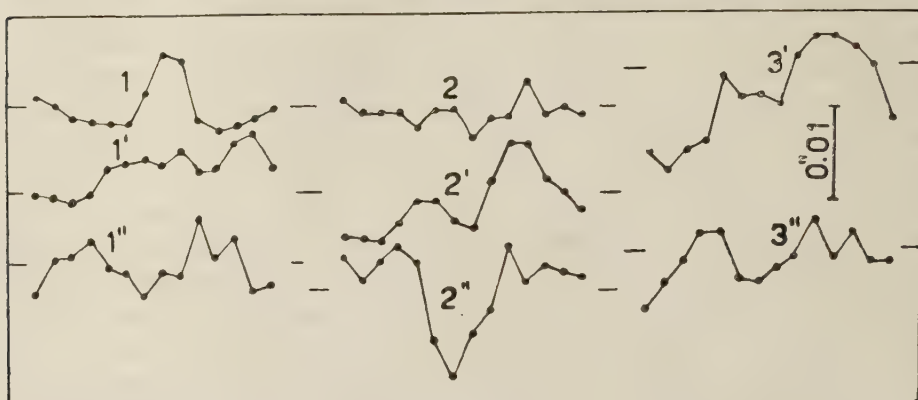


Fig. 1. - Andamenti perequati dei residui pressioni medie mensili singole meno medie mensili generali nel ciclo di 14 mesi, per Bombay, Madras, Calcutta.

le prime due i calcoli sono stati estesi a tre intervalli: 1847-62, 1863-89, 1890-1902; mentre l'ultima serie inizia al 1863. Gli andamenti esibiscono di regola un minimo verso la 6^a fase (delle 14 considerate come in precedenza), un massimo intorno alla 12^a. Ma la possibilità di un effetto pari a quello verificato per

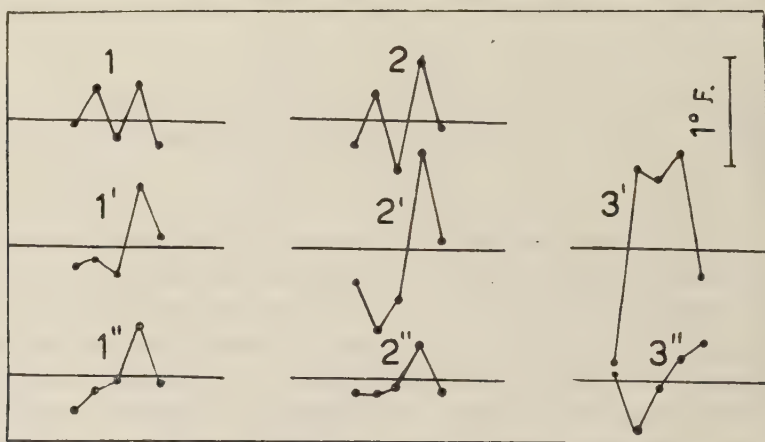


Fig. 2. - Andamento dei residui delle temperature medie stagionali singole meno medie generali, nel ciclo di Chandler diviso in 5 fasi, per New Haven, Washington, Iowa State.

le temperature del Mississippi, induce ad eseguire i calcoli eliminando dapprima la variazione annuale, cioè esaminando i residui valori mensili singoli meno medie mensili generali. I risultati non differiscono molto dai precedenti e sono esibiti, espressi in unità 0.001 pollici, alle colonne successive della Tabella III. L'andamento esibito da queste colonne sembra assai problematico, la caratteristica prin-

cipale essendo costituita da forti oscillazioni. Eseguendo la perequazione di 3 in 3 valori si ottengono gli andamenti della fig. 1.

In ogni caso il risultato esclude oscillazioni barometriche di qualche premienza a periodo di 14 mesi, e ciò è a sfavore dell'ipotesi che il ciclo di Chandler sia di origine meteorologica.

TEMPERATURE STAGIONALI NEGLI STATI UNITI ORIENTALI E CENTRALI. — Per questi dati sono state usate lunghe serie riportate da J. B. Kincer⁽¹⁴⁾ per New Haven (1781-1933), Washington (1817-1933), e Iowa State (1873-1933). Si noti che dal 1842 in poi è possibile disporre i dati da esaminare in corrispondenza al ciclo di Chandler per l'analisi, ma anteriormente il ciclo stesso non è rintrac-

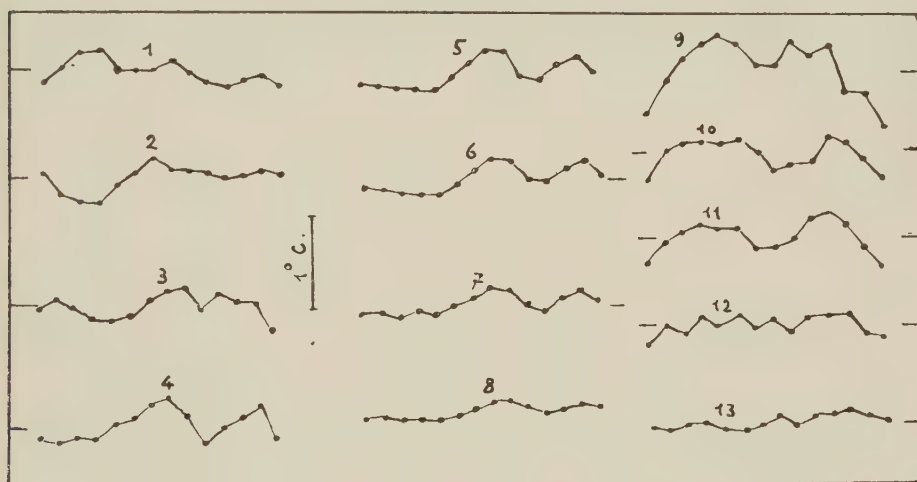


Fig. 3. — Andamenti perequati delle temperature medie mensili singole meno medie generali nel ciclo di Chandler diviso in 14 fasi (di circa un mese), per l'aria e suolo, per Zwanenburg-Utrecht-De Bilt e Coimbra.

ciabile; quindi per disporre nello schema numerico le temperature stagionali di New Haven e Washington dal 1817 al 1842 si è usato un valore medio 1.18 anni del fluttuante ciclo di Chandler. 5 stagioni formano più di un ciclo di Chandler, e quindi la tabella per l'analisi numerica in 5 colonne o fasi (di cui la prima al solito s'intende quella corrispondente al passaggio della traiettoria polare di Chandler per il meridiano +X) va compilata riportando sempre la fase al punto corretto. Anche qui sono stati usati i residui medie stagionali singole meno medie stagionali generali dei vari intervalli usati, ed i risultati sono dati alla tabella IV ed alla fig. 2.

Come vedesi il risultato sembra positivo (ed appariva chiaramente tale anche tabulando le temperature stagionali dirette invece dei residui delle medie). L'ampiezza totale della oscillazione relativa al ciclo è sempre maggiore di 0.5 F., ed è notevole e significativo l'accordo per intervalli diversi (l'accordo tra le 3 loca-

(14) «Mo. Wea. Rev.», vol. 61, p. 251 (1933).

lità si spiega facilmente con la presumibile concordanza delle variazioni, e può costituire un controllo dei dati e dei calcoli). Sembra dunque individuato in questo caso un indice geofisico sensibile del ciclo di Chandler.

5. TEMPERATURE MENSILI DELL'ARIA E DEL SUOLO IN OLANDA E NEL PORTOGALLO. - Una lunga serie di temperature mensili dell'aria a Zwanenburg-Utrecht-De Bilt (Olanda) dal 1735 al 1944, è stata pubblicata dal dott. A. Labrijn⁽¹⁵⁾. Si è eseguita l'analisi numerica dal 1817, secondo i criteri già detti al paragrafo precedente, usando però dati mensili anzichè stagionali.

TABELLA III.

Residui di dati mensili di pressione disposti in corrispondenza del ciclo di Chandler, in modo analogo alla Tabella II; in millesimi di pollice di mercurio.

Dati Mesi	I	I'	I''	2	2'	2''	3'	3''
1	+ 2	- 4	- 4	0	- 4	+ 8	- 18	0
2	+ 1	+ 1	- 2	- 1	- 8	- 5	- 7	- 13
3	- 2	+ 1	+ 7	+ 7	- 2	- 1	- 9	+ 4
4	- 3	- 5	- 3	- 7	- 5	+ 15	- 6	+ 7
5	- 1	+ 3	+ 3	- 1	- 2	0	- 2	- 5
6	- 2	+ 9	- 2	+ 1	+ 5	- 6	+ 5	+ 4
7	- 3	- 4	- 5	- 1	- 5	- 11	- 12	- 9
8	+ 9	+ 5	- 6	+ 1	- 9	- 11	- 2	- 3
9	+ 10	+ 7	+ 7	- 9	+ 2	+ 9	+ 1	+ 7
10	- 4	0	- 7	+ 5	+ 11	- 4	+ 5	- 7
11	- 1	- 1	+ 15	+ 1	+ 4	+ 9	+ 4	+ 8
12	- 4	+ 8	- 7	+ 3	+ 1	- 4	0	- 5
13	- 2	+ 9	0	- 5	0	+ 2	+ 2	+ 2
14	+ 1	+ 3	- 3	+ 3	- 2	+ 8	- 1	- 5

Colonna 1: Bombay 1847-62 - 1': idem 1863-89 - 1'': idem 1890-902.

» 2: Madras » 2': » » 2'': » »

» 3: Calcutta » 3'': » »

Temperature mensili del suolo a De Bilt dal 1914 al 1942 a profondità di m. 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, sono riportate da C. Braak nella stessa serie⁽¹⁶⁾. Si è

(15) «Mededeelingen en Verhandelingen», n. 49; «Koninkl. Nederl. Meteor. Inst.» n. 102, 1945.

(16) «Mededeelingen en Verhandelingen», n. 47; «Koninkl. Nederl. Meteor. Inst.» n. 102, 1943.

ancora considerata la serie *Temperaturas no Terreno* di A. Barata Pereira, per l'Istituto Geofisico dell'Università di Coimbra; la serie pubblicata va dal 1927 al 1942 ⁽¹⁷⁾ e dà le temperature dell'aria e del suolo alle profondità di m. 0,5, 1,0, 1,5, 3,0.

TABELLA IV.

Residui di temperature medie stagionali per New Haven, Washington, Iowa State, analizzati in corrispondenza di 5 fasi del ciclo di Chandler.
Temperature in unità 0.° OI F.

Dati Fasi o Stagioni	I	1'	1''	2	2'	2''	3'	3''
1	— 3	— 19	— 30	— 22	— 31	— 12	— 1,04	+ 7
2	+ 29	— 13	— 16	+ 22	— 75	— 12	+ 75	— 45
3	— 19	— 26	— 3	— 47	— 47	— 8	+ 62	— 5
4	+ 31	+ 58	+ 45	+ 53	+ 87	+ 32	+ 89	+ 20
5	— 27	+ 06	— 6	— 4	+ 07	— 11	— 21	+ 37
N° cicli	(22)	(39)	(37)	(22)	(39)	(37)	(14)	(37)

Colonna 1: New Haven 1817-42 - 1': idem 1843-89 - 1'': idem 1890-1933.

» 2: Washington » 2': » » 2'': » » »

» 3': Iowa State 1873-89 - 3'': idem 1890-1933.

Per tutti questi dati sono stati considerati i soliti residui temperature singole mensili meno medie mensili generali, ed è stata eseguita l'analisi numerica al modo indicato in precedenza. I risultati sono dati alla Tabella V ed alla fig. 3, ed appaiono poco significativi. Le temperature Olandesi 1817-1842 sono (come al paragrafo precedente) incerte nella disposizione rispetto al ciclo, e potrebbero trascurarsi; quelle dell'aria in genere sono certo soggette ad ampie fluttuazioni e accidentalità locali; in complesso però, insieme a quelle del suolo, indicano un minimo principale verso l'inizio o prime fasi del ciclo, un doppio massimo appresso. La oscillazione termica va spegnendosi con la profondità e ciò significa che ha origine atmosferica. Questo risultato non è privo di qualche interesse, sia pure nel suo aspetto negativo: non si ha evidenza di una oscillazione termica della crosta, o della massa interna terrestre, in corrispondenza al ciclo di Chandler.

Il confronto con le temperature dell'aria a New Haven, Washington, Iowa, ha certamente interesse, ma non è chiara l'interpretazione, e quindi lasciamo le cose alla pura presentazione dei risultati numerici.

Oltre a tutti i precedenti, altri dati sono stati considerati nello stesso modo, ottenendo al più tracce di andamento sistematico; in mancanza di una evidenza certa, tali tentativi non vengono qui riprodotti.

(17) « Rev. da Facult. de Ciências da Univers. de Coimbra », vol. XI, n. 1.

TABELLA V.

Residui di temperature mensili dell'aria e del suolo in Olanda e Portogallo, analizzati in corrispondenza a 14 fasi del ciclo di Chandler, in modo analogo alle Tabelle II e III.
Valori in unità 0° 01 C.

Dati Mesi													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	-39	-19	-8	-30	-28	-22	-18	-15	-9	-9	-19	+7	-15
2	+7	-10	+18	+24	-13	-1	-3	-8	-7	-9	-1	-21	-10
3	+43	-21	0	-40	+6	-13	-8	-2	-3	+5	+3	+16	-5
4	+15	-36	-20	-10	+44	-25	-30	-17	-16	+17	+12	-7	-1
5	+12	-15	-19	+12	+44	-7	-11	-5	-6	+11	+25	+21	-5
6	-18	+29	-7	+8	+33	-14	-9	-10	-12	+8	-14	-11	-23
7	+15	-1	-7	+16	+14	+11	+9	+9	+6	+24	+19	+39	+5
8	+10	+33	+34	+61	-31	+34	+24	+22	+9	-31	-34	+25	+3
9	+20	+11	+29	+23	+31	+34	+28	+23	+21	-44	-13	+1	-1
10	-31	-9	-4	-28	+96	-6	0	+4	+6	+36	+42	+9	-10
11	-7	+24	-31	-48	-76	-37	-31	-24	-18	-28	-1	+21	+15
12	-1	-13	+74	+80	+61	+26	+29	+17	+12	+49	+42	+11	+8
13	-6	+7	-30	+24	-63	+30	+32	+34	+22	+16	-14	+19	+14
14	-1	+37	-34	-23	-95	-11	-10	-3	+1	-87	-68	-49	-2

Colonna 1: temperatura dell'aria a Zwanenburg-Utrecht-De Bilt, 1817-42. - 2: idem 1843-89. - 3: idem 1890-1944. - 4: idem 1914-42. - 5: idem Coimbra 1927-42. - 6: temperatura del suolo a De Bilt 1914-42, a 25 cm. di profondità. - 7: idem a 50 cm. - 8: idem a 75 cm. - 9: idem a 1 m. - 10: idem Coimbra, 1927-42, a 50 cm. - 11: idem a m. 1. - 12: idem a m. 1,50. - 13: idem a m. 2.

6. VARIAZIONI DEL CAMPO MAGNETICO TERRESTRE. - Ch. Maurain ha effettuato una interessante ricerca sulle variazioni secolari del campo magnetico terrestre, presso Parigi, dal 1883 al 1941⁽¹⁸⁾. Dopo la scarsa evidenza di qualche oscillazione geofisica veramente notevole correlativa al ciclo di Chandler, si può ancora riscontrare invece che le perturbazioni del ciclo corrispondono a perturbazioni geofisiche.

Consideriamo nella Memoria di Maurain gli elementi D', I', H' a Val Joyeux, osservando particolarmente le epoche in cui, nell'andamento dei valori annuali, cambia verso la variazione. Si hanno le epoche riportate alla Tabella VI, in cui

(18) « Ann. de l'Inst. de Phys. du Globe », t. XXII, p. 61 e sg.

gli indici 1, 2, 3 hanno significato di intensità, come al § 1, e l'ultima colonna dà un riassunto comprensivo delle 3 variazioni.

TABELLA VI.

*Epoche in cui cambia verso la variazione degli elementi D', I', H'
a Val Joyeux, dal 1883 al 1941.*

D'	I'	H'	Perturbazione complessiva
1888 ₂	1887 ₁	1888 ₁	1888 ₃
94 ₂		94 ₁	94 ₂
1901 ₃	1900 ₂	1900 ₃	1901 ₃
	1908 ₁	1909 ₂	8 ₂
1914 ₁	1912 ₁	1911 ₂	11 ₁
1918 ₁	1916 ₃	1915 ₂	16 ₁
	1921 ₂	1922 ₁	22 ₂
1925 ₃			25 ₁
	1929 ₁	1929 ₁	29 ₁
	1938 ₁	1940 ₁	1939 ₂

Come vedesi queste perturbazioni sono in accordo con quelle rilevate al § 1 ed alla fig. 1, e potevano aggiungersi alla stessa figura se fossero state rilevate prima. Si noti inoltre che le variazioni date dal Maurain sono confermate da quelle osservate a Greenwich, De Bilt, Potsdam, come risulta dalla stessa ricerca.

Conclusione. — Una variazione di elementi geofisici o meteorologici correlativa al ciclo di Chandler, non è stata rintracciata in modo evidente e certo, limitatamente agli elementi considerati, nonostante lievi indicazioni in apparenza favorevoli. Qualche relazione sicura di questo tipo potrebbe eventualmente venire da ricerche successive, ma finora l'evidenza è nettamente nel senso che il ciclo di Chandler sia dovuto a cause meccaniche, come generalmente si ritiene, piuttosto che geofisiche.

Viceversa le perturbazioni del ciclo di Chandler (per cui si rinvia al riferimento ⁽¹⁾), corrispondono con evidenza notevole a perturbazioni geofisiche. Appare anche possibile che tali perturbazioni geofisiche, e variazioni meteorologiche e termiche interessanti la complessiva massa atmosferica, producano o accentuino qualche variazione o fluttuazione irregolare, nella durata del ciclo, alterando lievemente sotto l'aspetto meccanico le caratteristiche del globo.

Fisica. — *Una generalizzazione della relazione di indeterminazione* (*). Nota di AUGUSTO GAMBA, presentata (**) dal Corrisp. G. WATAGHIN.

A quanto mi risulta la più generale espressione finora nota del principio di indeterminazione per due osservabili A, B è quella data da Schrödinger ⁽¹⁾

$$(1) \quad (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left(\frac{AB + BA}{2} - \bar{A}\bar{B} \right)^2 + \left| \frac{AB - BA}{2} \right|^2$$

dove è:

$$(\Delta A)^2 = \overline{(A - \bar{A})^2} \quad ; \quad (\Delta B)^2 = \overline{(B - \bar{B})^2};$$

la sopralineatura indica i valori medi.

Ho dato recentemente una dimostrazione ⁽²⁾ di questa relazione sotto ipotesi assai larghe usando un metodo dovuto a Born ⁽³⁾. A questo scopo non è neppure necessario definire il modo preciso con cui si ottengono i valori medi, purchè questi soddisfino alla condizione di linearità

$$\overline{aA + bB} = a\bar{A} + b\bar{B}$$

con a, b costanti reali e A, B operatori reali qualunque.

È possibile trovare condizioni ancora più restrittive della (1) per il prodotto $(\Delta A)^2 (\Delta B)^2$?

Innanzitutto alcune considerazioni. Se A e B sono due operatori reali, i prodotti P_{rs} ottenuti moltiplicando r fattori eguali ad A con s fattori eguali a B in un ordine qualunque non saranno in generale operatori reali; sarà però sempre possibile trovare operatori reali (se ne indicherà uno generico con il simbolo ${}_k P_{rs}$) formando espressioni lineari nei P_{rs} con coefficienti costanti complessi. Per esempio per $r = 1, s = 1$ si hanno i seguenti prodotti linearmente indipendenti fra loro

$${}_1 P_{11} = AB + BA \quad , \quad {}_2 P_{11} = i(AB - BA).$$

Analogamente per $r = 1, s = 2$

$${}_1 P_{12} = AB^2 + B^2 A \quad , \quad {}_2 P_{12} = BAB \quad , \quad {}_3 P_{12} = i(AB^2 - B^2 A).$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica del Politecnico di Torino.

(**) Nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) E. SCHRÖDINGER, «Sitz. Preuss. Akad.», p. 296 (1930).

(2) A. GAMBA, «N. Cim.», 3 bis (1950).

(3) Ved. per esempio M. BORN, «Natural Philosophy of Cause and Chance», Oxford, p. 189 (1949).

Si considerino funzioni di A e B del tipo

$$(2) \quad \begin{cases} M = A + \sum_{r=2}^n a_r A^r + \sum_{r=2}^n b_r B^r + \sum_k \sum_{r,s=1}^n c_{krs} \cdot {}_k P_{rs} \\ N = B + \sum_{r=2}^n \alpha_r A^r + \sum_{r=2}^n \beta_r B^r + \sum_k \sum_{r,s=1}^n \gamma_{krs} \cdot {}_k P_{rs} \end{cases}$$

con $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ costanti reali. (Il limite superiore delle somme è stato posto eguale a n intero positivo per semplicità: l'estensione delle considerazioni che seguono al caso $n = \infty$ si potrebbe comunque fare senza difficoltà, salve alcune ovvie condizioni sulla convergenza della serie che ne risulta).

M e N sono ancora operatori reali: per essi vale dunque la (1) che scriveremo nella forma

$$(\Delta M)^2 (\Delta N)^2 - \left(\frac{MN + NM}{2} - \overline{MN} \right)^2 - \left| \frac{MN - NM}{2} \right|^2 \geq 0$$

o ricordando le (2)

$$(3) \quad (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 - \left(\frac{AB + BA}{2} - \overline{AB} \right)^2 - \left| \frac{AB - BA}{2} \right|^2 - F({}_k \overline{P}_{rs}) \geq 0$$

dove $F({}_k \overline{P}_{rs})$ è una funzione reale dei ${}_k \overline{P}_{rs}$ (si noti che in particolare $A^r = {}_1 P_{ro}$, $B^r = {}_1 P_{or}$ ecc.).

L'espressione a primo membro della (3), considerata come funzione dei coefficienti $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ che compaiono nella $F({}_k \overline{P}_{rs})$ ammette certo un minimo. Esso non annulla identicamente l'espressione poichè la sostituzione (2) è stata scelta in modo che non possano comparire nella $F({}_k \overline{P}_{rs})$ termini identicamente eguali agli altri termini della (3). D'altra parte la $F({}_k \overline{P}_{rs})$ in queste condizioni di minimo è certo: *non negativa*, altrimenti annullando identicamente tutti gli $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ e quindi la $F({}_k \overline{P}_{rs})$ si otterrebbe per l'espressione a primo membro della (3) un valore minore, contrariamente all'ipotesi; *non identicamente nulla*, come ci si può convincere con le seguenti considerazioni. Si pongano nella (2) tutti i coefficienti $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ eguali a zero eccetto uno: sia per esempio $c_{krs} \neq 0$. Il primo membro della (3) diventa allora un polinomio completo di secondo grado in c_{krs} . Si ha dunque un minimo della (3) per $c_{krs} \neq 0$.

Si è così dimostrato che nelle condizioni di minimo indicate la funzione $F({}_k \overline{P}_{rs})$ è certo positiva e quindi la (3) rappresenta davvero una ulteriore precisazione della (1) e quindi della relazione di indeterminazione.

Dal punto di vista pratico conviene seguire un procedimento di generalizzazioni successive. Si cerca, cioè, una formula più generale della (1) con una sostituzione particolarmente semplice, per esempio con una sostituzione del tipo (2) in cui tutti i coefficienti $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sono nulli, eccetto uno. Nella formula così ottenuta si effettua una nuova sostituzione, e così di seguito. Il processo può essere ripetuto indefinitamente, ottenendosi espressioni sempre più generali.

Le formule risultano piuttosto complicate e non mi è stato possibile trovare la più generale espressione per il prodotto $(\Delta A)^2 (\Delta B)^2$ in una forma sufficientemente elegante ed espressiva. Tanto per dare un'idea del tipo di espressioni che si ottengono ne segnavo a caso una delle più semplici; la si ottiene col metodo indicato ponendo eguali a zero tutti gli $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ eccetto $b_2 \neq 0$

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \cong \left(\frac{\overline{AB + BA}}{2} - \overline{A\overline{B}} \right)^2 + \left| \frac{\overline{AB - BA}}{2} \right|^2 + \\ + \frac{[(\overline{AB^2 + B^2 A} - 2 \overline{A\overline{B^2}}) (\Delta B)^2 - (\overline{AB + BA} - 2 \overline{A\overline{B}}) (\overline{B^3 - B\overline{B^2}})]^2}{4 [(\overline{B^4 - B^2}) (\Delta B)^2 - (\overline{B^3 - B\overline{B^2}})^2]}.$$

In un recentissimo lavoro Reed e Dresden⁽⁴⁾ hanno dato una espressione analoga alla (1) per il caso di più osservabili. È evidente che le considerazioni precedenti si estendono immediatamente anche a questo caso e il metodo permette quindi di generalizzare anche le formule trovate da questi due autori.

Desidero ringraziare i proff. E. Perucca e G. Wataghin per l'interessamento dimostrato.

Chimica. — *Titolazione amperometrica dell'acido p-ammino salicilico con bromato potassico al microelettrodo rotante di platino*^(*).
Nota di ARNALDO LIBERTI, presentata^(**) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

La riducibilità del bromo all'elettrodo di platino rende possibile di poter eseguire amperometricamente e quindi con più larghe possibilità d'impiego molte reazioni dell'analisi bromometrica.

H. A. Laitinen e I. M. Kolthoff⁽¹⁾ hanno dimostrato che il bromo produce delle correnti di diffusione ben determinate quando un potenziale compreso tra +0,4 e +0,1 Volt rispetto all'elettrodo a calomelano saturo è applicato a un elettrodo rotante di platino. La relazione lineare tra concentrazione in bromo e corrente di diffusione costituisce pertanto la base per una serie di titolazioni amperometriche che sono state applicate sia nella determinazione di prodotti organici che di prodotti inorganici. Recentemente I. M. Kolthoff e F. A. Bovey⁽²⁾ hanno applicato tale sistema alla microdeterminazione dello stirolo in acqua ottenendo risultati assai precisi ed accurati ed hanno osservato che tale metodo potrebbe essere applicato alla determinazione di molte sostanze organiche che reagiscono con il bromo a velocità apprezzabile.

(4) RONALD L. REED e M. DRESDEN, «Bull. Am. Phys. Soc.», 25, 3 (1950).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Roma, Centro di Chimica Generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) H. A. LAITINEN e I. M. KOLTHOFF, «The Journal of Physical Chemistry», 45, 1079 (1941).

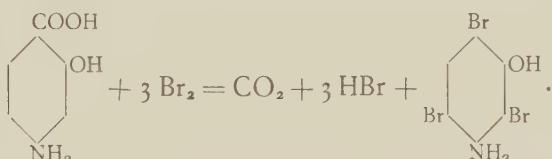
(2) I. M. KOLTHOFF e F. A. BOVEY, «Anal. Chem.», 19, 498 (1947).

L'importanza acquisita dall'acido para-ammino salicilico come agente chemioterapico nella cura della tubercolosi ci ha portato a studiare le applicazioni di tale metodo alla microdeterminazione di tale sostanza.

Numerosi lavori sono apparsi nella letteratura analitica per stabilire metodi di titolazione e di controllo del P. A. S.

L'acido para-ammino salicilico può essere dosato acidimetricamente sciogliendolo in alcool e titolandolo con idrato sodico usando fenolftaleina come indicatore o bromometricamente bromurando una soluzione acquoso-acetica di P. A. S. in presenza di acido cloridrico con miscela titolata di bromuro-bromato usando carta amido-iodurata come indicatore esterno ovvero titolando lo iodio liberato dall'eccesso di bromo con tiosolfato⁽³⁾. Un altro metodo consiste nel dosaggio dell'anidride carbonica proveniente dalla decarbossilazione del P. A. S. Tale procedimento non è però adatto per determinazioni correnti e non fornisce risultati molto accurati⁽⁴⁾. I metodi colorimetrici sono essenzialmente impiegati a fine biologico.

La determinazione elettrometrica del P. A. S. per via amperometrica è possibile in quanto la bromurazione in ambiente acido per acido cloridrico avviene in modo rapido e quantitativo secondo la seguente reazione:



PARTE SPERIMENTALE. - Apparato elettrico: è costituito da un apparecchio manuale del tipo di quello usato da Kolthoff e Lingane descritto in altro lavoro. Tale attrezzatura fu sostituita talvolta con un partitore per la misura del potenziale e con un galvanometro tarato per la misura della corrente.

L'elettrodo di platino era costituito da un filo di platino lungo 1,2 cm. e avente un diametro di 0,6 mm. saldato ad un tubo di vetro nel cui interno era posto del mercurio per assicurare il contatto elettrico.

Come elettrodo di riferimento era usato un elettrodo a calomelano saturo.

PRODOTTI CHIMICI USATI. - Acido para-ammino salicilico: un prodotto commerciale è stato purificato mediante dissoluzione in bicarbonato sodico e successiva precipitazione con acido cloridrico diluito. È stato ricristallizzato più volte da alcool metilico e seccato su acido solforico. Il suo titolo è stato determinato per via acidimetrica con idrato sodico esente da anidride carbonica. Campioni puri di P.A.S. preparati in laboratorio sono stati usati per il controllo del metodo di analisi.

Meta-ammino fenolo: è stato usato un prodotto commerciale purificato e ricristallizzato (p. f. 122).

(3) D. SIMMONITE, « The Journal of Pharmacy and Pharmacology », 1°, 526 (1949).

(4) OBERWEGER, SEYMOUR e SIMMONITE, « Quarter Journal Pharm. Pharmacol. », 21, 292 (1948).

Il para-ammino salicilato di sodio usato è stato ricristallizzato da alcool al 90 %. Esso contiene due molecole di acqua di cristallizzazione.

Il bromato potassico e gli altri reattivi usati nel presente lavoro erano prodotti puri per analisi Merck.

MODALITÀ ESECUTIVE. — Il seguente procedimento è stato adottato nella titolazione dell'acido para-ammino salicilico. Un campione di circa 50 mg. veniva pesato e disciolto in una soluzione di bicarbonato sodico e portato a volume in un pallone da 500 ml. Una quantità corrispondente a 1-2 mg. veniva trasferita in un palloncino da 100 ml. La soluzione da titolare veniva resa circa 0,8 M. in acido acetico, 5×10^{-2} M. in bromuro potassico e 1 M. in acido cloridrico. Il P. A. S. in questa soluzione viene lentamente ad alterarsi; è quindi necessario prepararla di fresco. La titolazione amperometrica viene eseguita applicando un potenziale pari a + 0,2 Volt rispetto all'elettrodo a calomelano saturo. Il bromato potassico 10^{-2} N. viene aggiunto goccia a goccia da una microburetta. La corrente prima del punto di equivalenza è nulla o di lievissima entità, qualche decimo di micro-ampère. Quando viene però usato un elettrodo nuovo o quando l'elettrodo è stato conservato in acido nitrico si osservano delle correnti di qualche micro-ampère che si riducono a zero dopo alcuni minuti. La corrente comincia ad aumentare in vicinanza del punto di equivalenza e cresce rapidamente subito dopo. L'intersezione delle linee condotte per i punti prima e dopo il punto di equivalenza, corretti per la variazione di volume apportata dalla soluzione di bromato aggiunta, portati su carta millimetrata a grande scala indica il numero di millilitri usati nella titolazione.

Alcuni dei risultati ottenuti sono presentati nella seguente tabella:

Num.	mg P. A. S. presenti	mg P. A. S. trovati	ml KBrO ₃ 10^{-2} N	Errore percentuale
1	0,5170	0,5206	2,04	+ 0,6
2	0,3102	0,3088	1,21	— 0,4
3	0,6204	0,6201	2,43	0,0
4	0,6204	0,6189	2,425	— 0,3
5	0,4136	0,4139	1,622	0,0
6	0,5200	0,5180	2,034	— 0,4
7	0,6244	0,6252	2,45	0,0

La fig. 1 (curva *a*) rappresenta un grafico corrispondente all'ultima titolazione: la curva *b* rappresenta la titolazione potenziometrica ottenuta nelle medesime condizioni usando come elettrodo indicatore l'elettrodo rotante di platino e l'elettrodo a calomelano come elettrodo di riferimento. I risultati di queste titola-

lazioni sono in ottimo accordo con quelli ottenuti nella titolazione amperometrica. Le titolazioni potenziometriche non hanno però valore pratico in quanto l'equilibrio dopo l'aggiunta di bromato viene ad ottenersi con estrema lentezza ed è quindi necessario attendere un tempo assai lungo; quelle amperometriche invece

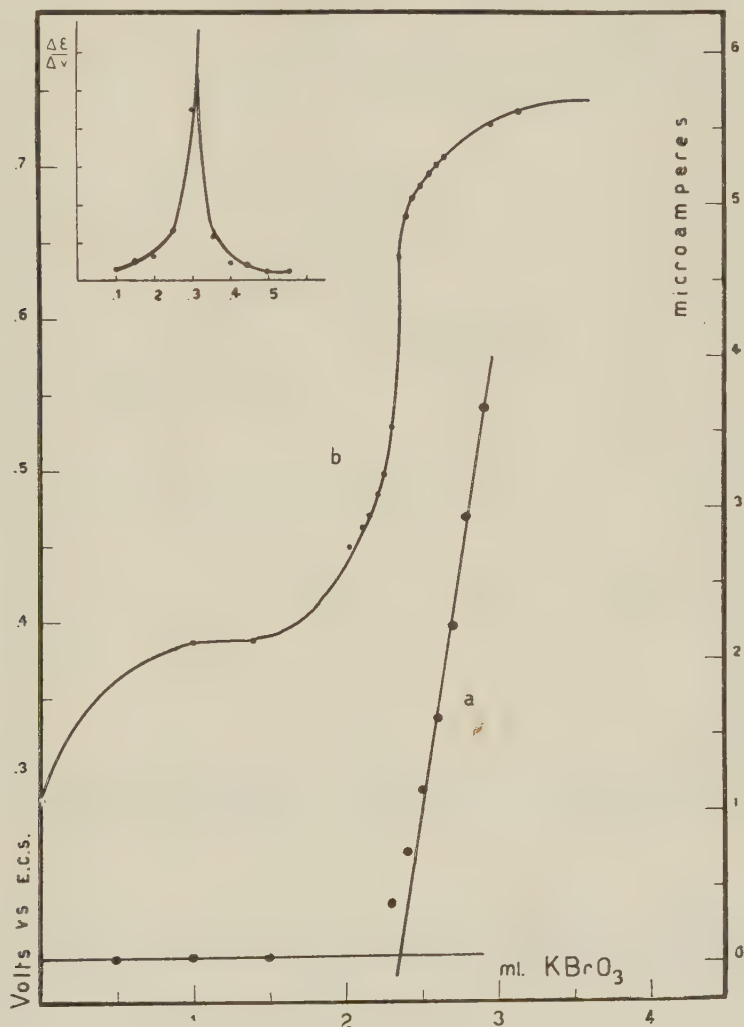


Fig. 1.

possono effettuarsi con grande rapidità, e richiedono circa cinque minuti. La precisione del metodo è stata controllata eseguendo una serie di 12 titolazioni di un campione contenente 0,613 mg. di P. A. S. in 25 ml. di soluzione; si sono ottenuti i seguenti risultati:

P.A.S. in mg. presente	val. mass.	val. min.	val. medio	dev. med.	err. q. med.	errore %
0,613	0,623	0,610	0,616	0,0033	0,0045	+ 0,5

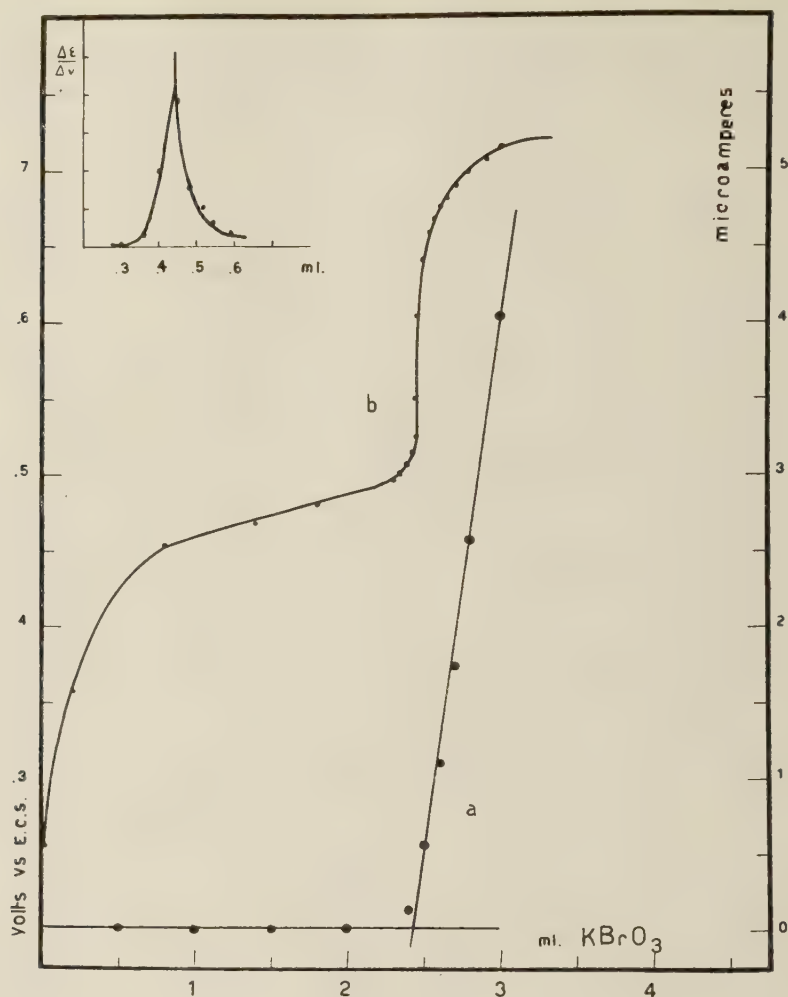
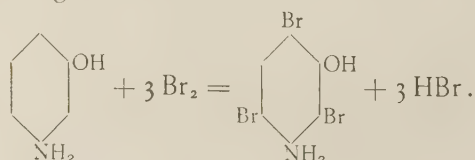


Fig. 2.

La deviazione media è data dal rapporto $\Sigma d/n$ dove d è la differenza fra le osservazioni individuali e la media aritmetica ed n il numero delle titolazioni. L'errore quadratico medio si ottiene dall'espressione $\sqrt{\Sigma d^2/n - 1}$. L'errore percentuale è calcolato come deviazione percentuale tra la media aritmetica ed il valore teorico.

Un eguale procedimento fu usato per la determinazione del para-ammino salicilato di sodio: le titolazioni possono essere eseguite con un errore di circa 0,5 %.

Anche la determinazione del meta-ammino fenolo può essere effettuata in modo analogo in quanto la bromurazione in ambiente acido procede in modo rapido e quantitativo secondo la seguente reazione:



Un campione di meta-ammino fenolo preparato in modo analogo a quello descritto per l'acido para-ammino salicilico ha dato i seguenti risultati:

m. ammino-fenolo in mg.

presente	val. mas.	val. min.	val. med.	dev. med.	err. q. med.	errore %
0,4540	0,4590	0,4500	0,4543	0,0023	0,0031	0,06

La fig. 2 mostra il grafico di una titolazione eseguita nelle medesime condizioni per via amperometrica (a) e potenziometrica (b).

DISCUSSIONE. — La titolazione dell'acido para-ammino salicilico può essere eseguita amperometricamente con grande rapidità e con una accuratezza pari a circa 0,5 % nell'intervallo di concentrazione 10^{-2} — 10^{-4} M. La reazione non è specifica per il P. A. S. in quanto tutte le sostanze che vengono bromurate in ambiente acido con sufficiente rapidità interferiscono. Il meta-ammino fenolo ad esempio reagisce nello stesso modo ed anzi il metodo può essere applicato utilmente per la sua determinazione.

Il metodo amperometrico offre dei vantaggi notevoli rispetto al metodo bromometrico con indicatore esterno in quanto si elimina l'indicatore esterno e si può perciò determinare il punto di equivalenza in modo più preciso. Inoltre il metodo può essere vantaggiosamente usato anche con liquidi fortemente colorati e molto diluiti.

La diluizione a cui si opera non provoca la separazione del tribromoderivato. La soluzione rimane limpida e solo dopo il punto di equivalenza acquista una colorazione gialla.

Chimica. — *Titolazioni amperometriche con mercapto-benzotiazolo* (*). Nota di ARNALDO LIBERTI e ELENA CERVONE, presentata (**) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

G. Spacu e M. Kuras⁽¹⁾ usarono il mercaptobenzotiazolo per determinazioni gravimetriche e osservarono che rame, bismuto, piombo, mercurio, tallio, argento e oro formano con esso precipitati insolubili.

Essi osservarono che anche il cadmio in ambiente ammoniacale può essere precipitato ed appunto per tale proprietà proposero il suo uso nella separazione rame-cadmio in quanto solo il primo catione è precipitato in ambiente acido. Recentemente I. Ubaldini⁽²⁾ usò detto reattivo per la determinazione del platino, rodio, palladio ed ottenne risultati assai soddisfacenti.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Roma, Centro di Chimica Generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) G. SPACU e M. KURAS, «Z. Anal. Chem.», 102, 24, 108 (1935).

(2) I. UBALDINI, «Gazzetta», 78, 293 (1948).

Scopo della presente ricerca è stato indagare sulle possibilità d'impiego del metodo amperometrico per la determinazione sia del mercaptobenzotiazolo sia di alcuni cationi metallici capaci di reagire con esso.

STRUMENTI E MATERIALI USATI. - La determinazione delle curve intensità-voltaggio è stata eseguita con un dispositivo operato a mano analogo a quello descritto da J. J. Lingane e I. M. Kolthoff⁽³⁾ adoperando l'elettrodo a goccia di mercurio oppure il microelettrodo rotante di platino.

Esso consiste in un circuito potenziometrico ed uno di elettrolisi. La forza elettromotrice applicata alla cella viene regolata mediante due resistenze variabili, collegate in serie, una da 1000 Ohm e una da 10 Ohm, e viene misurata con un potenziometro Leeds e Northrup calibrato con una cella standard Weston. La corrente che passa attraverso la cella viene calcolata con la legge di Ohm misurando la caduta di potenziale attraverso una resistenza standard di 10.000 Ohm.

Un galvanometro a specchio Leeds e Northrup, la cui sensibilità può essere variata mediante un Ayrton shunt, è usato come strumento di zero.

Un elettrodo a calomelano saturo collegato con la cella di titolazione mediante un ponte salino costituisce l'anodo.

La cella di titolazione ha una capacità di circa 50 ml. e consiste in un cilindro di vetro dal diametro di 4 cm. e una altezza di 9 cm. Essa è fornita di un tubo di vetro per il gorgogliamento del gas inerte che allontana l'ossigeno prima e durante la titolazione.

Nella parte superiore della cella è inserito un tubicino per il passaggio dell'azoto durante la titolazione al fine di impedire il discioglimento dell'ossigeno nella soluzione. La cella è chiusa con un tappo di gomma a 4 fori: uno per l'introduzione del ponte salino uno per la microburetta da cui viene aggiunto il reattivo, uno per l'elettrodo a goccia e l'ultimo per la fuoriuscita del gas.

Le titolazioni con microelettrodo rotante di platino sono state eseguite in becher secondo il procedimento descritto da Kolthoff e Harris⁽⁴⁾. L'elettrodo, costituito da un filo di platino dello spessore di 0,5 mm., lungo circa 6 mm. veniva fatto ruotare (circa 800 giri al minuto) mediante collegamento con puleggia ad un motore a corrente continua.

METODO DI TITOLAZIONE. - Quando è nota la curva intensità-voltaggio della sostanza da titolare, il potenziale dell'elettrodo è fissato all'inizio della titolazione ad un valore corrispondente a quello in cui lo ione in esame fornisce una corrente di diffusione.

Il reattivo viene aggiunto da una microburetta del volume di 3 ml. con divisioni di 0,01 ml. Dopo ogni aggiunta di reattivo l'azoto gorgoglia per circa tre minuti per mescolare il liquido. L'azoto viene quindi inviato nella parte superiore della cella e la corrente misurata dopo circa 1 minuto. L'azoto viene quindi fatto gorgogliare per un altro minuto e la misura viene ripetuta. Questo proce-

(3) J. J. LINGANE e I. M. KOLTHOFF, « J. Amer. Chem. Soc. », 61, 825 (1939).

(4) I. M. KOLTHOFF e HARRIS, « Ind. Eng. Chem. An. Ed. », 18, 161 (1946).


dimento è necessario per controllare che sia stato raggiunto l'equilibrio di precipitazione tra reattivo e soluzione.

MATERIALI USATI. — Il mercaptobenzotiazolo venne preparato da un prodotto commerciale che venne purificato mediante ripetute dissoluzioni in idrato sodico e precipitazione con acido solforico o cloridrico, cristallizzato da acido acetico e ricristallizzato dall'alcool etilico. Punto di fusione 176°–178°. Una soluzione 2×10^{-2} M. di mercaptobenzotiazolo in alcool 95% di buona qualità venne usata per le titolazioni descritte.

Se la soluzione è lasciata per un lungo periodo, si separa una sottile polvere e la soluzione deve essere di nuovo titolata.

Tutti i prodotti chimici usati vennero ricristallizzati. Il titolo della soluzione di rame venne determinato elettroliticamente e quello dell'argento con il classico metodo di Mohr.

PARTE SPERIMENTALE. — Le curve intensità-voltaggio del mercaptobenzotiazolo⁽⁵⁾ hanno mostrato che tale composto presenta sia un'onda di ossidazione che una di riduzione. La prima è dovuta all'ossidazione anodica del mercurio per la formazione di un mercaptide mercurioso, la seconda è di natura catalitica ed è dovuta all'abbassamento del sovravoltaggio dell'idrogeno. Dette onde non possono essere prese in considerazione a scopo analitico in quanto l'altezza dell'onda anodica è proporzionale alla concentrazione del mercaptobenzotiazolo solo per soluzioni $5 - 7.5 \times 10^{-4}$ M. e l'onda catodica, è così poco ben definita da rendere poco corretta la sua misura. Non potendo perciò fare uso delle proprietà elettrochimiche del reagente venne fatto uso della corrente di diffusione ottenuta con i cationi in esame.

Applicando pertanto alla cella di elettrolisi un potenziale corrispondente a quello di diffusione del catione ed eseguendo la titolazione amperometrica vengono ottenute delle curve a forma di «  ».

TITOLAZIONE DI CATIONI METALLICI CON MERCAPTOBENZOTIAZOLO MEDIANTE ELETTRODO A GOCCIA DI MERCURIO. — Una numerosa serie di esperimenti preliminari è stata eseguita per determinare le condizioni necessarie alla precipitazione del cadmio. In soluzione neutra o acida il cadmio non precipita quantitativamente mentre in soluzione ammoniacale si forma un precipitato bianco. La solubilità dell'ammoniacato di cadmio aumenta considerevolmente con la concentrazione dell'ammoniaca e risultati riproducibili possono ottenersi soltanto mantenendo rigorosamente costante la concentrazione dell'ammoniaca.

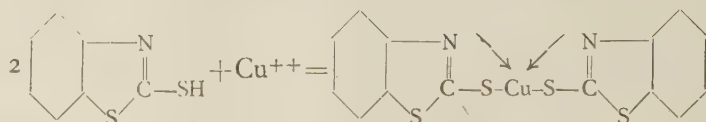
La quantità di reattivo necessaria per la precipitazione cresce con la concentrazione dell'ammoniaca. Il mercaptobenzotiazolo non offre pertanto possibilità pratiche alla determinazione amperometrica del cadmio.

Tentativi di titolazione amperometrica di sali di piombo (Pb^{++}) e bismuto (Bi^{+++}) con mercaptobenzotiazolo sono stati senza successo: un eccesso di reattivo è necessario per la precipitazione quantitativa di questi cationi.

(5) G. SARTORI e A. LIBERTI, « J. Electrochem. Soc. », 97, 20 (1950).

Preliminari titolazioni amperometriche del rame in soluzioni tamponate e non tamponate dettero i seguenti risultati orientativi:

In ambiente acido per acido minerale e in ambiente neutro ($\text{KCl}-\text{KNO}_3$) si ha precipitazione lenta e parziale; in ambiente leggermente acido, tampone ossalico, tartarico e citrico si ha precipitazione lenta, mentre in ambiente acetico si hanno risultati eccellenti. Si forma un precipitato grigio-verde di un complesso chelato, il mercaptobenzotiazolato di rame, secondo la seguente reazione:



Venne quindi studiata la precipitazione del rame in tale ambiente ed alcuni dei risultati, ricavati da grafici del tipo di quelli riportati in fig. 1, sono presentati nella tabella seguente:

TABELLA I.

Esp.	Vol. sol.	Composizione elettrolita base	ph	Concentrazione Cu moli/litro	ml. reattivo usato $1,95 \times 10^{-2}$ M	mg. Cu presente	mg. Cu trovato	Errore %
1	25	0,1 M AcOH-AcNa	4,8	$0,9904 \times 10^{-3}$	2,54	1,574	1,5743	0,0
2	25	0,01 M " "	4,8	$0,9904 \times 10^{-3}$	2,55	1,574	1,580	+ 0,4
3	25	0,1 M " "	4,8	$4,952 \times 10^{-4}$	1,26	0,787	0,781	- 0,8
4	25	0,1 M " "	4,8	$4,952 \times 10^{-4}$	2,02	1,259	1,252	- 0,6
5	25	0,1 M " "	4,8	$1,9808 \times 10^{-3}$	5,01	3,148	3,105	- 1,3
6	40	0,1 M " "	4,8	$1,9808 \times 10^{-3}$	8,10	5,036	5,019	- 0,3
7	50	0,1 M " "	4,8	$0,9904 \times 10^{-3}$	5,07	3,148	3,142	- 0,1
8	25	0,1 M " "	4,8	$1,9808 \times 10^{-3}$	5,075	3,148	3,142	0,0
9	25	0,05 M AcOH 0,005 M AcNa	3,7	$0,9904 \times 10^{-3}$	2,55	1,574	1,580	+ 0,4
10	25	0,1 M AcNa 0,01 M AcOH	5,9	$0,9904 \times 10^{-3}$	2,55	1,574	1,582	+ 0,5
11	25	0,1 M AcOH 0,01 M AcNa	3,7	$0,9904 \times 10^{-3}$	2,56	1,574	1,486	+ 0,8
12	25	1 M AcOH-AcNa	4,8	$0,9904 \times 10^{-3}$	2,57	1,574	1,592	+ 1,1
13	25	2 M " "	4,8	$4,952 \times 10^{-4}$	1,285	0,787	0,7964	+ 1,2

Questi dati mostrano che quantità di rame comprese nell'intervallo mg. 0,7 e 5,0 in volume di 25-50 ml. può essere titolato con una accuratezza pari a circa 1%.

Condizione necessaria alla determinazione è l'ambiente leggermente acido per acido acetico.

In tampone acetico a pH 3,7-5,9 la precipitazione del rame con mercaptobenzotiazolo è rapida e quantitativa. In ambiente neutro per nitrato potassico o acido per acidi minerali o in tamponi di citrati, tartrati, e ossalati, la precipitazione è lenta ed è totale solo dopo aggiunta di un notevole eccesso di reattivo. Poichè il potenziale di semionda del rame in tali complessi è dello stesso ordine di grandezza che in tampone acetico, questo differente comportamento deve essere

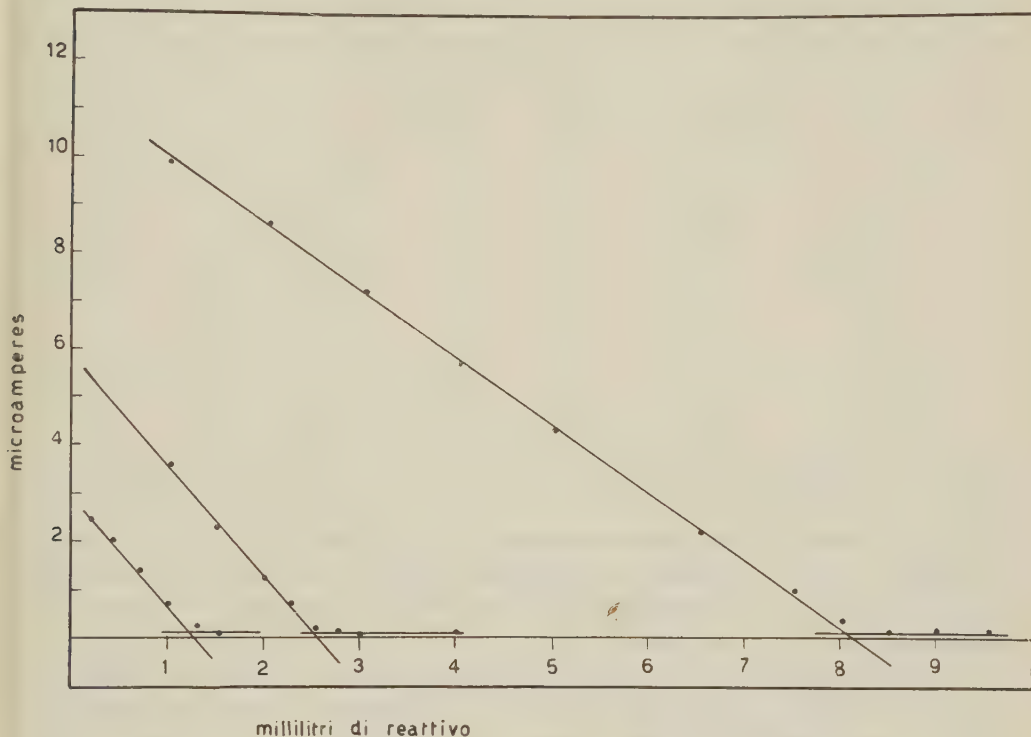


Fig. 1. — Titolazione di mg. 0,787, 1,574 e 5,036 di rame con mercaptobenzotiazolo 1.95×10^{-2} M.

attribuito ad una velocità di reazione più lenta tra il mercaptobenzotiazolo e detti complessi.

In ambiente acetico il precipitato si separa in forma di particelle estremamente fine che vengono a coagularsi mediante energica agitazione ottenuta facendo gorgogliare azoto attraverso la soluzione.

Quando il gorgogliamento è interrotto si deposita un precipitato fioccoso grigio verde che lascia il liquido sovrastante limpido anche in soluzioni diluite.

La concentrazione del tampone non ha un valore critico. Sia in tamponi 3 M. di acido acetico e acetato, che per quelli 0,01 M. la precipitazione avviene regolarmente e il grafico di titolazione corrisponde ad una linea retta.

La determinazione del rame con mercaptobenzotiazolo può essere eseguita amperometricamente anche in presenza di notevoli quantità di altri elementi.

Titolazioni del rame in presenza di sodio, potassio, calcio, bario, cobalto, zinco, nichel, alluminio in concentrazione 5-10 volte maggiori (5×10^{-3} — 10^{-2}) sono state seguite con un errore di circa 1 %. Cadmio e manganese nelle condizioni sperimentali interferiscono.

Alcuni dei risultati ottenuti vengono presentati nella tabella II.

TABELLA II.

Titolazione 25 ml. $0,9904 \times 10^{-3}$ Cu⁺⁺ in tampone acetico in presenza di vari cationi, con soluzione alcoolica di mercaptobenzotiazolo $1,95 \times 10^{-2}$ M.

Esp.	ml. reattivo	mg. Cu presente	mg. Cu trovato	Rapporto Cu/Me	met. pres. mol.	Errore percentuale
1	2,55	1.574	1.580	1:1	Co 10^{-3}	+ 0,4
2	2,55	1.574	1.580	1:10	Ni 5×10^{-2}	+ 0,4
3	2.575	1.574	1.596	1:10	Zn 5×10^{-2}	+ 1,4
4	2.53	1.574	1.570	1:100	Na-K 10^{-1}	— 0,3
5	2.535	1.574	1.572	1:100	Ba-Ca 10^{-1}	— 0,2
6	2.54	1.574	1.574	1:10	Al 10^{-2}	0,0

TITOLAZIONE DEL MERCAPTOBENZOTIAZOLO. — Il mercaptobenzotiazolo può essere determinato per via acidimetrica o argentometricamente usando un indicatore di assorbimento o con il metodo di Volhard secondo il procedimento di Ushakow e Galanow ⁽⁶⁾.

La determinazione si può eseguire amperometricamente in modo assai semplice e rapido usando il microelettrodo rotante di platino come elettrodo indicatore poichè nessun voltaggio deve essere applicato alla cella di elettrolisi, in quanto l'argento fornisce correnti di diffusione a potenziale zero rispetto all'elettrodo a calomelano saturo. Per eliminare l'interferenza dei cloruri o dei bromuri conviene operare in soluzione ammoniacale: per avere in questo caso la riduzione al microelettrodo di platino dell'argento presente sotto forma di complesso, senza applicare nessun voltaggio si deve usare come elettrodo impolarizzabile quello a mercurio-ioduro di mercurio, che fornisce un potenziale di — 0,23 V. vs l'elettrodo a calomelano saturo.

È stato eseguito il seguente procedimento analitico:

Un campione pesato di mercaptobenzotiazolo viene disciolto in alcool. Un'aliquota di esso è trasferito in un palloncino tarato, si aggiunge ammoniaca fino a rendere la soluzione all'incirca 0,25 M. e un elettrolita base (NH_4NO_3 — KNO_3) fino a ottenere una concentrazione 10^{-1} M. Si porta a volume con acqua ed alcool e si preleva un campione di 25-50 ml. corrispondente a qualche mg. di sostanza.

(6) USHAKOW e GALANOW, « Z. Anal. Chem. », 99, 185 (1934).

Alcuni dei risultati ottenuti sono presentati nella tabella III: le quantità di mercaptobenzotiazolo presenti furono prelevate da una soluzione campione che fu analizzata con il metodo di Ushakow e Galanow.

TABELLA III.

Vol.	Soluz. esaminata	mg. mercaptobenzotia- zolo presente	mg. mercaptobenzotia- zolo trovato	Errore
1	25 ml.	4.092	4.104	+ 0,3
2	50 »	4.092	4.094	0,0
3	25 »	8.184	8.188	0,0
4	20 »	5.672	5.646	— 0,5
5	25 »	3.240	3.264	+ 0,8
6	20 »	1.946	1.940	— 0,3
7	25 »	2.039	2.046	+ 0,4
8	25 »	1.635	1.632	— 0,2
9	25 »	3.273	3.285	+ 0,4

La titolazione può essere eseguita anche in presenza di cloruri: concentrazioni di ioni cloro 10^{-1} M. non provocano alcuna interferenza. La concentrazione dell'ammoniaca nella soluzione non deve essere maggiore di 0,3 N. Concentrazioni superiori provocano dei risultati sensibilmente più elevati.

In modo identico la precipitazione del mercaptobenzotiazolo può essere effettuata con ioni mercuriosi, che analogamente agli ioni argento danno una corrente di diffusione a potenziale zero.

La formazione di amalgame stabili sulla superficie dell'elettrodo di platino non rende però pratiche tali determinazioni.

Chimica inorganica. — *Nuove ricerche sugli ossidi superiori dell'argento* (*). Nota di GIUSEPPE ANTONIO BARBIERI e AMEDEO MALAGUTI, presentata (**) dal Socio G. B. BONINO.

Nel 1906 e nel 1907 uno di noi ⁽¹⁾ avendo preso in esame il comportamento chimico dei cosiddetti perossidi dell'argento giunse alla conclusione che bisognava abbandonare la credenza, purtroppo avvalorata e resa quasi inattaccabile dai nomi di Mendeleeff, Berthelot, Mulder e molti altri, che si trattasse di veri perossidi

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico « Giacomo Ciamician » dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) G. A. BARBIERI, « Rend. Accad. Lincei » [5], XV, I, 503 (1906); [5], XVI, II, 72 (1907)

del tipo dell'acqua ossigenata e che bisognava considerarli come ossidi superiori corrispondenti a forme di combinazione AgX_2 e AgX_3 ancora sconosciute.

Nel trentennio seguente tale conclusione, ch'era potuta sembrare in un primo tempo avventata, trovò piena conferma nella preparazione di parecchi composti complessi dell'argento bivalente⁽²⁾ e anche di alcuni dell'argento trivalente⁽³⁾.

Nessuno ora ritiene che Ag_2O_2 sia un composto analogo ad Na_2O_2 e che nel cosiddetto perossido-nitrato elettrolitico sia contenuto un vero perossido e un pernitrato d'argento⁽⁴⁾, e tutti considerano gli ossidi superiori dell'argento analoghi a quelli del piombo e del manganese. Tuttavia mentre questi ultimi, pur con qualche difficoltà, possono venir salificati, nessun composto dell'argento plurivalente è stato finora ottenuto direttamente dai relativi ossidi superiori, ma sempre si è dovuto ricorrere all'ossidazione di sali dell'argento monovalente mediante l'ossigeno anodico, il persolfato potassico o il fluoro libero.

In questa Nota noi ci proponiamo di mostrare che anche il dogma della non salificabilità degli ossidi superiori dell'argento - che dura da circa un secolo e mezzo - deve ormai venire abbandonato. Noi abbiamo potuto ottenere un composto complesso dell'argento bivalente e precisamente il perclorato di argenti-dipiridile $[\text{Ag}''(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2)_2](\text{ClO}_4)_2$ in forma cristallina partendo tanto dall'ossido argentario preparato con $\text{K}_2\text{S}_2\text{O}_8$ in ambiente alcalino, quanto dall'ossido che si ottiene all'anodo nell'elettrolisi del nitrato d'argento.

Tale risultato è stato possibile perchè gli ossidi superiori d'argento vennero attaccati con acido nitrico diluito in presenza di una base: l' $\alpha\alpha_1$ -dipiridile che ha la singolare proprietà di formare complessi con alcuni joni metallici anche in ambiente acido giacchè la sua tendenza a formare metallammine è maggiore della tendenza a formare sali ammoniacali.

Era noto finora che AgO mentre si scioglie con colorazione nero seppia nell'acido nitrico concentrato, nell'acido nitrico diluito si scioglie con formazione di AgNO_3 e sviluppo di ossigeno. Questo sviluppo di ossigeno non dev'essere che il termine finale della reazione perchè in presenza di dipiridile l'ossido argentario passa in soluzione nell'acido nitrico diluito con colorazione rosso-bruna: ciò che prova che in un primo tempo si forma l'ione dell'argento bivalente che il dipiridile istantaneamente capta impedendone la riduzione.

PARTE SPERIMENTALE. - Sulla reazione tra persolfati e sali d'argento si trovano nella letteratura dati contraddittori. Secondo P. C. Austin⁽⁵⁾ il precipitato nero

(2) G. A. BARBIERI, « Gazz. Chim. », XLII, II, 1 (1912); « Rend. Accad. Lincei » [5], XXI, I, 560 (1912); [5], XXV, I, 42 (1916); « Berichte », 60, 2424 (1927); « Rend. Accad. Lincei » [6], XIII, I, 882 (1931); [6], XVI, II, 44 (1932); [6], XVII, I, 1078 (1933); C. SCHALL W. MELZER, « Z. f. Elektrochem. », 28, 476 (1922); W. HIEBER, F. MÜHLBAUER, « Berichte », 61, 2149 (1928); G. T. MORGAN, F. H. BURSTALL, « J. Chem. Soc. », 1930, 2594; O. RUFF, M. GIESE, « Z. anorg. allg. Chem. », 219, 143 (1934).

(3) L. MALAPRADE, « C. r. », 204, 979 (1937); 210, 504 (1940); L. MALATESTA, « Gazz. Chim. », 71, 467 e 580 (1941).

(4) Fa eccezione il *Trattato di Chimica generale e inorganica* di G. BRUNI che anche nell'ultima edizione ripete a p. 536 l'errore di Mulder: « Per ossidazione elettrolitica del nitrato d'argento si ottiene un pernitrato di argento » che poi più avanti a p. 758 smentisce.

(5) « J. Chem. Soc. », 99, 264 (1911).

che si forma contiene 21 % di $\text{Ag}_2\text{S}_2\text{O}_8$; 77 % di Ag_2O_2 e 2 % di acqua, mentre secondo D. M. Yost ⁽⁶⁾ il persolfato darebbe origine esclusivamente ad Ag_2O_3 .

Noi abbiamo fatto agire a caldo il persolfato potassico su Ag_2O in presenza di potassa caustica. In una soluzione preparata sciogliendo a caldo gr. 5 di persolfato potassico in 100 cc. di acqua e addizionata con 40 cc. di una soluzione al 10 % di KOH , si aggiunsero a poco a poco 20 cc. di una soluzione N/10 di AgNO_3 . L'ossidazione tarda un poco a prodursi perchè il persolfato potassico del commercio contiene sempre un po' di sale ammonico, e l'argento non passa alle forme superiori di combinazione finchè l'ammoniaca presente non sia stata completamente ossidata. Quando s'inizia l'ossidazione il precipitato giallastro bruno di Ag_2O si trasforma in una polvere del tutto nera. Questa venne separata e lavata ripetutamente per centrifugazione, poi senza asciugarla, si determinò in essa il rapporto Ag/O attivo. A tal uopo, una quantità qualunque della polvere nera venne introdotta in una soluzione di acqua ossigenata di titolo noto e acida per acido solforico. La polvere nera si sciolse istantaneamente con viva effervescenza. Con una soluzione N/10 di KMnO_4 si determinò l'acqua ossigenata residua e infine, sempre nella stessa soluzione, previa aggiunta di allume ferrico, si dosò l'argento con una soluzione N/10 di KSCN . In varie determinazioni il volume della soluzione di KMnO_4 risparmiata nella titolazione dell'acqua ossigenata risultò eguale (con l'approssimazione di uno o due decimi di cc.) a quello della soluzione N/10 di solfocianuro. Ciò era la prova che nella polvere nera era contenuto un equivalente di ossigeno attivo per ogni atomo di argento, e che quindi si trattava dell'ossido AgO .

Per preparare il sale complesso argentario la polvere nera proveniente dal trattamento di 20 cc. di soluzione N/10 di AgNO_3 venne sospesa (dopo accuratissimo lavaggio) in 150 cc. di una soluzione satura di $\alpha\alpha_1$ -dipiridile, contenente quindi circa gr. 0,6 della base: poi vi si aggiunse a poco a poco e agitando una soluzione di acido nitrico all'10%; il liquido si colorò subito in rosso-bruno e la polvere nera passò rapidamente in soluzione. Alla soluzione rossa e limpida si aggiunse un grande eccesso di una soluzione satura a freddo di KClO_4 . La soluzione rossa diventò subito torbida per la formazione di un composto cristallino rosso-mattone che si depositò rapidamente in fondo al liquido rimasto debolmente giallo.

All'analisi il composto cristallino seccato nel vuoto venne identificato come perclorato di argenti-dipiridile che uno di noi ⁽⁷⁾ aveva già ottenuto per ossidazione anodica del composto $[\text{Ag}^+(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2)_2]\text{ClO}_4$ sciolto in acido perclorico.

Il dosamento dell'argento venne eseguito per via volumetrica previa riduzione della sostanza con alcune gocce di soluzione SO_2 e acidificazione con acido nitrico. L'ossigeno attivo venne determinato per via iodometrica. Il dipiridile

(6) « J. Amer. Soc. », 48, 161 (1926).

(7) G. A. BARBIERI, « Rend. Accad. Lincei », 6, XVI, II, 44 (1932).

venne dosato col metodo argentometrico studiato recentemente da G. Cavicchi⁽⁸⁾. Vennero ottenuti i seguenti risultati:

Trovato % Ag 17,60; $C_{10}H_8N_2$ 50,73; O Attivo 1,28
Calcolato per $Ag(C_{10}H_8N_2)_2(ClO_4)_2$ » 17,43; » 50,42; » 1,30

Il cosiddetto perossido-nitrato di argento che si ottiene all'anodo nell'elettrolisi di una soluzione al 10% di $AgNO_3$, trattato con dipiridile e acido nitrico diluito si comporta come l'ossido AgO e la sua soluzione rosso-bruna precipitata con perclorato dà origine allo stesso composto dell'argento bivalente che è stato su descritto.

Anatomia Umana. — *Contributo allo studio dei dispositivi di blocco e dei corti circuiti nella circolazione del rene umano*^(*). Nota di ANTONIO RUOTOLO, presentata^(**) dal Socio S. SERGI.

I dispositivi di blocco o meglio di regolazione già noti da tempo in alcuni vasi, sono stati di recente e sono tuttora oggetto di numerose ricerche.

Dai dati finora acquisiti risulta che essi sono largamente distribuiti, essendo stati riscontrati nell'uomo e negli animali in numerosi organi e settori, come ad esempio nei vasi dell'ovaio, della tromba uterina, dell'utero, della vagina, del pudento femminile, del rene, uretere, fegato, linfonodi, miocardio, epididimo, apparato tegumentario ed in altri organi ancora.

Si è visto inoltre che tali dispositivi sono variabili per ciò che riguarda il materiale formativo, il punto di provenienza rispetto alle tuniche vasali, la loro morfologia, la loro grandezza, ecc. Per tutte queste ragioni essi non si possono rapportare ad un unico tipo, ma vanno classificati in formazioni sfinteriche, cuscinetti, colonnette e manicotti di muscolatura intinale, cuscinetti di cellule mioepitelioidi, cuscinetti pedunculati o polipoidi.

I dispositivi a sfintere sono rappresentati da maggiore abbondanza del materiale muscolare della tunica media delle arterie o da fascetti muscolari a disposizione anulare o spirale dell'intima delle vene. Sono stati osservati da Piana, Dubreuil, Aloisi, Bucciante, Danesino, Castigli, Spanner, ecc. nelle arterie e vene polmonari, nelle vene epatiche, in quelle della sottomucosa dell'intestino, della capsula prostatica, ecc.

I dispositivi di muscolatura intinale possono assumere l'aspetto di manicotti anulari, di colonnette muscolari limitate ad uno o più settori della circonferenza interna del vaso, oppure di cuscinetti anche essi circoscritti ad un segmento del lume vasale, ma più corti dei precedenti e più spessi in guisa tale da assumere

(8) « Annali di Chimica », 40, 149 (1950).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Umana Normale della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1950.

l'aspetto di rilievi pressochè emisferici. Queste due ultime evenienze della muscolatura intima ricorrono più frequentemente che i manicotti.


I dispositivi di questo tipo sono stati descritti da numerosi ricercatori, Watzka, Clara, Bucciante, Conti, Zimmermann, Kux, Stieve, ecc., nelle arteriole del polpastrello delle dita, in quelle della tuba uterina, del miometrio, dei linfonodi, della prostata, del fegato, nelle vene dell'utero e della tromba, in quelle dell'ovaio e della vagina, ecc.

I cuscinetti peduncolati o polipoidi sono stati illustrati soprattutto da Bucciante e dalla sua Scuola. Si tratta essenzialmente di formazioni muscolari a provenienza dalla tunica media, avvolte dall'intima, che si avanzano più o meno nel lume vasale. Talora l'esame dei costituenti di questi cuscinetti autorizza ad ammettere che essi sono l'espressione dell'invaginazione in un breve tratto della parete vasale di tutte e tre le tuniche di questa. Sono stati osservati nell'utero, nel fegato, stomaco, mammella, ecc.

I dispositivi costituiti da cuscinetti di cellule mioepitelioidi sono più rari e sono di pertinenza dell'intima. Sono stati descritti da Watzka, Conti, ecc.

Per quanto riguarda il rene, le ricerche compiute in proposito sono limitate soprattutto all'arteriola *afferens* del glomerulo. Per questa ragione e data l'importanza che l'argomento riveste anche nei riflessi della funzione renale, ho creduto utile approfondire le ricerche su questo organo.

Le mie osservazioni sono state fatte su materiale umano e precisamente su soggetti serati dalla nascita a 38 anni ed esenti da affezioni renali. Ogni pezzo esaminato comprendeva una piramide di Malpighi, la sovrastante zona corticale e le corrispondenti colonne di Bertin.

Il materiale è stato fissato in formalina e sezionato in serie, ora secondo l'asse maggiore della piramide ed ora perpendicolarmente a questo. Le fette sono state colorate con la miscela di Cajal-Gallego  con l'ematossilina-eosina.

Dalle mie ricerche risulta che il rene è ricco di dispositivi di regolazione, i quali rivestono caratteri diversi sia nell'intima costituzione che nella estensione, ed anzi si può dire che in questo organo si trovano rappresentati tutti i tipi finora descritti in altri settori dell'organismo. Ho infatti notato le colonnette, i cuscinetti e i manicotti intimali, gli sfinteri anulari, i cuscinetti di cellule mioepitelioidi ed i cuscinetti peduncolati.

I cuscinetti e i manicotti intimali sono i più frequenti ad osservarsi e risultano come altrove di fascetti di cellule muscolari situate tra l'endotelio e la membrana elastica interna, ora numerosi e addossati tra loro ora invece scarsi e disseminati in mezzo a tessuto connettivo. Lo spessore e la lunghezza dei cuscinetti e dei manicotti è variabile. Sono soprattutto questi ultimi che invadendo su di un tratto del vaso tutta la circonferenza, ne riducono il lume. Essi inoltre non hanno uno spessore uniforme, presentandosi qua più sottili e là più spessi. Se si seguono nelle sezioni longitudinali si apprezza che verso le estremità si assottigliano gradatamente, sicchè il lume vasale a loro livello assume l'aspetto di una clessidra. Per quanto riguarda i manicotti mi è occorso talora di osservare che essi possono invadere con i loro elementi muscolari anche la tunica media sostituendosi parzialmente ai fascetti muscolari a decorso circolare della stessa tunica.

I cuscinetti e i manicotti si osservano più spesso o in vicinanza del punto di biforcazione di un'arteria o nel punto di origine di una collaterale o all'inizio di quest'ultima. In base a queste constatazioni ritengo appropriato il termine di « guida di corrente » che Kux ha dato a tali dispositivi, in quanto essi regolano con la loro attività il flusso sanguigno ora dirottandolo, sia pure parzialmente, nel ramo collaterale ed ora contenendolo tutto nell'arteria madre.



Fig. 1. - Bambino di 5 mesi.

Si vede un'arteria *subcorticalis* in sezione longitudinale che presenta un dispositivo di regolazione bene sviluppato.

L'osservazione a forte ingrandimento dimostra che tale dispositivo appartiene al tipo sfinterico.

Metodo ematossilina-eosina. Microfot. 220 X.

Talora, sebbene raramente, mi è occorso di osservare cuscinetti e manicotti intimali costituiti da cellule mioepitelioidi, reperto questo che è stato osservato da Conti in arteriole del miocardio e in arteriole nutritizie di vasi, da Mark in arteriole epatiche, da Zink in ramoscelli delle arterie coronarie.

In altri casi invece i dispositivi di regolazione sono rappresentati da sfinteri anulari. Essi risultano di un ispessimento segmentario della tunica media determinato da una maggiore ricchezza di elementi muscolari. Hanno in genere l'esten-

sione di pochi micron e si avanzano a guisa di sperone nel lume vasale, il quale in tal modo viene ridotto.

Più raramente mi è occorso di riscontrare i cuscinetti peduncolari descritti da Bucciante e dalla sua Scuola.

Accanto a tutti questi dispositivi ho notato in alcune arterie un particolare comportamento della tonaca media caratterizzata da ispessimenti segmentari del

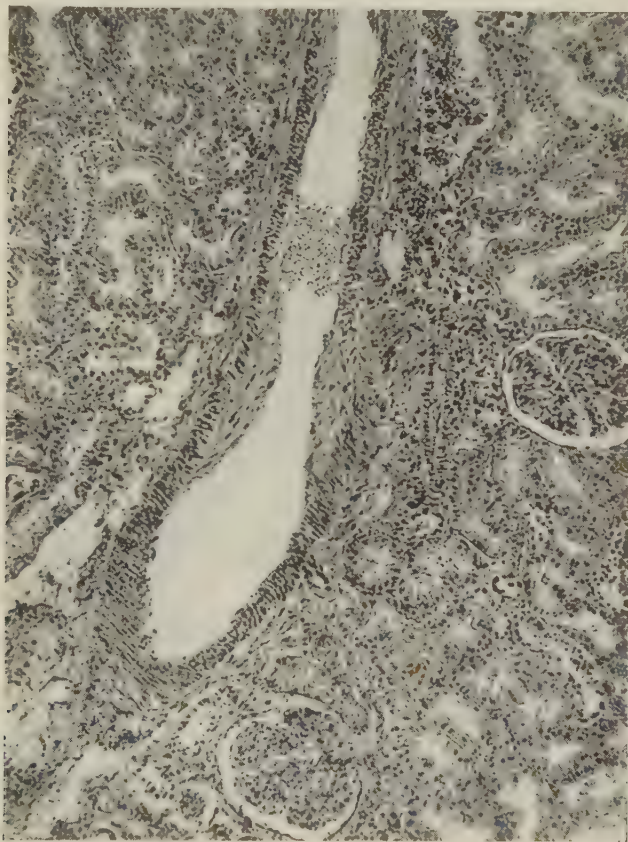


Fig. 2. - Uomo di 17 anni.

Questa figura mostra un'arteria *subcorticalis* laddove emette un'arteria *corticalis radiata*. All'origine di questa si vede un manicotto intinale e a monte del manicotto (a destra di chi guarda) l'inizio di un'arteriola che probabilmente è destinata ad un corpuscolo renale iustamidollare.

Metodo ematossilina-eosina. Microfot. 72 X.

vaso dovuti ad una maggiore abbondanza del materiale muscolare della media, come negli sfinteri anulari, senza però che corrispondentemente il lume vasale sia ristretto. Per queste caratteristiche sono indotto a considerare anche tali ispessimenti come dispositivi di regolazione.

Abitualmente tutti i suddetti dispositivi risiedono sulle arterie renculari e i loro rami, sulle arterie subcorticali e sulle arterie corticali radiate, sulle quali ultime si osservano in genere ora all'origine ed ora nel primo tratto del loro

decorso; talora essi si possono riscontrare anche là dove dalle arterie corticali radiate partono le arteriole afferenti.

In base a questi dati e all'esistenza dell'importantissimo *apparato iuxtaglomerulare* di Goormaghtigh e della *macula densa* del segmento intercalare del tubulo renale si può dire che il sangue circolante nell'ambito di un lobo renale prima di raggiungere il nefrone è sottoposto al controllo di almeno tre ordini di blocco:

quello delle arterie renculari, quello delle arterie corticali radiate ed infine dell'arteria afferente del glomerulo.

A tutti questi dispositivi fanno riscontro numerose vie derivative rappresentate dalle arterie di Ludwig, dalle arterie di Dehöff-Elze e da quelle di Kosugi (la cui esistenza è però molto dubbia) e soprattutto dalle anastomosi artero-venose.

Le arterie di Ludwig come è noto sono rami collaterali delle arterie afferenti dei glomeruli dai quali sono indipendenti e vanno a capillarizzarsi direttamente nel convoluto. La loro esistenza è stata di recente discussa soprattutto da Trueta e Collaboratori i quali tendono ad attribuire a tali arterie il significato di vasi neoformati.

Le arterie di Dehöff-Elze sono rappresentate da quei rami terminali delle arterie corticali radiate i quali non si portano ai glomeruli, sono cioè arterie aglomerulifere e vanno ad esaurirsi direttamente nella *cortex corticis*.

L'arteria di Kosugi (se esiste) è una specie di ponte vasale che unisce l'arteria afferente a quella efferente dello stesso glomerulo.

Particolare importanza rivestono le anastomosi artero-venose per la capacità che hanno di convogliare dal letto arterioso direttamente nella via delle vene quantità anche notevole di sangue.

L'esistenza di questi vasi ammessa da alcuni, negata da altri, è stata dimostrata soprattutto da Spanner e successivamente da Nuzzi.

Spanner le ha documentate nel seno renale, nella corteccia e nella capsula fibrosa del rene. Nel seno egli le considera molto numerose (360 per cmq.) e le descrive con due aspetti diversi; nella corticale le ha viste su tutta l'altezza, dal limite tra corticale e midollare fino alla *cortex corticis*, e numerose le ritiene anche nella capsula fibrosa.

Nuzzi servendosi di varie tecniche ha potuto anch'egli dimostrare nel seno renale e nella sostanza corticale le anastomosi artero-venose, ed in base all'abbondanza con la quale le ha osservate ritiene verosimile la cifra data da Spanner per quelle del seno.

La questione che sembrava così definitivamente risolta è stata molto di recente riaperta da Trueta e Collaboratori, i quali negano la presenza di a. a. v. soprattutto perchè non sono riusciti a vederle. Ma questo a me sembra un argomento di scarso valore probativo, tanto più che, come avverte Spanner, non sempre è possibile iniettarle, sia perchè possono trovarsi chiuse e sia perchè possono essere ripiene di coaguli che ostacolano il passaggio della massa di iniezione. Affermano inoltre Trueta e Collaboratori che le anastomosi artero-venose se esistessero con l'abbondanza ammessa da Spanner priverebbero il rene, qualora fossero aperte, di buona parte se non di tutto il sangue destinato a quest'organo. Ma nessun

valore si può attribuire a questa obiezione per varie considerazioni e perchè essa si potrebbe fare al corto circuito renale descritto dallo stesso Trueta e la cui esistenza è stata dimostrata anche da altri sperimentatori. Questo circuito infatti è ricchissimo di vasi e pure il rene non viene normalmente privato del suo sangue, evidentemente perchè nelle condizioni abituali tale via non entra in azione o per lo meno non funziona con tutti i suoi vasi.



Fig. 3. - Uomo di 25 anni.

Si vede un'arteria subcorticalis (in sezione trasversale) ed un'arteria corticalis radiata (in sezione longitudinale). Quest'ultima è fornita alla sua origine di un dispositivo di regolazione ben evidente sui due lati del vaso. Anche l'arteria subcorticalis presenta (nella semicirconferenza inferiore) un dispositivo di regolazione ed in corrispondenza di questo si vede dipartirsi un'arteriola probabilmente destinata ad un glomerulo iustamidollare.

Metodo ematossilina-eosina. Microfot. 132 X.

Si aggiunga inoltre che proprio nella costituzione del corto circuito Trueta e Collaboratori documentarono il passaggio diretto tra arterie e vene rette, dando così, senza peraltro ammetterlo, la dimostrazione dell'esistenza di anastomosi artero-venose, anzi di una varietà ed in una sede che non era stata, per quanto mi risulta, vista da altri.

Ma, a parte queste considerazioni, a me sembra che l'esistenza delle anastomosi artero-venose sia un fatto reale anche perchè esse hanno una ulteriore

dimostrazione sia negli esperimenti di Simkin che da queste mie ricerche, nelle quali sono riuscito a mettere in evidenza i suddetti vasi a livello del seno renale, fra corticale e midollare e nella corticale. Anche la prova fornita da Simkin e Collaboratori, per quanto indiretta è di indubbio valore.

Questi infatti iniettando per via arteriosa nel rene umano sfere di vetro del diametro di 90-440 micron, poterono vedere che passavano nelle vene e pertanto conclusero che vie derivative del diametro notevolmente più grande di quello dei capillari debbano trovarsi in quest'organo.

In base ai fatti finora esposti ed alle ricerche di Trueta si può dire che nel rene esistono diversi circuiti vascolari che si possono così elencare:

1° *grande circuito o circuito corticale* di Trueta, costituito da due terzi distali delle arterie corticali radiate, dalle arterie afferenti dei glomeruli corrispondenti, da questi, dalle relative arterie efferenti, dalle corrispondenti reti capillari intertubulari e dai due terzi distali delle vene corticali radiate;

2° *corto circuito o circuito midollare* di Trueta costituito dal terzo prossimale delle arterie corticali radiate, dai glomeruli intramidollari e dalle relative arteriole, dai vasi retti arteriosi a venosi e dal terzo prossimale delle vene corticali radiate;

3° *circuito del seno renale* o di Spanner costituito dalle anastomosi artero-venose che uniscono i rami delle arterie e delle vene renculari e perciò anche da queste ultime;

4° *circuiti piccoli*, che si potrebbero dire di settore, costituiti dalle arterie di Ludwig e da quelle di Dehoff-Elze, grazie alle quali il sangue scartando la rete glomerulare si scarica direttamente nella rete capillare intertubulare; ed ancora dalle anastomosi artero-venose che uniscono le arterie e le vene corticali radiate.

Tutti questi circuiti rappresentano altrettante vie potenziali della corrente sanguigna renale e perciò altrettante riserve anatomiche pronte a sostituirsi o ad associarsi quando le condizioni lo richiedono. La loro funzione, io credo, è legata ai dispositivi di blocco che sopra ho descritto. Infatti la valutazione comparativa di questi e delle vie derivative porta ad ammettere un intimo rapporto funzionale tra loro, nel senso cioè che ad ogni sede di blocco corrisponde un corto circuito.

In ragione di quanto sopra si possono prospettare le seguenti evenienze:

se il sangue è ostacolato o addirittura bloccato nel sistema delle arterie renculari dai dispositivi di regolazione di queste, esso può prendere la via delle anastomosi artero-venose del seno e quindi delle vene renculari. Si effettua allora il cortissimo circuito o circuito del seno renale;

se il blocco viene realizzato a livello del primo tratto delle arterie corticali radiate, il sangue può essere deviato attraverso i glomeruli iuxtamidollari ed i vasi associati, nonché attraverso le anastomosi artero-venose dei vasi subcorticali. Si effettua allora il corto circuito di Trueta.

Se il blocco si realizza a livello dei glomeruli il sangue può essere deviato nella rete capillare intertubulare per la via delle arterie di Ludwig e di quelle di Dehoff-Elze ed ancora per la via delle anastomosi artero-venose direttamente dalle arterie corticali radiate alle vene omonime. Si realizzano allora dei circuiti più piccoli perchè limitati a territori renali più brevi.

Ritengo che in rapporto alle normali oscillazioni del regime circolatorio e delle fluttuazioni funzionali del rene, rivestano particolare importanza i dispositivi del glomerulo (apparato iustaglomerulare e macula densa) e quelli della arteria corticale radiata, in quanto se i primi rappresentano, come ormai da tutti è ammesso, il substrato anatomico del blocco glomerulare, è lecito supporre che gli altri costituiscano il substrato anatomico del blocco della arteria corticale radiata.

Ne consegue allora che accanto all'alternanza del singolo glomerulo e quindi della singola unità isto-fisiologica, il nefrone, si potrebbe ammettere l'alternanza di tutto il gruppo di glomeruli che da una stessa arteria radiata si alimentano; si potrebbe cioè ammettere l'alternanza di un settore ossia di tutto un lobulo. Questa alternanza potrebbe essere intesa o nel senso che i dispositivi di regolazione determinino un'ischemia completa ma fugace del lobulo o nel senso che essi producano solo una caduta nella portata, pressione e velocità della corrente sanguigna col risultato di annullare la pressione di filtrazione nel settore. Pertanto, considerati sotto questo aspetto, i dispositivi di regolazione vengono a costituire un argomento di ordine anatomico in sostegno della concezione dell'alternanza funzionale delle varie parti, *organula*, di uno stesso organo, cioè dei bioritmi.

Anatomia. — *Nuovi particolari sul comportamento delle fibre nervose nevrassiali e simpatiche nel labirinto umano* (*). Nota di GENNARO PALUMBI, presentata (**) dal Socio A. PENSA.

Le presenti ricerche sono state intraprese con lo scopo di stabilire se nella parete del labirinto membranoso esistano apparati espansionali di tipo recettore cui attribuire la regolazione in via riflessa della pressione endo e perilinfatica.

Mi sono servito principalmente di materiale umano prelevato da feti a termine e da soggetti adulti di varie età; inoltre di materiale di cavia e di topo neonato.

L'otricolo, il sacculo ed i canali semicircolari dell'uomo sono stati separati mediante dissezione al microscopio binoculare dal loro involucro osseo e frammenti di detti organi sono stati sottoposti, *in toto*, alla impregnazione argentea secondo il metodo Bielchowsky in una mia modificazione.

Tale metodo è stato anche applicato su sezioni di rocche petrose condotte a livello dell'orecchio interno, previamente sottoposte a decalcificazione con acido nitrico al 4%. Sono stati anche allestiti preparati di controllo con i comuni metodi di tecnica istologica (ematossilina ed eosina; metodo Azan).

Nella presente Nota espongo i risultati finora conseguiti.

I. DATI RELATIVI ALL'OTRICOLO. — È attualmente noto che i fascetti del nervo utricolare formano in seno alla membrana propria della macula un primo plesso; che da questo originano fibre che si portano verso lo strato epiteliale, fibre che

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto anatomico e Centro di studio sul sistema nervoso di Pavia.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1950.

nell'attraversare la membrana basale perdono la guaina mielinica e che giunte in corrispondenza delle cellule di sostegno formano, con i loro rami di divisione, un secondo plesso dal quale infine originano le fibre destinate alle cellule capillari.

Ora, il fatto nuovo e fondamentale ottenuto con il mio metodo di impregnazione argentea consiste nell'aver riscontrato in seno al connettivo disposto attorno all'area maculare, che in superficie ha forma triangolare, la presenza di alcuni grovigli espansionali formati da fibre il cui comportamento è nettamente diverso da quello delle fibre sensoriali destinate all'epitelio della macula.

Nella zona indicata alcune fibre grosse e midollate provenienti dal n. utricolare dopo aver percorso indivise i plessi nervosi formati dalle fibre proprie della regione maculare, improvvisamente si ripiegano su loro stesse formando anse ed arcate; altre più numerose assumono un decorso estremamente tortuoso durante il quale subiscono improvvisi allargamenti e restringimenti; si intrecciano, si avviticchiano e si anastomizzano con altre fibre vicine aventi gli stessi caratteri e danno così luogo a tipici grovigli più o meno ben circoscritti dai quali infine originano brevi e sottili ramoscelli flessuosi che terminano alla loro estremità con piccole laminette fibrillari.

Da alcune fibre originano anche rami che emettono ad intervalli regolari brevi collaterali, che si risolvono a loro volta in ramoscelli terminanti nel connettivo con piccole espansioni lamellari.

In base ai caratteri sopra esposti a me sembra fuori dubbio che tali apparati terminali espansionali che, ripeto, si trovano nel connettivo perimaculare, abbiano il significato di *regolatori riflessogeni della pressione della endolinfa* contenuta nel labirinto membranoso. Può darsi che tale regolazione si effettui mediante atti riflessi di ordine vasomotorio o secretorio, o anche variando la velocità di riassorbimento dell'endolinfa stessa.

Oltre alle strutture nervose recettrici perimaculari si trovano, nel resto della parete dell'utricolo ed in seno allo strato connettivale esterno o membrana propria della parete stessa, anche *gomitoli terminali isolati* che ricordano i corpuscoli a gomito di Krause-Dogiel, con la differenza però che i primi non sono provvisti di evidente capsula connettivale.

Tali grovigli espansionali singoli, più o meno complessi, risultano formati da due o tre fibre midollate di grosso calibro, fornite fino al tratto preespansionale di grossa guaina mielinica; non mi è stato possibile precisare ancora l'esatta provenienza di tali fibre. Queste, dopo aver perduta la loro guaina mielinica mantengono un calibro piuttosto rilevante sebbene molto irregolare: subiscono infatti, a brevi intervalli, ingrossamenti ed assottigliamenti ed in alcuni punti acquistano un aspetto nastriforme; si intrecciano fra loro e si ramificano avvolgendosi su loro stesse a gomito. A questi gomitoli giungono anche fibre più sottili, alcune apparentemente amieliniche, le cui ramificazioni, intrecciandosi con le volute e con i rami di divisione delle fibre di calibro maggiore rendono il groviglio espansionale terminale ancora più complicato.

È difficile dire se questi recettori isolati a gomito, più o meno complessi, siano destinati alla sensibilità dolorifica o alla regolazione delle variazioni della

pressione endolinfatica. Data la grande assonnigianza che essi presentano con i gomitoli espansionali da me descritti nel nodo seno atriale del cuore, propenderei più per la seconda ipotesi.

2. DATI RELATIVI ALLE CRESTE AMPELLARI DEI CANALI SEMICIRCOLARI. — Si sa che i fascetti nervosi nei quali si risolve il nervo ampollare formano nello strato più esterno fibroso della membrana propria delle creste acustiche un primo plesso esterno dal quale originano fibre che formano, nel restante ambito della membrana propria a struttura fibrillare, un secondo plesso assai fitto. Da quest'ultimo deriva un terzo plesso disposto nello strato epiteliale.

I miei preparati per distensione hanno dimostrato che in seno al secondo plesso sopra ricordato si trovano particolari strutture nervose mai finora descritte.

In alcuni punti della zona indicata, alcune grosse fibre con i loro rami di divisione si avvolgono su loro stesse e si allacciano fra loro con disposizione ad ansa o a spirale. Risultano così in detti punti caratteristici grovigli nervosi non però individualizzati in formazioni separate, nè circoscritti da guaine o capsule connettivali.

Si ha l'impressione che tali grovigli dipendano da fibre che mantenendosi nell'ambito del connettivo fibrillare della membrana propria, siano indipendenti da quelle destinate al neuroepitelio della cresta acustica.

Credo perciò verosimile che detti grovigli nervosi non siano legati all'innervazione dell'epitelio sensoriale sovrastante, ma possano anche rappresentare una sorgente di informazione del grado di trazione che si esercita sulla parete ampollare o in rapporto alla funzione specifica dell'organo stesso (apprezzamento del movimento del capo nello spazio: accelerazione), o in rapporto al processo di formazione e di riassorbimento della endolinfa.

3. DATI RELATIVI AL CONDOTTO COCLEARE. — I miei preparati all'argento hanno rilevato i seguenti fatti nuovi:

a) I fascetti nervosi obliqui e quelli elico-spirali situati a livello dell'elicotrema formano in corrispondenza del margine esterno della lamina connettivale densa che fa seguito all'*hamulus*, un intricato plesso — plesso marginale — nel quale molte fibre midollate si risolvono in sottili rami amielinici, che sembrano terminare in corrispondenza del margine stesso, intrecciandosi in modo inestricabile con i rami di divisione di altre fibre vicine e lontane. (Questo fatto si verifica per tutta l'estensione del margine libero della lamina spirale ossea).

Da tale plesso marginale si distaccano a distanze regolari e piuttosto ravvicinate in confronto alle altre regioni, gruppetti di fibre amieliniche di vario calibro destinate alle cellule acustiche.

b) Le fibre nervose che attraversano la galleria formata dalle due serie, interna ed esterna, dei pilastri del Corti presentano dei caratteristici allargamenti di forma ovalare, triangolare ecc. a fine struttura neurofibrillare; trattasi di ingrossamenti reticolari delle fibre che, se possono simulare cellule nervose di tipo interstiziale del Cajal, non sono però da ritenersi come tali.

c) Le fibre nervose che raggiungono la punta estrema del giro della cupola, nell'abbandonare la lamina connettivale densa nella quale decorrono, mostrano un comportamento assai diverso da quello che le fibre radiali e spirali di solito hanno negli altri giri. Esse cioè non formano un plesso marginale, ma si ripiegano su loro stesse verso l'indietro descrivendo anse più o meno acute e ravvicinate.

Nel formare tali anse si intrecciano fra loro e si suddividono in rami più sottili sinuosi e provvisti di varicosità. Ne deriva così un caratteristico apparato nervoso apicale di forma irregolarmente triangolare mai finora descritto. Da tale apparato nervoso origina un numero vario di rami che si spingono, i più prossimali verso le ultime cellule sensoriali dell'organo del Corti; i più apicali verso l'epitelio indifferenziato che riveste l'estremità a fondo cieco del condotto cocleare. Alcune fibre giungono anche nella punta estrema della lamina spirale connettivale.

È probabile che non tutte le fibre del fascetto apicale che formano detto apparato nervoso abbiano il loro centro di origine nel ganglio spirale del Corti, ma in altro ganglio sensitivo.

Credo inoltre probabile che l'apparato nervoso ora descritto che ha così intimi rapporti sia con l'estremità terminale dell'organo del Corti, sia con l'estremità a fondo cieco del condotto cocleare e con la circostante lamina basilare, abbia il significato di un regolatore riflessogeno della pressione della perilinfa nelle due scale: timpanica e vestibolare, e della endolinfa contenuta nel condotto cocleare. Non è d'altra parte escluso che esso sia in rapporto con la recezione di vibrazioni abnormi provocate dai rumori grossolani e che tale recezione possa provocare, sempre per via riflessa, la contrazione del m. stapedio: regolazione protettiva.

Solo l'esperimento fisiologico, la patologia e la clinica potranno illuminarci su questo punto.

4. DATI RELATIVI ALL'INNERVAZIONE SIMPATICA DEL LABIRINTO MEMBRANOSO:

a) Nella zona primaculare si trovano numerosissime sottili fibre amieliniche, indipendenti da quelle nevrassiali, che in parte circondano a spirale o accompagnano i vasi sanguigni; vasi che, come è noto, in tale zona sono particolarmente numerosi ed in intima connessione con gli elementi epiteliali a funzione probabilmente secernente. Queste sottili fibre perivasali di natura sicuramente autonoma appaiono in diretta connessione con fibre di eguale aspetto che nell'ambito della macula dell'otricolo compongono una delicata rete nervosa diffusa assieme alle più fini diramazioni delle fibre nevrassiali.

b) In corrispondenza del legamento spirale, specialmente a livello della stria vascolare, esiste nell'uomo un plesso nervoso amielinico fittissimo che si estende come una ragnatela su tutto l'ambito della regione.

c) In corrispondenza del condotto uditivo interno, nel ratto, avviene un sicuro passaggio di fibre amieliniche dai plessi perivasali al ganglio vestibolare dello Scarpa.

Biochimica. — *Contributo alla conoscenza dei rapporti tra asfissia e tumori* (*). Nota di DOMENICO GIGANTE e SERGIO CERQUIGLINI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

G. Amantea⁽¹⁾, studiando gli effetti di lente e ripetute asfissie in ambiente confinato, ha osservato nel ratto albino un graduale fenomeno di adattamento, che porta ad una resistenza all'asfissia per tempi sempre maggiori, fino, in alcuni casi, al raddoppiamento del tempo di resistenza iniziale. Warburg⁽²⁾, indagando gli effetti dell'asfissia sulle cellule tumorali in ratti albini portatori di tumori ed esposti, per 40 ore consecutive, ad atmosfere contenenti il 5 % di ossigeno, constatò, eseguendo misurazioni in vitro del metabolismo del tessuto neoplastico, che la maggior parte delle cellule tumorali andavano incontro a morte.

Con le presenti ricerche abbiamo studiato il comportamento del topo bianco, in condizioni normali e in diverse condizioni patologiche sperimentali, rispetto alla lenta e ripetuta asfissia in ambiente confinato. Abbiamo indagato, inoltre, l'influenza di tale trattamento sull'insorgenza e sullo sviluppo di tumori da benzo-pirene e sull'andamento di quelli spontanei, ed infine l'intensità respiratoria di tessuto neoplastico ed epatico di animali così trattati.

TECNICA SPERIMENTALE. — Abbiamo sperimentato su 67 topi bianchi adulti, di ambo i sessi, del peso di 20-25 g, mantenuti nelle stesse condizioni generali di vita. Le prove di asfissia sono state eseguite con la tecnica indicata da Amantea. Al nostro scopo poteva infatti corrispondere solo un metodo che avesse permesso di spingere l'asfissia fino ad un limite di resistenza pressochè massimo, concedendo però la ripresa e la sopravvivenza degli animali impiegati. Abbiamo adoperato dei recipienti di vetro trasparente, della capacità di 500 cc, con tappo smerigliato a chiusura ermetica. Per tutte le prove eseguite su uno stesso animale si impiegò sempre lo stesso recipiente. I topi venivano attentamente seguiti durante le prove di asfissia, che si interrompevano al momento della scomparsa del riflesso di posizione, che si verifica dopo la scomparsa del riflesso corneale e coincide col periodo delle più gravi e minacciose alterazioni del ritmo respiratorio. Gli animali, così asfissati, venivano portati a tale limite di sofferenza e non oltre, giacchè questo è l'estremo compatibile con la sopravvivenza, se riportati a respirare in atmosfera normale. In tal modo solo in pochi casi si dovette ricorrere alla respirazione artificiale per ottenere la ripresa dell'animale.

Il tempo di durata delle singole prove di asfissia venne calcolato dal momento della chiusura del vaso a quello della riapertura. Le prove di asfissia furono eseguite con ritmo quotidiano, o a giorni alterni quando l'animale era molto sofferente.

(*) Lavoro eseguito nei Laboratori scientifici dell'Istituto «Regina Elena» e nell'Istituto di Chimica Biologica della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) G. AMANTEA, «R. Acc. Naz. Lincei», XX, 5-6, 220 (1934).

(2) O. WARBURG, *Ueber den Stoffwechsel der Tumoren*, Springer, 1926.

Per la cancerizzazione sperimentale abbiamo iniettato, nella regione ascellare destra, una sola volta, 3 mg di benzopirene (Roche), in soluzione all'1% in olio di sesamo. Gli animali venivano, quindi, costantemente seguiti fino a sorprendere nello stadio più precoce la comparsa del tumore. Per la valutazione dell'accrescimento dei tumori abbiamo adottato il metodo proposto da Schrek⁽³⁾ nella modificazione di Dobrovolskaia-Zavadskaia e coll.^{(4) (5)}. Con questo metodo si rapporta in funzione del tempo la variazione del diametro medio della base del tumore: a tal fine il neoplasma viene misurato, *in situ*, 1 o 2 volte alla settimana in due direzioni (A e B) atte a fornire il valore del diametro medio della base del tumore. Si ottiene così come variabile (d), il diametro medio della base estraendo la radice quadrata del prodotto delle 2 dimensioni ($d = \sqrt{AB}$). Tale valore, assunto a ciascuna misura, è considerato convenzionalmente come il diametro medio della base del tumore a una data determinata, ed è espresso in mm. Rappresentando le variazioni di questo valore in funzione del tempo misurato in giorni si ricava un dato numerico a (mm-giorno), che nell'88% dei casi, ha valore di costante, secondo il fenomeno denominato da Mayneord e Schrek come « accrescimento rettilineo », che bene simbolizza il processo proliferativo del tumore.

Ad ogni animale venne praticato esame autoptico, e i tumori furono esaminati istologicamente. I tumori da benzopirene si rivelarono essere, nella maggioranza dei casi, sarcomi a cellule fusiformi, in altri casi a cellule polimorfe o a cellule rotonde. I tumori spontanei risultarono essere adenocarcinomi della mammella.

Le indagini sulla intensità respiratoria dei tessuti vennero eseguite secondo il metodo manometrico diretto di Warburg, quale è riportato da Deotto⁽⁶⁾, su sezioni sopravvivenenti di tessuto sospese in soluzione di Ringer + fosfati. Dagli animali, uccisi per dissanguamento, con la massima sollecitudine, si prelevarono il fegato e il tumore, da cui si ricavarono, col rasoio, fettine, il più possibile sottili, trasparenti, uniformi e squadrate, avendo cura di scartare, nel caso del materiale neoplastico, le frazioni di aspetto emorragico e necrotico. Nelle vaschette, munite di pozzetto centrale e di appendice laterale, venivano posti nella cavità principale ml 3 di soluzione di Ringer + fosfati (NaCl 0,154 M, p. 100; KCl 0,154 M, p. 2; CaCl₂ 0,11 M, p. 2; soluzione di fosfati monosodico e bisodico 0,109 M, pH 7,4, p. 10) e ml 0,1 di KOH al 10% nel pozzetto centrale (inutilizzate le appendici). Le fettine di tessuto erano del peso variabile da mg 1,3 a mg 7,6, con medie attorno a mg 2,5, calcolato come tessuto essiccato e portato a peso costante in stufa a 105° C. Gas ambiente: O₂. Temperatura del bagno termostatico: + 38° C. Oscillazioni complete dei manometri 60 al minuto, con ampiezza di cm 7. Durata delle esperienze: da 70 a 90 minuti. Letture manometriche: ogni 10 minuti.

(3) R. SCHREK, « Am. J. Canc. », 24, 807 (1935); 28, 345 (1936).

(4) N. DOBROVOLSKAIA-ZAVADSKAIA, « Bull. Ass. Française pour l'étude du Cancer », 33, 192 (1946).

(5) N. DOBROVOLSKAIA-ZAVADSKAIA e I. NEKHOROCHEFF, « C. r. Soc. Biologie », 130, 693 (1939).

(6) R. DEOTTO, *Metodi manometrici in Biologia*, Cappelli, 1942.

Abbiamo limitato ad un massimo di 90 minuti la durata di ciascuna misurazione di consumo di O_2 giacchè il tessuto neoplastico mantiene costante la sua intensità respiratoria per almeno 2 ore di osservazione, a differenza dei tessuti normali, i quali piuttosto presto risentono delle artificiali condizioni ambientali create dalla tecnica manometrica (Deotto). Dovendo istituire confronti tra l'intensità respiratoria del tessuto neoplastico e di quello epatico, in base a quanto sopra, ci saremmo trovati nelle condizioni più opportune solo limitando le nostre misurazioni a periodi di osservazione non troppo lunghi.

RISULTATI SPERIMENTALI. — Per brevità i risultati sperimentali sono stati riassunti in tabelle.

TABELLA I.

Animale n.	Resistenza all'asfissia in minuti primi		N. prove asfissia	Tempo di induzione del tumore in giorni	N. giorni decorsi tra inoculazione e morte	Costante a
	iniziale	massima				
1	47	—	6 +	—	—	—
2	44	56	4 +	—	—	—
3	39	59	34	75	114	0,64
4	45	72	35	80	114	0,68
5	44	74	34	99	135	0,51
6	34	52	21 +	—	—	—
7	39	60	25	79	116	0,70
8	41	63	34	78	109	0,51
9	—	—	—	97	119	0,63
10	—	—	—	74	120	0,62
11	—	—	—	71	108	0,60
12	—	—	—	78	115	0,35
13	—	—	—	77	98	0,71
14	—	—	—	86	121	0,79
15	—	—	—	84	116	0,38
16	—	—	—	75	99	0,43

Nella Tabella I sono riportati i dati relativi a 16 topi bianchi. I primi 8 furono sottoposti a prove ripetute, quotidiane, di asfissia in ambiente confinato; di questi, 3 morirono, rispettivamente, dopo la 6^a, la 4^a, e la 21^a prova; 4 furono sottoposti a 34 prove di asfissia, e 1 a 25 prove. I tempi di resistenza all'asfissia

andarono gradualmente aumentando nelle successive prove fino a raggiungere un massimo che coincise, in media, con la 10^a prova. Gli aumenti dei tempi di resistenza, rispetto al tempo iniziale, variarono dal 51 % al 67 % (media 56 %). Resta così dimostrato che il fenomeno osservato da Amantea nel ratto si manifesta in maniera evidente anche nel topo. Insistendo a lungo nelle prove di asfissia abbiamo inoltre confermato che, anche nella specie da noi impiegata, si osserva una parziale perdita di quello che in resistenza era stato guadagnato.

Terminata la serie di asfissie, dopo 5 giorni, abbiamo iniettato il benzopirene. Contemporaneamente, e nelle identiche condizioni, furono iniettati 8 topi normali di uguale peso ed età, destinati a servire di controllo. Non abbiamo notato, come appare dalla Tabella I, sensibili differenze di comportamento rispetto al processo di cancerizzazione tra gli animali pretrattati con prove di asfissia e i controlli. Infatti di eguale durata è risultato il periodo di induzione tumorale, che è stato in media di 82 giorni nel gruppo degli animali asfissati, e di 80 giorni nei controlli. Egualmente espressivi, in tal senso, sono i dati riguardanti la durata della malattia neoplastica (calcolata dal giorno dell'inoculazione dell'idrocarburo a quello della morte): sotto questo riguardo, infatti, per gli animali trattati con l'asfissia si è avuta una durata media di 116 giorni, contro 112 giorni per i controlli. Anche analogo è stato il comportamento dei due gruppi di animali rispetto alla evoluzione del tumore, specie se considerato nella sua velocità di accrescimento, come appare dalla misurazione della costante a , che in media è risultata corrispondere a 0,60 nei topi trattati con asfissia, e a 0,56 nei controlli.

Nella Tabella II sono riportati i dati relativi a 10 topi bianchi sottoposti a ripetute asfissie in ambiente confinato, a cominciare da 5 giorni dopo il trattamento con benzopirene. L'aumento di resistenza all'asfissia fu, in genere, notevolmente minore di quello osservato nei topi in condizioni normali. Infatti l'aumento percentuale di resistenza è stato in media del 30,5 %, contro il 56 %, osservato in quelli del primo lotto. Anche in questi animali, analogamente ai precedenti, è stato osservato, dopo aver molto insistito nel numero delle prove, il fenomeno della parziale perdita di quello che in resistenza era stato guadagnato; però il tempo di resistenza è rimasto sempre superiore a quello iniziale. Degno di rilievo ci sembra il fatto che i topi di recente trattati con benzopirene, già molto prima della comparsa del tumore, e quindi nel periodo di induzione della malattia neoplastica sperimentale, vanno incontro a uno stato generale di sofferenza e a modificazioni organiche che il diverso comportamento rispetto alle prove di asfissia riesce ad evidenziare.

Il decorso del processo di cancerizzazione in questi animali è stato, invece, analogo a quello di 10 topi controllo, ugualmente e contemporaneamente trattati con benzopirene (animali dal n. 11 a n. 20 della Tabella II). Infatti il periodo di induzione è stato per ambedue i lotti, di uguale durata e il tumore comparve in media all'82° giorno nei topi trattati con asfissia e all'86° giorno nei controlli. Anche la durata di malattia fu pressochè uguale: la morte sopravvenne, in media, al 113° giorno dall'inoculazione nei topi asfissati e al 115° giorno nei controlli. La costante a fu pure di pari valore: 0,50, in media, nei topi asfissati, e 0,51 nei controlli.

TABELLA II.

Animale n.	Resistenza all'asfissia in minuti primi		N. prove di asfissia	Tempo di induzione del tumore in giorni	N. giorni decorso tra l'inoculazione e la morte	Costante <i>a</i>
	iniziale	massima				
1	57	70	20	96	130	0,45
2	55	67	20	83	115	0,40
3	59	73	12 +	—	—	—
4	40	51	19	76	98	0,35
5	53	72	16 +	—	—	—
6	60	72	20	81	101	0,28
7	33	56	20	74	114	0,78
8	46	70	20	98	135	0,64
9	59	70	20	89	130	0,43
10	46	57	20	59	89	0,70
11	—	—	—	79	119	0,78
12	—	—	—	78	109	0,77
13	—	—	—	98	129	0,64
14	—	—	—	69	88	0,67
15	—	—	—	108	134	0,57
16	—	—	—	85	107	0,70
17	—	—	—	100	131	0,30
18	—	—	—	99	123	0,34
19	—	—	—	79	109	0,70
20	—	—	—	73	101	0,22

Nella Tabella III sono riportati i dati relativi a 7 topi sottoposti ad asfissia quando il tumore da benzopirene si era già reso manifesto. In questi animali il comportamento, rispetto alle prove di asfissia, è stato nettamente diverso da quello dei precedenti. Innanzi tutto l'aumento di resistenza, dopo le successive prove, è stato appena accennato in 4 topi, di modica entità in 2 e solo in 1 di entità paragonabile a quella dei normali.

Inoltre, come appare nella tabella (col. 4^a), i topi, alla fine dell'esperienza, quando prossima era la morte, hanno presentato una netta e più spiccata perdita di resistenza, raggiungendo, in alcuni casi, valori anche di molto più bassi di

quelli iniziali (fino al 30 % ca.). È da rilevare il fatto che tale fenomeno si è reso manifesto già dopo un numero limitato di prove, il che depone, evidentemente, per una minorata efficienza degli animali portatori di tali tumori rispetto all'allenamento e alla resistenza all'asfissia.

TABELLA III.

Animale n.	Resistenza all'asfissia in minuti			N. prove di asfissia	Tempo di induzione del tumore in giorni	N. giorni decorsi dall'inoculazione all'inizio prove di asfissia	N. giorni decorsi tra inoculazione e morte	Costante <i>a</i>
	iniziale	massima	finale					
1	29	30	19	4	66	80	88	0,48
2	18	20	11	4	60	78	89	0,47
3	54	59	50	10	89	100	121	0,65
4	35	56	35	11	95	100	124	0,53
5	50	60	33	18	96	102	131	0,62
6	45	55	50	8	84	100	114	0,57
7	46	53	29	14	99	112	133	0,56
8	—	—	—	—	83	—	110	0,61
9	—	—	—	—	81	—	112	0,60
10	—	—	—	—	84	—	118	0,49
11	—	—	—	—	90	—	120	0,40
12	—	—	—	—	74	—	104	0,71
13	—	—	—	—	85	—	121	0,47
14	—	—	—	—	93	—	128	0,58

Anche con questo procedimento sperimentale non ci è stato possibile apprezzare, rispetto ai controlli, differenze di comportamento, relative al decorso del processo tumorale. Infatti la durata della malattia neoplastica è stata di eguale entità: in media i topi asfissati sono morti dopo 114 giorni dall'inoculazione e i controlli (topi dal n. 8 al n. 14 della tabella III) dopo 116 giorni. Anche per la costante *a* si sono avuti analoghi valori; in media 0,55 nei due gruppi.

Abbiamo avuto anche occasione di osservare 3 topi bianchi, appartenenti allo stesso stipe, di sesso femminile, che presentarono spontaneamente, in età adulta, adenocarcinomi della mammella. Il comportamento di questi animali che sottoponemmo, con analoga tecnica, a prove di ripetuta asfissia è risultato analogo a quello dei topi portatori dei tumori da benzopirene. Difatti, anche per essi, modesto è stato l'aumento del tempo di resistenza nel corso delle successive prove: 11 minuti in un topo e 3 e 5 minuti, rispettivamente, negli altri due.

Marcata, invece, è stata la caduta del tempo di resistenza presentata alla fine delle prove: rispettivamente di 5, di 13 e di 14 minuti rispetto al tempo di resistenza iniziale. L'accrescimento tumorale, valutato a mezzo della costante a , non risultò influenzato dal trattamento subito. Il valore di questa costante è stato in media di 0,37; perciò più bassa di quella misurata nei topi portatori di sarcomi da benzopirene. Questo rilievo coincide con le osservazioni di Dobrovolskaia-Zavad-skaia e Nekhorocheff⁽¹⁾ che, appunto, trovarono per gli adenocarcinomi mammari del topo valori della costante a oscillanti tra 0,1 e 0,45 e, invece, per i sarconi da benzoantracene valori oscillanti tra 0,24 e 0,77.

Nella Tabella IV sono riportati i dati relativi all'attività respiratoria di sezioni di tessuto neoplastico ed epatico, studiata con la tecnica manometrica di Warburg. Abbiamo scelto il fegato, come tessuto di confronto, sia per l'importanza funzionale di questo organo, sia perchè è noto che la sua intensità respiratoria si ravvicina a quella dei tessuti neoplastici (Warburg)⁽²⁾.

TABELLA IV.

Animale n.	N. prove di asfissia	Base tumore in mm	Durata misurazione in minuti	Sarcoma		Fegato	
				Q _{O₂}	Peso secco mg	Q _{O₂}	Peso secco mg
1	11	26 × 18	70	5,23	7,6	5,59	5,9
2	12	25 × 15	70	6,15	2,5	7,74	2,8
3	8	20 × 16	90	12,73	2,0	7,23	2,2
4	10	21 × 15	70	5,94	2,8	7,84	2,2
5	11	25 × 19	90	6,50	1,9	7,06	2,5
6	15	26 × 20	90	7,78	3,2	8,29	2,1
7	8	21 × 19	90	9,39	2,4	9,63	2,0
8	—	18 × 16	90	7,39	5,0	8,70	2,1
9	—	220 × 20	90	10,49	2,4	22,85	1,3
10	—	20 × 16	70	16,05	2,0	8,80	2,3
11	—	15 × 10	70	13,89	2,3	11,86	2,8
12	—	29 × 24	90	16,46	2,3	8,20	2,1
13	—	22 × 16	70	11,28	2,6	13,78	2,2
14	—	25 × 20	90	8,03	2,0	11,66	3,2
15	—						

Per tali prove abbiamo sperimentato su 14 topi bianchi portatori di sarcoma da benzopirene: 7 di essi vennero sottoposti a ripetute asfissie in ambiente con-

finato, e 7 lasciati come controlli. Decorso un intervallo di tempo pressochè uguale dal giorno della comparsa delle neoplasie, gli animali dell'uno e dell'altro gruppo vennero uccisi per decapitazione: quelli sottoposti a ripetute asfissie furono sacrificati al termine dell'ultima prova di asfissia. Dai dati ottenuti si rileva, anzitutto, che l'intensità respiratoria del sarcoma da benzopirene del topo è dello stesso ordine di grandezza di quella del tessuto epatico, e ciò concorda con quanto osservato nel ratto, da Warburg per il tumore di Flexner, e da Deotto⁽⁷⁾ per il sarcoma da benzopirene. Tale consumo di ossigeno però risulta nettamente minore a livello dei tessuti sarcomatoso ed epatico nei topi sottoposti a ripetute asfissie. Infatti nel tessuto neoplastico, proveniente da questi animali, abbiamo misurato un consumo di ossigeno che, espresso dal quoziente $\text{mm}^3 \text{O}_2/\text{mg} \cdot \text{ore}$, è tra $-5,23$ e $-12,73$, con un valore medio di $-7,67$; e nel tessuto epatico valori variabili da $-5,59$ a $-9,63$, in media di $-7,58$. Nei controlli non sottoposti ad asfissia invece questi valori sono stati maggiori: per il tessuto sarcomatoso varianti tra $-7,39$ e $-16,46$, con una media di $-11,94$, e per il tessuto epatico varianti tra $-8,20$ e $-22,85$, con una media di $-12,26$.

In conclusione dalle nostre ricerche si può desumere che i topi bianchi normali sottoposti a ripetute prove di lenta asfissia in ambiente confinato sono capaci di fenomeni di adattamento, presentando un progressivo e marcato aumento del tempo di resistenza all'asfissia, mentre i topi sottoposti ad asfissia dopo iniezione di benzopirene mostrano una capacità di adattamento nettamente minore, evidente già durante il periodo di induzione della malattia neoplastica e ancor più manifesta dopo l'insorgenza del tumore. Analogo è stato il comportamento di topi con adenocarcinoma spontaneo della mammella. D'altra parte, invece, non abbiamo potuto sorprendere alcuna influenza da parte delle ripetute asfissie sull'andamento della malattia neoplastica sperimentale, per quel che riguarda sia l'epoca di insorgenza, sia la velocità di accrescimento dei sarcomi da benzopirene nel topo bianco. L'intensità respiratoria di frammenti di tessuti neoplastico ed epatico, prelevati da topi sottoposti a numerose prove di asfissia in ambiente confinato, e sacrificati al termine di una di tali prove, si è rivelata nettamente inferiore a quella dei controlli.

Fisiologia. — *Intensità dei processi combustivi e quoziente respiratorio di ratti parzialmente epatectomizzati e splenectomizzati.* Nota di SANDRO PONTREMOLI e TULLIO MONTINI, presentata (*) dal Socio U. LOMBROSO.

Uno dei fenomeni più interessanti che accompagnano la rigenerazione del tessuto epatico dopo parziale epatectomia è quello di un notevole accumulo di grasso nel fegato « rigenerante » nei primi giorni dopo l'intervento (S. Ludewig, G. R. Minor and J. C. Honterstine⁽¹⁾, Bogetti and P. Mazzocco⁽²⁾,

(7) R. DEOTTO, *Tumori*, 27, 1 (1941).

(*) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) S. LUDEWIG, G. R. MINOR, J. C. HONTERSTINE, «Proc. Soc. Exp. Biol. e Med.», 42, 158 (1939).

(2) M. BOGETTI, P. MAZZOCCO, «Rev. Soc. Arg. Biol.», 15, 285 (1939).

D. Berman E. C. Hay Sylvesterm and H. Selye ⁽³⁾, C. Ardy, S. Pontremoli, L. Arrigo ⁽⁴⁾).

Secondo alcuni AA. l'aumento in peso del fegato rimasto nelle primissime ore sarebbe appunto sostenuto da questa deposizione di grasso cui solo secondariamente si sostituirebbero percentualmente i componenti normali (C. M. Szego and S. Roberts ⁽⁵⁾). Questo fenomeno può essere giustificato da una mobilitazione del grasso dalla periferia verso gli organi centrali. Infatti, non altrimenti l'organismo potrebbe disporre di una quantità di grasso così rilevante ed in così breve tempo. Oltre a ciò in precedenti ricerche, è stato osservato che nel ratto epatectomizzato i costituenti lipidici del sangue aumentano rapidamente nelle prime ore dopo l'intervento (A. Chanutin and E. C. Gjessing ⁽⁶⁾), e parallelamente è stato da noi osservato che anche negli organi splancnici notevole è l'aumento del grasso (L. Arrigo, S. Pontremoli ⁽⁷⁾).

Come nel sangue anche in questi tessuti le modificazioni accennate riflettono e come periodo di insorgenza e come durata quanto osservato nel fegato. Un meccanismo quindi di mobilitazione avvalorato anche dal fatto che l'accumulo di grasso rappresenterebbe la prima reazione del tessuto epatico a diversi tipi di lesione, epatectomia inclusa (H. G. Wells ⁽⁸⁾ A. H. Ennor ⁽⁹⁾ C. M. Szego and S. Roberts ⁽⁵⁾).

Ricerche condotte nel nostro laboratorio hanno d'altra parte evidenziato attraverso lo studio del metabolismo gassoso di ratti parzialmente epatectomizzati un Q. R. che nei primi due giorni dimostra valori superiori all'unità (C. Ardy, S. Caponnetto ⁽¹⁰⁾).

La costanza dei risultati ottenuti e attestanti una trasformazione degli idrati di carbonio in grassi, faceva sospettare la possibilità di un concorso diretto dell'organismo a livello epatico nel fabbricare grasso a spese del glicogeno che appunto in questo periodo si dimostrava del tutto scomparso. I valori del Q. R. così elevato si normalizzavano in terza giornata per stabilizzarsi definitivamente sulle cifre ottenute nei ratti normali di controllo (vedi tabella 1).

Questi risultati, senza escludere che al fenomeno della deposizione di grasso nel fegato rigenerante partecipi anche un processo di trasformazione di sostanze più ossigenate in meno ossigenate, certo rivelano che il dispendio energetico di questi animali poggia prevalentemente sugli idrati di carbonio ben lontano dai valori attestanti una combustione di grasso. Combustione in questo caso forse possibile potenzialmente ma non armonica da un punto di vista funzionale, se consideriamo le affermazioni di alcuni AA. americani i quali prospettano l'ipotesi che il grasso accumulato nel fegato, nelle prime 24 ore dopo l'intervento potrebbe fornire l'energia necessaria per il successivo accrescimento e ripristino della sua normale struttura (C. M. Szego and S. Roberts ⁽⁵⁾).

(3) D. BERMAN, E. C. HAY SYLVESTERM, H. SELYE, «Endocrinology», 41, 258 (1947).

(4) C. ARDY, S. PONTREMOLI, L. ARRIGO, «Pathologica», in corso di stampa.

(5) C. M. SZEGO, S. ROBERTS, «J. Biol. Chem.», 178, 827 (1949).

(6) A. CHANUTIN, E. C. GJESSING, «J. Biol. Chem.», 178, 1 (1949).

(7) L. ARRIGO, S. PONTREMOLI, «Boll. Soc. Biol. Sper.», in corso di stampa.

(8) H. G. WELLS, «J. A. M. A.», 114, 2177 (1940).

(9) A. H. ENNOR, «Australian J. Exp. Biol. e Med. Sc.», 20, 73 (1942).

(10) C. ARDY, S. CAPONNETTO, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.» in corso di stampa.

TABELLA I.
Metabolismo gassoso di ratti parzialmente epatectomizzati.

Num. ratto	1 ^a GIORNATA			2 ^a GIORNATA			3 ^a GIORNATA			4 ^a GIORNATA			5 ^a GIORNATA		
	O ₂ Kg. h	CO ₂ Kg. h	Q. R.	O ₂ Kg. h	CO ₂ Kg. h	Q. R.	O ₂ Kg. h	CO ₂ Kg. h	Q. R.	O ₂ Kg. h	CO ₂ Kg. h	Q. R.	O ₂ Kg. h	CO ₂ Kg. h	Q. R.
1	1,20	1,24	1,03	1,31	1,48	1,13	1,19	0,95	0,80	1,30	1,07	0,82	1,38	1,24	0,90
2	1,54	1,72	1,12	1,43	1,58	1,11	1,49	1,71	1,15	1,68	1,75	1,04			
3	1,28	1,38	1,08	1,10	1,29	1,17	1,55	1,64	0,94	1,33	1,25	0,94			
4	1,67	1,87	1,12	1,77	1,88	1,06	1,80	1,58	0,88	1,59	1,45	0,91			
5	1,50	1,57	1,05	1,40	1,46	1,04	1,48	1,23	0,83	1,34	1,04	0,78			
6	1,27	1,38	1,09	1,39	1,35	0,97	1,53	1,24	0,81						
7	1,70	1,80	1,06	1,65	1,80	1,09	1,75	1,38	0,79	1,54	1,32	0,86			
8	1,59	1,76	1,11	1,78	2,22	1,25	1,60	1,42	0,89	1,62	1,36	0,84	1,76	1,53	0,87
9	1,34	1,42	1,06	1,44	1,58	1,10	1,30	1,14	0,88	1,45	1,29	0,89			
medie	1,45	1,57	1,08	1,36	1,62	1,10	1,52	1,36	0,88	1,48	1,31	0,88	1,56	1,38	0,88

Dal complesso di queste brevi considerazioni appare che la operazione di epatectomia sub-totale costituisce una tecnica di infiltrazione grassa del fegato per mobilitazione «grassi di deposito/organici centrali» senza che in un primo tempo l'organismo intervenga a bruciare i grassi così mobilitati. Tecnica quindi che può essere impiegata per lo studio di determinate condizioni sperimentali in diretto rapporto al meccanismo di infiltrazione grassa epatica. In particolare l'osservazione di S. Katsuyama⁽¹¹⁾ e di L. M. Golber⁽¹²⁾ secondo cui la steatosi epatica da fosforo sarebbe inibita dalla splenectomia, ci ha suggerito, in precedenti ricerche, di indagare eventuali modificazioni percentuali del grasso epatico nei primi giorni dopo l'intervento in animali parzialmente epatectomizzati e splenectomizzati. I risultati ottenuti ci hanno dimostrato una diminuzione del contenuto in acidi grassi nel fegato rigenerante, nel polmone e nel rene, rispetto ai valori ottenuti negli animali solo epatectomizzati, mentre la rigenerazione del tessuto epatico si è dimostrata uguale o leggermente superiore (S. Pontremoli L. Arrigo⁽¹³⁾).

Questa diminuzione di grasso assai marcata specie in 4^a giornata appare nella fig. 1 dove le curve sono state dedotte dall'aumento percentuale degli acidi grassi epatici rispetto ai valori ottenuti sul fegato al momento dell'intervento.

Questi risultati ci hanno indotto a controllare se in questi animali splenectomizzati ed epatectomizzati che si comportavano in modo così diverso dai ratti solo epatectomizzati per quanto riguardava la percentuale di grasso ritrovato nel fegato e negli altri organi, anche il Q. R. rivelasse modificazioni particolari.

Ricordiamo brevemente le osservazioni di alcuni AA. sulle modificazioni indotte dalla splenectomia sul metabolismo grassoso.

Così Asher⁽¹⁴⁾ riscontrò un aumento del ricambio respiratorio nei ratti splenectomizzati e non nei cani. Peracchia⁽¹⁵⁾ nei cani splenectomizzati giovani osservò un aumento del metabolismo basale del 20-25% mentre in altri cani splenectomizzati adulti l'aumento era del 12-16%. Danoff⁽¹⁶⁾ notò che il consumo di O₂ e la CO₂ liberata erano notevolmente aumentati nei ratti aspleni mentre il Q. R. non modificava i suoi valori. L'A. avanzava l'ipotesi che la milza esercitasse una

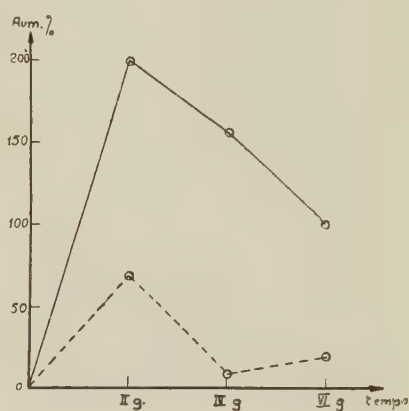


Fig. 1.

— Aumento % ac. grassi di ratti parzialmente epatectomizzati.
 --- Aumento % ac. grassi di ratti parzialmente epatectomizzati e splenectomizzati.

(11) S. KATSUYAMA, «Okajama Igakkai Zasshi», 51, 1658 (1939) e 52. 65 e 430 (1939).

(12) L. M. GOLBER, «Exp. Med.», 2, 28 (1940).

(13) S. PONTREMOLI, L. ARRIGO, «Boll. Soc. It. Biol. Sperim.» in corso di stampa.

(14) L. ASHER, citato da G. VERCELLANA, *La fisiologia della Milza*, ed. I. S. M. 1940.

(15) S. C. PERACCHIA, «Arch. It. Biologia», 76, 88 (1926).

(16) N. DANOFF, «Bioch. Zft» 93, 44 (1919).

azione inibitrice sul ricambio gassoso. K. Saito, S. Katsura⁽¹⁷⁾ studiando le oscillazioni del consumo di O_2 dopo irradiazione della milza notarono un aumento dei processi ossidativi in seguito a forti irradiazioni. C. Richet⁽¹⁸⁾ C. Koda⁽¹⁹⁾ E. Ripstein⁽²⁰⁾ Stoltz⁽²¹⁾ sono anch'essi concordi nell'affermare che il consumo di O_2 e la produzione di CO_2 aumentano negli animali splenectomizzati.

RICERCHE PERSONALI. - Ratti maschi, adulti, del peso variante fra i 150-180 gr. vennero operati di parziale epatectomia con asportazione di circa il 65% dell'organo secondo la tecnica di Crandall e Drabkin⁽²²⁾ e splenectomizzati, con un intervento reso assai semplice nel ratto per la facilità con la quale si isola in questo animale il peduncolo vascolare dell'organo.

Dopo 10 ore dall'intervento quando gli animali avevano riacquisito l'abituale vivacità e non erano sotto questo punto distinguibili dai ratti normali vennero alimentati con una dieta mista ordinaria, quindi tenuti nuovamente a digiuno per 10 ore. Sui ratti così preparati determinammo il ricambio respiratorio dopo 24 h dall'intervento; nuove determinazioni vennero quindi eseguite ogni 24 h dalla prima previo digiuno di 10 h fino alla 5ª giornata compresa.

La tecnica di determinazione del ricambio respiratorio fu quella proposta da U. Lombroso⁽²³⁾ in apparecchio a circuito d'aria chiuso; durante l'esperimento gli animali si trovavano a temperatura di 25° C. Il ricambio gassoso venne seguito per ciascuna volta per un periodo di tempo di 3 h.

Riportiamo nella tabella II i dati ottenuti limitandoci a segnalare la produzione di CO_2 , il consumo di O_2 per chilogrammo-ora ed il Q. R.

In questa tabella abbiamo accluso anche la media di questi stessi valori ottenuta su ratti normali non epatectomizzati nè smilzati.

CONCLUSIONI. - Dalle presenti ricerche, per quanto riguarda il metabolismo gassoso di animali smilzati ed epatectomizzati in confronto a quelli solo epatectomizzati, emerge che:

1° la intensità degli scambi respiratori aumenta notevolmente ed in modo particolare in 3ª giornata raggiungendo in questo periodo valori superiori del 61% (vedi fig. 2).

2° nei nostri animali sia in prima che in seconda giornata (cioè nel periodo di tempo nel quale costantemente si era osservato un Q. R. elevatissimo, uguale o superiore all'unità) il quoziente respiratorio è nettamente inferiore e cioè pressochè corrispondente a quello che i ratti normali non epatectomizzati nè smilzati avevano dimostrato (vedi fig. 3).

(17) K. SAITO, S. KATSURA, «Tohoku J. of Exp. Med.», 18, 207 (1931).

(18) CH. RICHEL, «Journ. de Physiol. et de Path. Gen.», 14, 689 bis, 703 (1912) e 15, 579 (1913).

(19) C. KODA, «Bioch. Ztsft», 122, H. 1-4, 154 (1923).

(20) E. RIPSTEIN, «Bioch. Ztsft», vol. 80.

(21) STOLTZ, citato da Vercellana (loc. cit.).

(22) M. V. CRANDALL, D. L. DRABKIN, «J. Biol. Chem.», 166, 653 (1946).

(23) U. LOMBRISO, «Arch. Int. de Pharmac. et de Ther.», 42, 400 (1932).

TABELLA II.

*Ratti parzialmente epatectomizzati e splenectomizzati.**Ratti normali.*

Num. ratto	O ₂ Kg. h	CO ₂ Kg. h	Q. R.	Num. ratto	1 ^a GIORNATA			2 ^a GIORNATA			3 ^a GIORNATA			4 ^a GIORNATA			5 ^a GIORNATA		
					O ₂ Kg. h	CO ₂ Kg. h	Q. R.	O ₂ Kg. h	CO ₂ Kg. h	Q. R.	O ₂ Kg. h	CO ₂ Kg. h	Q. R.	O ₂ Kg. h	CO ₂ Kg. h	Q. R.	O ₂ Kg. h	CO ₂ Kg. h	Q. R.
				1	2,10	1,73	0,82	2,35	1,76	0,75	1,80	1,59	0,88	2,05	1,73	0,84	1,62	1,46	0,90
				2	1,97	1,56	0,79	2,01	1,63	0,81	1,80	1,40	0,77	1,39	1,18	0,85	1,42	1,23	0,87
				3	1,82	2,25	0,81	2,20	1,72	0,78	2,31	1,75	0,76	1,94	1,70	0,87	1,80	1,53	0,85
				4	1,92	1,34	0,70	1,98	1,42	0,72	2,05	1,57	0,78	1,85	1,60	0,86	1,73	1,54	0,89
				5	2,21	1,96	0,89	2,42	1,72	0,71	2,68	2,13	0,79	2,87	2,59	0,87	2,10	1,83	0,87
				6	2,04	1,71	0,83	1,95	1,61	0,82	2,88	2,12	0,73	2,14	1,92	0,89	1,92	1,76	0,97
				7	1,90	1,58	0,82	2,57	1,91	0,74	3,10	2,48	0,80	2,48	2,08	0,84	1,84	1,63	0,88
				8	2,41	1,82	0,77	1,93	1,52	0,79	2,91	2,39	0,82	1,72	1,42	0,82	1,60	1,35	0,84
				9	2,08	1,50	0,71	2,11	1,81	0,87	2,50	2,16	0,86	1,68	1,48	0,88	1,71	1,48	0,86
<i>medie</i>	1,40	1,21	0,86	<i>medie</i>	2,09	1,71	0,79	2,17	1,68	0,77	2,45	1,95	0,79	2,01	1,73	0,86	1,75	1,53	0,88

medie ratti n° 10.

L'analisi di questi risultati ci dimostra che il comportamento degli animali smilzati è notevolmente differente da quelli parzialmente epatectomizzati. Noi anzi tutto confermiamo quegli Autori che avevano avvertito un aumento dei processi ossidativi dopo estirpazione della milza.

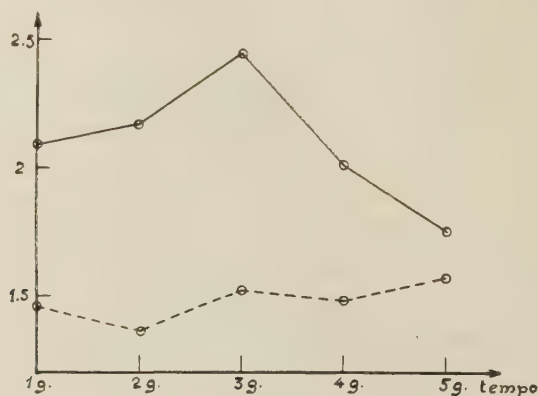


Fig. 2.

— O₂ Kg. h. Ratti epatectomizzati e smilzati.
 - - - " " " " " "

Naturalmente limitiamo questa conclusione ai primi giorni non essendo stato per noi d'interesse seguire il fenomeno più lungamente.

In base a tali risultati, associati al fatto che l'infiltrazione grassa del fegato riscontrata in tutti gli altri animali epatectomizzati e non splenectomizzati è in

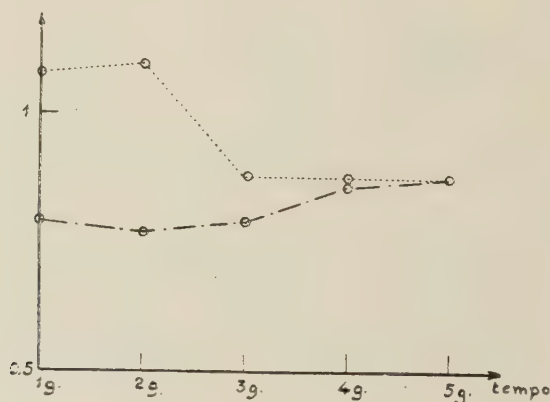


Fig. 3.

— Q (R) Ratti epatectomizzati e smilzati.
 " " " " " "

questi casi notevolmente più bassa (quasi assente in 4^a giornata quando ancora nei controlli raggiunge valori più che doppi del normale) si potrebbe formulare l'ipotesi che questa esaltata combustione faccia convergere anche su grassi i processi ossidativi.

Questa conclusione potrebbe associarsi ad un'antica osservazione di U. Lombroso e S. Manetta ⁽²⁴⁾ confermata da Inlow ⁽²⁵⁾ secondo cui i cani operati di fistola pancreatica permanente alla Pawlow presentano dopo estirpazione della milza un aumento notevole della secrezione pancreatica che si normalizza dopo una ventina di giorni. L'esaltata funzione pancreatica esterna potrebbe secondo il Gley ed il Lombroso essere associata ad un aumento della funzione endocrina che si tende oggi ad estendere oltre che ai glucidi anche ai lipidi. Però questa ipotesi, per quanto legittima, non potrebbe generalizzarsi nel senso che ogni qualvolta nel ratto epatectomizzato si esaltano i processi metabolici gassosi si possa con ciò sfuggire al fenomeno di un alto Q. R. nei primi due o tre giorni. Ricerche che si stanno svolgendo su alcuni fattori lipotropi appaiono associare ad un ipermetabolismo gassoso ed alla scomparsa del grasso del fegato rigenerante un Q. R. pure elevato.

Le conclusioni sin qui esposte si riferiscono ai nove ratti riportati nella tabella, oltre a questi altri tre animali sono stati sperimentati.

Di questi due sono morti spontaneamente in 3^a giornata con manifestazioni nefritiche gravi e con un comportamento, per quanto riguarda il metabolismo basale, simile agli altri animali salvo l'entità delle combustioni notevolmente più basse. Un altro animale (di peso circa 300 gr.) presentò invece un elevato Q. R. che si mantenne tale fino in decima giornata. Di questo non ho riportato i valori ottenuti sulla tabella perchè il suo comportamento è stato unico, non soltanto in rapporto al Metabolismo gassoso degli animali splenectomizzati ed epatectomizzati, ma anche in rapporto ai ratti solo epatectomizzati.

Riassumendo: abbiamo osservato che il Q. R. di ratti splenectomizzati ed epatectomizzati si mantiene nei primi due giorni dopo l'intervento notevolmente più basso in confronto a quello di ratti solo epatectomizzati. L'intensità degli scambi respiratori aumenta notevolmente specie in terza giornata. Questi risultati potrebbero associarsi alla contemporanea riduzione del grasso nel fegato rigenerante riscontrata negli animali splenectomizzati e parzialmente epatectomizzati in confronto a quelli solo parzialmente epatectomizzati.

(24) U. LOMBROSO, S. MANETTA, « Policlinico (Sez. Med.) », 117 (1915).

(25) L. INLOW, « Am. J. of Med. Sc. », 325 (1921).

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta all'Accademia due plichi suggellati consegnati in data odierna alla Cancelleria dal dott. Ovidio Verardi e la Classe, constatata l'integrità dei sigilli, dispone che i plichi stessi siano conservati negli Archivi accademici a disposizione dell'interessato.

Il Presidente comunica quindi che il Socio Rondoni ha inviato una relazione sul contenuto del plico suggellato presentato a suo tempo all'Accademia dal compianto colonnello Carlo Cicognani e aperto, su richiesta della vedova, signora Penca Vencova Cicognani, alla presenza dell'avv. Bruno Cicognani, cugino del defunto, nella seduta ordinaria del 13 maggio 1950.

Il Presidente riassume la relazione del Socio Rondoni e la Classe, ascoltata la relazione stessa, delibera che l'Accademia non debba ulteriormente occuparsi dell'argomento.

Prende poi la parola il Socio Signorini per riferire sul contenuto del plico suggellato presentato a suo tempo dal signor Giuseppe Tupone e aperto, su richiesta dell'interessato, nella seduta ordinaria di Classe del 15 aprile 1950, e la Classe, ascoltata la relazione, delibera che l'Accademia non debba ulteriormente occuparsi dell'argomento.

Il Presidente comunica quindi che data l'assenza dei Soci Giorgi e Amaldi E., incaricati di riferire sul contenuto del plico suggellato, presentato a suo tempo dal Socio Giorgi per conto del prof. Andrès Leviaudi e aperto nella seduta ordinaria di Classe del 13 maggio 1950, su richiesta del predetto professore, la relazione di cui trattasi s'intende rinviata alla prima seduta dopo le ferie accademiche.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Vardabasso offre in omaggio all'Accademia e illustra brevemente i seguenti volumi: « I fossili della Sardegna » di Ida Comaschi Caria, « Bibliografia mineraria della Sardegna » di Carmelo Maxia, « I minerali della Sardegna ed i loro giacimenti » di Edoardo Billows e una pubblicazione della Società Elettricità Sarda dal titolo: « Il gruppo elettrico sardo e gli impianti dell'alto Flumendosa ». Presenta anche due suoi studi pubblicati nelle Memorie dell'Istituto Geologico dell'Università di Padova, dal titolo: « Ricerche geologiche sopra il territorio eruttivo di Predazzo e Monzoni nelle Dolomiti del Trentino » (Atlante petrografico e profili geologici) e « Sguardo alla geologia di Predazzo ».

Il Presidente ringrazia il Collega Vardabasso e presenta quindi due volumi del Tenente Generale del Genio Navale Francesco Viterbo, dal titolo: « Lezioni di meccanica razionale » e « Esercizi di meccanica razionale » (volume II, statica-dinamica) mettendo in evidenza che il generale Viterbo, che fu un antico suo allievo e che ora è Presidente del Comitato Studi, Espe-

rienze e Progetti di Navi e di Armi della Marina, ha accompagnato l'omaggio con una cortese lettera.

Il Segretario Accademico illustra brevemente le pubblicazioni pervenute in omaggio all'Accademia mettendo in particolare evidenza uno studio del Socio A. Russo, dal titolo: « Ulteriori notizie sul potere germinativo del soma nei Metazoi e su le sue manifestazioni in relazione al ciclo biologico di un Ciliato (*Cryptochilum echini* Mps.) ».

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Vardabasso, Cassinis, Picone, Majorana, Bargellini, Wataghin (per mezzo del Collega Perucca) e Sergi.

Il Socio Majorana, dopo aver presentato e brevemente illustrato la sua Nota dal titolo « A proposito di una Nota di O. Garavaldi », che si riferisce al problema dell'attendibilità fisica della teoria speciale di Einstein, ricorda che egli, pur essendo ormai libero dagli impegni della cattedra universitaria, continua sempre le sue ricerche ed esperienze di laboratorio, rese molto difficili dall'assoluta mancanza di mezzi e di collaboratori, e termina esprimendo la speranza di poter informare nel prossimo anno l'Accademia dei risultati delle ricerche alle quali si sta dedicando.

Il Segretario Accademico legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

ASCOLI G., Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità.

BONINO G. B., SCROCCO E. e CHIORBOLI P., Su una riga Raman caratteristica delle aldeidi e dei chetoni (pres. dal Socio G. B. BONINO).

SERGI S., Diagrafo ad uso della cranio-osteografia.

CECCONI J., Su di una equazione differenziale di rilassamento (pres. dal Socio M. PICONE).

MARUSSI A., Sviluppi di Legendre generalizzati per una curva qualunque dello spazio (pres. dal Socio G. CASSINIS).

PREDONZAN A., Intorno alle involuzioni piane $I_n^{2(n-1)}$ (pres. dal Corrisp. B. SEGRE).

ROMEO A., Su alcuni derivati dell'acido para-ammino-salicilico (P. A. S.) (pres. dal Socio G. BARGELLINI).

ROTH L., Su alcune varietà algebriche che contengono un sistema di curve ellittiche (pres. dal Socio G. CASTELNUOVO).

SCROCCO E. e MARMANI G., Sull'impiego del cloruro cromoso per la determinazione del potenziale di ossidoriduzione dei chinoni alogeno sostituiti (pres. dal Socio G. B. BONINO).

VIOLA T., Criteri di compattezza per aggregati d'insiemi elementari d'uno spazio euclideo. Nota I (pres. dal Socio M. PICONE).

TEMI PER DISCUSSIONI

Il Presidente invita i Colleghi a formulare le loro proposte per la determinazione dei temi di discussioni e conferenze per l'anno accademico 1950-51.

Il Socio Armellini, riferendosi alla presentazione di libri sui minerali e sui fossili della Sardegna da parte del Collega Vardabasso e alla breve esposizione che questi ha svolta, propone che l'Accademia tenga un ciclo di conferenze sulle ricchezze minerarie della Sardegna.

Il Presidente concorda nell'opportunità e nell'utilità della proposta ma ricorda le difficoltà che si sono incontrate nell'organizzazione del Convegno sul metano, che ne hanno determinato il rinvio al prossimo anno accademico, nonché la modificazione del tema precedentemente fissato che ora è stato stabilito nel seguente: « Il metano e gli aspetti giuridici delle ricerche minerarie in Italia ». Teme pertanto che anche per l'organizzazione del ciclo di conferenze proposto dal Collega Armellini l'Accademia dovrebbe sostenere, per quanto riguarda la raccolta di dati e di materiali di studio, difficoltà analoghe a quelle incontrate per il convegno sul metano.

Il Socio Crocco aderisce a quanto proposto dal prof. Armellini e chiede al Presidente se l'Accademia potrebbe finanziare delle missioni di studio in Sardegna per rilevare i dati mineralogici e geologici necessari che verrebbero poi comunicati agli industriali, i quali ne potrebbero trarre giovamento anche ai loro fini pratici.

Il Socio M. G. Levi, riferendosi a quanto proposto dal Collega Armellini e a quanto osservato precedentemente dal Presidente in merito al metano, desidera far presente che questa ultima questione è assai complessa perchè, oltre agli aspetti geologico e minerario (aspetti che possono considerarsi ormai conosciuti) presenta anche un lato giuridico, che costituisce nello stesso tempo un problema economico e politico. Per esperienza personale egli dubita che l'Accademia possa riuscire a superare le varie difficoltà connesse con questi ultimi aspetti del problema del metano, anche perchè tali argomenti sono già oggetto di studio da parte di altri organi. Per quanto poi concerne il problema minerario della Sardegna, egli fa notare che tale questione non si riferisce tanto alla parte geologica, quanto a difficoltà di carattere economico e politico. Ritiene pertanto che l'Accademia, trovandosi innanzi un campo nel quale sono predominanti elementi diversi da quelli scientifici, non abbia la possibilità di portare contributi efficaci dal punto di vista della scienza.

Il Socio Dore, essendo stato incaricato insieme al Senatore Gortani in un primo tempo dell'organizzazione del Convegno sul metano e attualmente di quello sugli aspetti giuridici della ricerca mineraria in Italia, affidato, per la parte giuridica, al Socio Redenti, conferma che i problemi che sorgono per l'organizzazione di questo secondo Convegno non sono minori di quelli che hanno impedito la realizzazione del primo e teme pertanto che

a novembre, data prescelta per il Convegno, possa presentarsi ancora il pericolo di doverlo rimandare ulteriormente. Ritiene comunque che sia il caso di attendere per seguire gli sviluppi della situazione.

Il Presidente osserva che i problemi giuridici sulla ricerca mineraria hanno suscitato vivo interesse da parte di alcuni giuristi dell'Accademia e il Socio Giordani, aderendo pienamente a quanto detto dal Presidente, fa notare che gli studi sull'aspetto giuridico della ricerca mineraria abbracciano un campo molto vasto con soluzioni dibattute e discussioni che sono vive non solo in Italia ma anche all'estero e che pertanto l'Accademia dei Lincei potrà degnamente assolvere il compito che si propone studiando il problema da un punto di vista critico.

Dopo una breve discussione, alla quale partecipano il Presidente e i Soci Giordani, Dore e Cambi, la Classe approva come tema di discussione per il prossimo anno quello, già precedentemente stabilito, sul metano e gli aspetti giuridici delle ricerche minerarie in Italia, e, su proposta del Socio Giordani, il seguente nuovo: «Gli antibiotici dal punto di vista chimico, naturalistico, farmacologico». La trattazione di detto tema interesserà pertanto sia i chimici che i biologi e l'organizzazione dei lavori richiederà la collaborazione dei Soci particolarmente competenti in dette discipline.

Il Socio Brunelli, riferendosi al lavoro del compianto suo Maestro, Socio Battista Grassi, dal titolo: «I progressi della biologia e delle sue applicazioni pratiche conseguiti in Italia nell'ultimo cinquantennio», pubblicato nel III volume dell'opera: «Cinquant'anni di Storia italiana», edito a cura dell'Accademia dei Lincei nel 1911, propone che l'Accademia promuova una pubblicazione intesa ad esporre i progressi raggiunti fino ad oggi dalla scienza.

Il Presidente risponde che un simile lavoro sarebbe molto vasto in quanto dovrebbe abbracciare tutte le scienze; si riserva comunque di studiare l'argomento.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che per il prossimo anno accademico è stata stanziata la somma di 3 milioni per sussidiare quelle ricerche, iniziative e studi che saranno proposti dai Soci e approvati dalle Classi. Invita pertanto i Colleghi a voler inoltrare le relative proposte per iscritto alla Presidenza.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 giugno 1950.

- BILLOWS Edoardo. — *I minerali della Sardegna ed i loro giacimenti*. Cagliari, Tip. Musanti, 1941. Pp. 167, in-8°.
- CAPELLO Carlo Felice. — *Il fenomeno carsico in Piemonte. Le zone marginali al rilievo alpino*. Bologna, Mareggiani, 1950. Pp. 90, in-8°. (Consiglio Nazionale delle Ricerche. Centro di Studi per la Geografia fisica, X, 3).
- COMASCHI CARIA Ida — *I fossili della Sardegna*. Cagliari, Tip. Musanti, 1949. Pp. xxvi-410, in-8°.
- MAXIA Carmelo. — *Bibliografia mineraria della Sardegna*. Cagliari, Tip. Musanti, 1941. Pp. 248, in-8°.
- MORETTI Attilio. — Vedi: ORTOLANI Mario e MORETTI Attilio.
- ORTOLANI Mario e MORETTI Attilio. — *Il Gran Sasso d'Italia (Versante Meridionale)*. Bologna, Mareggiani, 1950. Pp. 119, in-8°. (Consiglio Nazionale delle Ricerche, Centro di Studi per la Geografia fisica, X, 2).
- PETRALIA Luigi. — *Contributo alle maggiori conoscenze sulla biologia della tignola delle patate*. Estr. da « Bollettino della Associazione Romana di Entomologia », vol. IV, 1949, nn. 3-4.
- RUSO Achille. — *Ulteriori notizie sul potere germinativo del soma nei Metazoi e su le sue manifestazioni in relazione al ciclo biologico di un Ciliato (Cryptochilum echini Mps.)*. Estr. « Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », ser. VI, vol. VII, 1950.
- SOCIETÀ ELETTRICA SARDA. — *Il gruppo elettrico sardo e gli impianti dell'alto Flumendosa*. Roma, 1949. Pp. 191, in-4° con figg. e tavv.
- VARDABASSO Silvio. — *Ricerche geologiche sopra il territorio eruttivo di Predazzo e Monzoni nelle Dolomiti del Trentino*. Padova, Soc. Coop. Tip., 1931. Atlante di XIV tavv. con spiegazioni e profili geologici, in-4°.
- *Sguardo alla geologia di Predazzo*. Padova, Soc. Coop. Tipogr., 1949. Pp. 15, in-4°, con tavv.
- VITERBO Francesco. — *Esercizi di meccanica razionale*. (Complementi alle lezioni di meccanica razionale di F. Viterbo). Vol. II. Livorno, Accademia Navale, 1950. Pp. xvii-825, in-8°.
- *Lezioni di Meccanica razionale*. 2ª Ed. Livorno, Accademia Navale, 1950, Pp. xv-863, in-8°.

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

- ABETTI G. — Altezza della cromosfera nell'anno 1949 ed andamento del ciclo solare, 432.
- ACCORDI B. — Appunti geologici sul versante sinistro della media Val Camonica, dalla Val Palobbia alla Valle di Fa, 253.
- ALIETTI A. — Osservazioni sulla struttura delle d e l β -asparagine idrate, 49.
- ANDREOTTI A. — Sopra alcune superficie algebriche uniformizzabili, 569.
- ARMELLINI G. — L'espansione dell'Universo nella meccanica classica, 15.

B

- BAFFONI M. — La castrazione parassitaria nei Rizocefali ad opera dei Liriopsidi, 53.
- Fenomeni reattivi e degenerativi delle cellule nervose nei processi di cicatrizzazione del moncone caudale di Sauri, 389.
- BARBATELLI R. — Determinazione del passo del micrometro in A. R. del cerchio meridiano Repsold mediante stelle circumpolari e zenitali, 125.
- Determinazione del passo e degli errori progressivi del micrometro in A. R. del cerchio meridiano Repsold mediante stelle circumpolari e zenitali. Nota II, 332.
- BARBIERI G. A. e MALAGUTI A. — Nuove ricerche sugli ossidi superiori dell'argento, 619.
- BARGONI N., vedi EULER (von) H.
- BERTINOTTI F., vedi LIQUORI A. M.
- BERTOLINI F. — Sugli integrali di una equazione differenziale ordinaria, 285.
- BOAGA G. — Livellazione astronomica lungo il parallelo 45° fra Torino e Pola, 179.
- Sul più conveniente orientamento geodetico italiano, 435.
- BOMPIANI E. — Topologia differenziale. — I. Enti topologici determinati da elementi differenziali di curve, 3.
- Topologia differenziale. — II. Invarianti topologici di elementi curvilinei, 8.

- BOMPIANI E. — Topologia differenziale. — III. Calotte superficiali del 2° ordine tangenti in un punto, 81.
- Topologia differenziale. — IV. Teoremi topologici e proiettivi sulle calotte superficiali, 169.
- Topologia differenziale. — V. Geometria delle superficie in uno spazio proiettivo curvo a tre dimensioni, 271.
- BONI A. — Notizie preliminari sulla stratigrafia del margine sud-orientale della regione fra il Sebino e l'Eridio, 356.
- BONINO G. B. e SCROCCO E. — Osservazioni sul calcolo degli indici di legame per il gruppo carbonilico in molecole di aldeidi e chetoni, 183.
- BURNIAT P. — Surfaces canoniques quadruples, 203.

C

- CAFIERO F. — Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata. Nota I, 305.
- Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata. Nota II, 450.
- CAGLIOTI V. e LIQUORI A. M. — Ricerche strutturali sul manganimolibdato di ammonio, 443.
- CALIFANO L. — Ricerche sulla separazione di acido nucleico da cellule batteriche per azione del calore, 94.
- CAROBBI G. — Celestina e apatite di stronzio sintetiche contenenti piccole quantità di mercurio, 87.
- CAVALLINI D., TENTORI L. e MONDOVÌ B. — I chetoacidi nel sangue e nelle urine nell'avitaminosi B_{12} , sperimentale del ratto, 70.
- CAVALLO G. — Distribuzione della catalasi nel «*Micrococcus lysodeicticus*», 417.
- CERQUIGLINI S., vedi GIGANTE D.
- CERUTI A. — La struttura submicroscopica delle membrane suberificate di castagno, 495.
- CERVONE E., vedi LIBERTI A.
- CHIORBOLI P., vedi SCROCCO E.

CICALA P. - Sulle deformazioni plastiche, 583.

COLACEVICH A. - Il sistema doppio DM Persei, 593.

COLACEVICH A. e VIVIANI L. - Misure fotometriche di luce zodiacale, 224.

COSSU A. - Su una notevole classe di varietà a connessione affine, 208.

— Sulla curvatura delle varietà a tre dimensioni dotate di una connessione affine, 551.

COTRONEI G. - Filippo Silvestri: l'uomo e il biologo, 514.

CROCCO G. A. - Turboelica e turbogetto, 428.

D

DACHÀ U. e MARTINI V. - Sulla sopravvivenza e motilità di segmenti isolati di intestino crasso e stomaco umani, 411.

DACHÀ U., vedi LOMBROSO U.

DALLA VOLTA V. - Sulla isometria di calotte superficiali nello spazio euclideo, 311.

DE GIORGI E. - Costruzione di un elemento di compattezza per una successione di un certo spazio metrico, 302.

DEMICHIELIS F. - Polverizzazione catodica dei metalli e struttura cristallina, 373.

E

EULER (von) H. e BARGONI N. - Sull'andamento della formazione di gruppi endiolici dal p-chinone e da alcuni pentosi, 438.

F

FADINI A. - Gli S_r , n -duali e le varietà di Segre degli S_p biduali, 557.

FAJER A. - Processi di clasmatosi in cellule coltivate *in vitro*, Nota I, 156.

FAJER A., vedi LEVI G.

FENOGLIO A. - Osservazioni geochimiche sul nichelio presente nelle masse peridotitico-serpentinose delle Alpi piemontesi, 282.

G

GAETA F. - Sulla classificazione delle superficie algebriche regolari con un fascio di curve ellittiche, 570.

GAGLIARDO E., vedi LUCENA F.

GALLI M. - È possibile determinare la velocità della luce in percorsi aperti? Nota II, 39.

GAMBA A. - Una generalizzazione della relazione di indeterminazione, 606.

GARAVALDI O. - A proposito di alcune recenti obiezioni contro la relatività einsteiniana, 226.

— Sul problema del « fioretto di perforazione » trattato col metodo operativo, 365.

GARELLO A. - Piante e tossine. Nota preliminare, 259.

GAUDIANO A., Vedi MARIANI A.

GIANGRECO E. - Sulle vibrazioni delle piastre con nervature. Nota I, 34.

— Sulle vibrazioni delle piastre con nervature. Nota II, 113.

GIANNUZZI M. A. - Orbita provvisoria della stella binaria ADS 7871, 120.

GIGANTE D. e CERQUIGLINI S. - Contributo alla conoscenza dei rapporti tra asfissia e tumori, 633.

GIORGI G. - Un enunciato generale sulla dinamica dei sistemi, 175.

GLÄSSER A. - Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di « Amaurobius erberi » Kys, 263.

GOLDSCHMIED P. e LUCENA F. - La riduzione del nitroso derivato del sale R al catodo a gocce di mercurio, 235.

GRANDI G. - Filippo Silvestri: l'entomologo, 527.

GRASSO V. - Rigenerazione di sferidi in stipiti decapitati di *Claviceps paspali*, Stev. et Hall, 146.

I

IPPOLITO F. - Sulle condizioni geologiche del terreno di fondazione di un eccezionale pilone per elettrodotto in zona sismica, 44.

J

JONGMANS F. - Remarques sur les formes qui contiennent une variété algebrique donnée, 476.

K

KRANJC A. - Proprietà gruppali del tensore energetico. Nota I, 483.

— Proprietà gruppali del tensore energetico. Nota II, 578.

KRZYŻAŃSKI M. - Sur la solution élémentaire de l'équation de la chaleur, 193.

L

- LEJA F. — Une méthode d'approximation des fonctions réelles d'une variable complexe par des fonctions harmoniques, 292.
- LEVI E. — Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee. Nota I, 465.
- LEVI G. e FAJER A. — Distribuzione della fosfatasi alcalina in cellule coltivate *in vitro*, 98.
- LIBERTI A. — Titolazione amperometrica dell'acido p-ammino salicilico con bromato potassico al microelettrodo rotante di platino, 608.
- LIBERTI A. e CERVONE E. — Titolazioni amperometriche con mercapto-benzotiazolo, 613.
- LIQUORI A. M. e BERTINOTTI F. — Ricerche strutturalistiche sul Nichelmolibdato d'ammonio, 494.
- LIQUORI A. M., vedi CAGLIOTI V.
- LOMBROSO U. e DACHÀ U. — Sul destino del grasso introdotto per via endovenosa nei cani spancreati e normali, 189.
- LONGO C. — Trasformazioni puntuali nell'intorno di un punto unito, 320.
- LUCENA F. e GAGLIARDO E. — Misura polarografica dell'attività interfaseale degli esacloro-cicloesani isomeri, 241.
- LUCENA F., vedi GOLDSCHMIED P.

M

- MACHNE X. — Condizioni catelettrotoniche realizzate nel ventricolo di « Emys orbicularis » mediante la distensione, 141.
- MAJORANA Q. — A proposito di una Nota di Orestina Garavaldi, 537.
- MALAGUTI A., vedi BARBIERI G. A.
- MALARODA R. — Su alcune porfiriti comprese nella serie del Tonale, e, in particolare, su un filone di notevole significato geologico, 134.
- MANARA C. F. — Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari mediante trasformazioni cremoniane, 103.
- MARIANI A. e GAUDIANO A. — Sulla determinazione spettrofotometrica della vitamina A, 43.
- MARTINI V. — Ricerche sull'attività contrattile dei muscoli lisci intestinali. — I. Potenziamento dell'azione dell'acetilcolina per opera del 933 F, 404.

MARTINI V. — Ricerche sull'attività contrattile dei muscoli lisci intestinali. — II. Potenziamento dell'azione dell'acetilcolina per opera dell'ergotamina e dei sali di bario, 509.

MARTINI V., vedi DACHÀ U.

MARUSSI A. — Sviluppi di Legendre generalizzati per una curva qualunque tracciata su di una superficie pure qualunque, 342.

— Sviluppi di Legendre generalizzati nello spazio, 486.

MINETTI S. — Sull'operazione di derivazione, 27.

MINEO M. — Paragone metrico d'intorni superficiali, 546.

MONDOVI B., vedi CAVALLINI D.

MONTINI T., vedi PONTREMOLI S.

N

NICOLINI T. — Sulle variazioni delle latitudini medie annuali, 218.

— Indizi di corrispondenze tra fenomeni geofisici e moto polare. Nota I, 348.

— Indizi di corrispondenze tra fenomeni geofisici e moto polare. Nota II, 599.

P

PALUMBI G. — Nuovi particolari sul comportamento delle fibre nervose nevrassiali e simpatiche nel labirinto umano, 629.

PERRI T. — La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris ». — V. Campi morfogenetici e leggi del Bateson, 65.

— La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris ». (Natura dello stimolo e valore della « competenza »). Nota VI, 394.

PETRUCCI D. — Ricerche sul metabolismo di « Oryza sativa », « Triticum vulgare » e « Vicia faba » in anaerobiosi, 382.

PLACINTEANU Joan I. — Sur le processus d'association des particules élémentaires, 587.

PIAZZOLLA. BELOCH M. — Topologia delle curve situate sopra superficie generali del 3° ordine con meno di 27 rette reali, 576.

PONTREMOLI S. e MONTINI T. — Intensità dei processi combustivi e quoziente respiratorio di ratti parzialmente epatectomizzati e splenectomizzati, 640.

PRODI G. - Un'osservazione sull'integrali dell'equazione $y'' + A(x)y = 0$ nel caso $A(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow \infty$, 462.

Q

QUATTRINI D. - Particolarità strutturali del nucleo nelle cellule nervose dei gangli cerebrali di *Helix vermiculata* Müller, 149.

R

RACAH G. - Sulla caratterizzazione delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi semisemplici di Lie, 108.

RADICATI L. A. - Sopra l'estensione finita dell'elettone nella teoria di Feynman, 232.

RIGHINI G. - Sulle fluttuazioni di intensità dei brillamenti solari, 336.

ROVERETO G. - Tettonica del metano e metaniti, 448.

RUOTOLO A. - Contributo allo studio dei dispositivi di blocco e dei corti circuiti nella circolazione del rene umano, 622.

S

SABAN G. - Sulle varietà quasi - asintotiche. - I. Proprietà elementari collegate alla nozione di specie, 562.

SABBADIN A. - Comportamento delle cellule somatiche e germinali nello sviluppo e nel differenziamento delle gonadi in una razza differenziata di « Rana esculenta », 398.

SACCONI L. - Un metodo spettrofotometrico indiretto per lo studio degli equilibri chimici, 376.

SBRANA F. - Su un problema di integrazione delle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti, 457.

SCROCCO E. e CHIORBOLI P. - Applicazione di una migliore approssimazione di calcolo alla valutazione delle frequenze Raman del gruppo carbonilico coniugato, 248.

SCROCCO E., vedi BONINO G. B.

SIERPIŃSKI W. - Sur les types ordinaux des ensembles linéaires, 427.

SIGNORINI A. - Un semplice esempio di « incompatibilità » tra la Elastostatica classica e la teoria delle deformazioni elastiche finite, 276.

SOBRERO L. - Di una elementare proprietà cinematica analoga al principio di Fermat, 360.

— Sui « meccanismi calcolatori » di Svoboda, 480.

STAMPACCHIA G. - Gli integrali doppi del calcolo delle variazioni in forma ordinaria, 21.

STEFANELLI A. - Sui problemi generali del differenziamento e della involuzione indagati su un determinato elemento nervoso, 59.

— I processi della rigenerazione del midollo spinale delle larve di Anfibi Anuri nella sua relazione con la corda dorsale, 498.

STORCHI E. - Sulle equazioni indefinite della statica delle membrane tese su generiche superficie, 116.

— Integrazione delle equazioni indefinite della statica dei veli tesi su una generica superficie, 326.

T

TANTURRI G. - Su certi involuppi proiettivamente legati ai fasci di curve piane, 213.

TENTORI L. e VIVALDI G. - Sindrome mortale caratterizzata da manifestazioni a carico del sistema nervoso nel ratto alimentato con una dieta altamente purificata contenente solfonamidoguanidina, 74.

TENTORI L., vedi CAVALLINI D.

TORALDO DI FRANCIA G. - Sezioni d'urto di schemi metallici, 369.

— Realtà fisica di una varietà di Fermat pseudosferica, 489.

TOSCANO L. - Relazione integrale di trasformazione dei polinomi ultrasferici in quelli di Laguerre, 200.

U

URBANI E. - Osservazioni preliminari sugli acidi nucleici e sulla natura della massa di *Giardina* nell'oocite di *Dytiscus marginalis*, 153.

— Osservazioni preliminari sugli acidi nucleici e sulla natura della « massa di Giardina » nell'oocite di « *Dytiscus marginalis* ». Nota II, 504.

V

VACCARO G. - Ricerche sugli spazi lineari di una ipersuperficie algebrica, 31.

VAONA G., vedi VILLA M.

VARDABASSO S. - Il Permico in Sardegna, 540.

VERDE M. - Urto neutroni-deutoni alle basse energie, 228

VILLA M. e VAONA G. - Varietà quasi-asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale, 470.

VIVALDI G., vedi TENTORI L.

VIVIANI L., vedi COLACEVICH A.

Z

ZANOBETTI D. - Sulla distribuzione transitoria disuniforme di una corrente continua in una lamiera e in un cilindro, e sulla resistenza di rotaia, 129.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi. — Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata. Nota I. F. CAFIERO, 305.

— Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata. Nota II. F. CAFIERO, 450.

— Sur la solution élémentaire de l'équation de la chaleur. M. KRZYŻAŃSKI, 193.

— Un'osservazione sugli integrali dell'equazione $y'' + A(x)y = 0$ nel caso $A(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow \infty$. G. PRODI, 462.

Analisi matematica. — Sugli integrali di una equazione differenziale ordinaria. F. BERTOLINI, 285.

— Costruzione di un elemento di compattezza per una successione di un certo spazio metrico. E. DE GIORGI, 302.

— Une méthode d'approximation des fonctions réelles d'une variable complexe par des fonctions harmoniques. F. LEJA, 292.

— Sull'operazione di derivazione. S. MINETTI, 27.

— Su un problema di integrazione delle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti. F. SBRANA, 457.

— Relazione integrale di trasformazione dei polinomi ultrasferici in quelli di Laguerre. L. TOSCANO, 200.

Anatomia umana. — Nuovi particolari sul comportamento delle fibre nervose nervassiali e simpatiche nel labirinto umano. G. PALUMBI, 629.

— Contributo allo studio dei dispositivi di blocco e dei corti circuiti nella circolazione del rene umano. A. RUOTOLO, 622.

Astronomia. — Altezza della cromosfera nell'anno 1949 ed andamento del ciclo solare. G. ABETTI, 432.

— Determinazione del passo del micrometro in A. R. del cerchio meridiano Repsold mediante stelle circumpolari e zenitali. Nota I. R. BARBATELLI, 125.

— Determinazione del passo e degli errori progressivi del micrometro in A. R. del cerchio meridiano Repsold mediante stelle circumpolari e zenitali. Nota II. R. BARBATELLI, 332.

— Il sistema doppio DM Persei. A. COLACEVICH, 593.

— Misure fotometriche di luce zodiacale. A. COLACEVICH e L. VIVIANI, 224.

— Orbita provvisoria della stella binaria ADS 7871. M. A. GIANNUZZI, 120.

— Sulle variazioni delle latitudini medie annuali. T. NICOLINI, 218.

— Sulle fluttuazioni di intensità dei brillamenti solari. G. RIGHINI, 336.

B

Biochimica. — Contributo alla conoscenza dei rapporti tra asfissia e tumori. D. GIGANTE e S. CERQUIGLINI, 633.

Biologia. — Fenomeni reattivi e degenerativi delle cellule nervose nei processi di cicatrizzazione del moncone caudale di Sauri. G. M. BAFFONI, 389.

— I chetoacidi nel sangue e nelle urine nell'avitaminosi B₂ sperimentale del ratto. D. CAVALLINI, L. TENTORI e B. MONDOVI, 70.

— Processi di clasmatosi in cellule coltivate *in vitro*. Nota I. A. FAJER, 156.

— Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di « Amaurobius erberi » Kys. A. GLÄSSER, 263.

— Distribuzione della fosfatasi alcalina in cellule coltivate *in vitro*. G. LEVI e A. FAJER, 98.

— La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris ». — V. Campi morfogenetici e leggi del Bateson. T. PERRI, 65.

— La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris ». (Natura dello stimolo e valore della « competenza »). Nota VI. T. PERRI, 394.

— Particolarità strutturali del nucleo nelle cellule nervose dei gangli cerebrali di *Helix vermiculata* Müller. D. QUATTRINI, 149.

- Comportamento delle cellule somatiche e germinali nello sviluppo e nel differenziamento delle gonadi in una razza differenziata di « *Rana esculenta* ». A. SABADIN, 398.
- Sui problemi generali del differenziamento e della involuzione indagati su un determinato elemento nervoso. A. STEFANELLI, 59.
- I processi della rigenerazione del midollo spinale delle larve di Anfibi Anuri nella sua relazione con la corda dorsale. A. STEFANELLI, 498.
- Sindrome mortale caratterizzata da manifestazioni a carico del sistema nervoso nel ratto alimentato con una dieta altamente purificata contenente solfonamido-guanidina. L. TENTORI e G. VIVALDI, 74.
- Osservazioni preliminari sugli acidi nucleici e sulla natura della *massa di Giardina* nell'oocite di *Dytiscus marginalis*. E. URBANI, 153.
- Osservazioni preliminari sugli acidi nucleici e sulla natura della « massa di Giardina » nell'oocite di « *Dytiscus marginalis* ». Nota II. E. URBANI, 504.
- Biologia vegetale.** — Ricerche sul metabolismo di « *Oryza sativa* », « *Triticum vulgare* » e « *Vicia faba* » in anaerobiosi. D. PETRUCCI, 382.

C

- Chimica.** — Ricerche strutturalistiche sul manganimolibdato d'ammonio. V. CAGLIOTI e A. M. LIQUORI, 443.
- La riduzione del nitroso derivato del sale R al catodo a gocce di mercurio. P. GOLDSCHMIED e F. LUCENA, 235.
- Titolazione amperometrica dell'acido p-ammino salicilico con bromato potassico al microelettrodo rotante di platino. A. LIBERTI, 608.
- Titolazioni amperometriche con mercapto-benzotiazolo. A. LIBERTI e E. CERVONE, 613.
- Ricerche strutturalistiche sul Nichelmolibdato d'ammonio. A. M. LIQUORI e F. BERTINOTTI, 494.
- Misura polarografica dell'attività interfasale degli esa cloro-cicloesani isomeri. F. LUCENA e E. GAGLIARDO, 241.
- Sulla determinazione spettrofotometrica della vitamina A. A. MARIANI e A. GAUDIANO, 43.

Chimica fisica. — Osservazioni sul calcolo degli indici di legame per il gruppo carbonilico in molecole di aldeidi e chetoni. G. B. BONINO e E. SCROCCO, 183.

— Un metodo spettrofotometrico indiretto per lo studio degli equilibri chimici. L. SACCONI, 376.

— Applicazione di una migliore approssimazione di calcolo alla valutazione delle frequenze Raman del gruppo carbonilico coniugato. E. SCROCCO e P. CHIORBOLI, 248.

Chimica inorganica. — Nuove ricerche sugli ossidi superiori dell'argento. G. A. BARBIERI e A. MALAGUTI.

Chimica organica. — Sull'andamento della formazione di gruppi endiolici dal p-chinone e da alcuni pentosi. H. von EULER e N. BARGONI, 438.

Commemorazioni. — Filippo Silvestri: l'uomo e il biologo. G. COTRONEI, 514.
— Filippo Silvestri: l'entomologo. G. GRANDI, 527.

Comunicazioni varie, 77, 159, 267, 423, 651.

Cosmogonia. — L'espansione dell'Universo nella meccanica classica. G. ARMELLINI, 15.

Cristallografia. — Osservazioni sulla struttura delle *d* e *l* β -asparagine idrate. A. ALIETTI, 49.

E

Endocrinologia. — Sul destino del grasso introdotto per via endovenosa nei cani spancreatici e normali. U. LOMBROSO e U. DACHÀ, 189.

Equazioni differenziali. — Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee. E. LEVI, 465.

F

Farmacologia. — Piante e tossine. Nota preliminare. A. GARELLO, 259.

Fisica. — Polverizzazione catodica dei metalli e struttura cristallina. F. DEMICHELIS, 373.

— È possibile determinare la velocità della luce in percorsi aperti? Nota II. M. GALLI, 39.

— Una generalizzazione della relazione di indeterminazione. A. GAMBA.

- A proposito di una Nota di Orestina Garavaldi. Q. MAJORANA,
- Sopra l'estensione finita dell'elettrone nella teoria di Feynman. L. A. RADICATI, 232.
- Sezioni d'urto di schemi metallici. G. TORALDO DI FRANCA, 369.
- Urto neutroni-deutoni alle basse energie. M. VERDE, 228.

- Fisica matematica.** — A proposito di alcune recenti obiezioni contro la relatività einsteiniana. O. GARAVALDI, 226.
- Sul problema del «fioretto di perforazione» trattato col metodo operativo. O. GARAVALDI, 365.
 - Un semplice esempio di «incompatibilità» tra la Elastostatica classica e la teoria delle deformazioni elastiche finite. A. SIGNORINI, 276.
 - Di una elementare proprietà cinematica analoga al principio di Fermat. L. SOBRERO, 360.
 - Realtà fisica di una varietà di Fermat pseudosferica. G. TORALDO DI FRANCA, 489.
 - Sulla distribuzione transitoria disuniforme di una corrente continua in una lamiera e in un cilindro, e sulla resistenza di rotazione. D. ZANOBETTI, 129.

- Fisiologia.** — Sulla sopravvivenza e motilità di segmenti isolati di intestino crasso e stomaco umani. U. DACHÀ e V. MARTINI, 411.
- Condizioni catelettrotoniche realizzate nel ventricolo di «Emys orbicularis» mediante la distensione. X. MACHNE, 141.
 - Ricerche sull'attività contrattile dei muscoli lisci intestinali. — I. Potenzamento dell'azione dell'acetilcolina per opera del 933 F. V. MARTINI, 404.
 - Ricerche sull'attività contrattile dei muscoli lisci intestinali. — II. Potenzamento dell'azione dell'acetilcolina per opera dell'ergotamina e dei sali di bario. V. MARTINI, 509.
 - Intensità dei processi combustivi e quoziente respiratorio di ratti parzialmente epatectomizzati e splenectomizzati. S. PONTREMOLI e T. MONTINI, 640.

G

- Geochimica.** — Osservazioni geochimiche sul nichelio presente nelle masse peridotico-serpentinose delle Alpi piemontesi. M. FENOGLIO, 282.

- Geodesia.** — Livellazione astronomica lungo il parallelo 45° fra Torino e Pola. G. BOAGA, 179.

- Sul più conveniente orientamento geodetico italiano. G. BOAGA, 435.
- Sviluppi di Legendre generalizzati per una curva qualunque tracciata su di una superficie pure qualunque. A. MARUSSI, 342.
- Sviluppi di Legendre generalizzati nello spazio. A. MARUSSI, 486.

- Geofisica.** — Indizi di corrispondenze tra fenomeni geofisici e moto polare. Nota I. T. NICOLINI, 348.

- Indizi di corrispondenze tra fenomeni geofisici e moto polare. Nota II. T. NICOLINI, 599.

- Geologia.** — Appunti geologici sul versante sinistro della media Val Camonica, dalla Val Palobbia alla Valle di Fa. B. ACCORDI, 253.

- Notizie preliminari sulla stratigrafia del margine sud-orientale della regione fra il Sebino e l'Eridio. A. BONI, 356.
- Su alcune porfiriti comprese nella serie del Tonale e, in particolare, su un filone di notevole significato geologico. R. MALARODA, 134.
- Tettonica del metano e metaniti. G. ROVERETO, 448.
- Il Permico in Sardegna. S. VARDABASSO, 540.

- Geologia applicata.** — Sulle condizioni geologiche del terreno di fondazione di un eccezionale pilone per elettrodotto in zona sismica. F. IPPOLITO, 44.

- Geometria.** — Sopra alcune superficie algebriche uniformizzabili. A. ANDREOTTI, 569.

- Topologia differenziale. — I. Enti topologici determinati da elementi differenziali di curve. E. BOMPIANI, 3.
- Topologia differenziale. — II. Invarianti topologici di elementi curvilinei. E. BOMPIANI, 8.
- Topologia differenziale. — III. Calotte superficiali del 2° ordine tangenti in un punto. E. BOMPIANI, 81.
- Topologia differenziale. — IV. Teoremi topologici e proiettivi sulle calotte superficiali. E. BOMPIANI, 169.
- Topologia differenziale. — V. Geometria delle superficie in uno spazio proiettivo curvo a tre dimensioni. E. BOMPIANI, 271.

- Surfaces canoniques quadruples. P. BURNIAT, 203.
- Su una notevole classe di varietà a connessione affine. A. COSSU, 208.
- Sulla curvatura delle varietà a tre dimensioni dotate di una connessione affine. A. COSSU, 551.
- Sulla isometria di calotte superficiali nello spazio euclideo. V. DALLA VOLTA, 311.
- Gli S_r n -duali e le varietà di Segre degli S_p biduali. A. FADINI, 557.
- Trasformazioni puntuali nell'intorno di un punto unito. C. LONGO, 320.
- Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari mediante trasformazioni cremoniane. C. F. MANARA, 103.
- Sulle varietà quasi asintotiche. — I. Proprietà elementari collegate alla nozione di specie. G. SABAN, 562.
- Su certi involuppi proiettivamente legati ai fasci di curve piane. G. TANTURRI, 213.
- Ricerche sugli spazi lineari di una ipersuperficie algebrica. G. VACCARO, 31.
- Varietà quasi-asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale. M. VILLA e G. VAONA, 470.

Geometria algebrica. — Sulla classificazione delle superficie algebriche regolari con un fascio di curve ellittiche. F. GAETA, 570.

- Remarques sur les formes qui contiennent une variété algébrique donnée. F. JONGMANS, 476.

I

Istochimica vegetale. — La struttura submicroscopica delle membrane subericificate di castagno. A. CERUTI, 495.

M

Matematica. — Paragone metrico d'intorni superficiali. M. MINEO, 546.

- Sulla caratterizzazione delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi semisemplici di Lie. G. RACA, 108.
- Gli integrali doppi del calcolo delle variazioni in forma ordinaria. G. STAMPACCHIA, 21.

Meccanica. — Sulle deformazioni plastiche. P. CICALA, 583.

— Turboelica e turbogetto. G. A. CROCCO, 428.

— Sulle vibrazioni delle piastre con nervature. Nota I. E. GIANGRECO, 34.

— Sulle vibrazioni delle piastre con nervature. Nota II. E. GIANGRECO, 113.

— Un enunciato generale sulla dinamica dei sistemi. G. GIORGI, 175.

— Proprietà gruppalì del tensore energetico. Nota I. A. KRANJC, 483.

— Proprietà gruppalì del tensore energetico. Nota II. A. KRANJC, 578.

— Sur le processus d'association des particules élémentaires. I. Joan PLACINTEANU, 587.

— Sui « meccanismi calcolatori » di Svoboda. L. SOBRERO, 480.

— Sulle equazioni indefinite della statica delle membrane tese su generiche superficie. E. STORCHI, 116.

— Integrazione delle equazioni indefinite della statica dei veli tesi su una generica superficie. E. STORCHI, 326.

Mineralogia. — Celestina e apatite di stronzio sintetiche contenenti piccole quantità di mercurio. G. CAROBBI, 87.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, 80, 166, 270, 426, 535, 652.

P

Patologia. — Ricerche sulla separazione di acido nucleinico da cellule batteriche per azione del calore. L. CALIFANO, 94.

— Distribuzione della catalasi nel « Micrococcus lysodeicticus ». G. CAVALLO, 417.

Patologia vegetale. — Rigenerazione di sferidi in stipiti decapitati di *Claviceps paspali*, Stev. et Hall. V. GRASSO, 146.

Personale accademico, 76, 267, 423, 532.

Plichi suggellati, 159, 268, 423, 532, 648.

Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei, 161.

Presentazione di libri, 77, 161, 269, 425, 534, 648.

Presentazione di Note e Memorie, 78, 159, 268, 424, 533, 649.

R

Relazioni di Commissioni, 79, 160, 534.

T

Temi per discussioni, 650.

Teoria degli insiemi. — Sur les types
ordinaux des ensembles linéaires. W. SIER-
PIŃSKI, 427.

Topologia. — Topologia delle curve si-
tuate sopra superficie generali del 3°
ordine con meno di 27 rette reali. M. PIAZ-
ZOLLA BELOCH, 576.

Z

Zoologia. — La castrazione parassitaria
nei Rizocefali ad opera dei Liriopsidi.
G. M. BAFFONI, 53.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO I.

GENNAIO 1950.

NOTE DI SOCI

BOMPIANI E., Topologia differenziale. — I. Enti topologici determinati da elementi differenziali di curve	Pag. 3
BOMPIANI E., Topologia differenziale. — II. Invarianti topologici di elementi curvilinei	8
ARMELLINI G., L'espansione dell'Universo nella meccanica classica	15

NOTE PRESENTATE DA SOCI

STAMPACCHIA G., Gli integrali doppi del calcolo delle variazioni in forma ordinaria (pres. dal Corrisp. <i>R. Caccioppoli</i>)	Pag. 21
MINETTI S., Sull'operazione di derivazione (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	27
VACCARO G., Ricerche sugli spazi lineari di una ipersuperficie algebrica (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i>)	31
GIANGRECO E., Sulle vibrazioni delle piastre con nervature. Nota I (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	34
GALLI M., È possibile determinare la velocità della luce in percorsi aperti? Nota II (pres. dal Corrisp. <i>L. Tieri</i>)	39
MARIANI A. e GAUDIANO A., Sulla determinazione spettrofotometrica della vitamina A (pres. dal Socio <i>D. Marotta</i>)	43
IPPOLITO F., Sulle condizioni geologiche del terreno di fondazione di un eccezionale pilone per elettrodotto in zona sismica (pres. dal Socio <i>R. Fabiani</i>)	44
ALIETTI A., Osservazioni sulla struttura delle <i>d</i> e <i>l</i> β -asparagine idrate (pres. dal Corrisp. <i>P. Gallitelli</i>)	49
BAFFONI G. M., La castrazione parassitaria nei Rizocefali ad opera dei Liriopsidi (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	53
STEFANELLI A., Sui problemi generali del differenziamento e della involuzione indagati su un determinato elemento nervoso (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	59
PERRI T., La determinazione di arti soprannumerari in « <i>Bufo vulgaris</i> ». — V. Campi morfogenetici e leggi del Bateson (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	65
CAVALLINI D., TENTORI L. e MONDOVI B. — I chetoacidi nel sangue e nelle urine nell'avitaminosi B_{12} , sperimentale del ratto (pres. dal Socio <i>G. Vernoni</i>)	70
TENTORI L. e VIVALDI G. — Sindrome mortale caratterizzata da manifestazioni a carico del sistema nervoso nel ratto alimentato con una dieta altamente purificata contenente solfonamidoguanidina (pres. dal Socio <i>D. Marotta</i>)	74
Personale accademico	76
Comunicazioni varie	77
Presentazione di libri	77
Presentazione di Note e Memorie	78
Relazioni di Commissioni	79
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 14 gennaio 1950	80

FASCICOLO 2.

FEBBRAIO 1950.

NOTE DI SOCI

BOMPIANI E. - Topologia differenziale. - III. Calotte superficiali del 2° ordine tangenti in un punto	Pag. 81
CAROBBI G. - Celestina e apatite di stronzio sintetiche contenenti piccole quantità di mercurio	87
CALIFANO L. - Ricerche sulla separazione di acido nucleinico da cellule batteriche per azione del calore	94
LEVI G. e FAJER A. - Distribuzione della fosfatasi alcalina in cellule coltivate <i>in vitro</i> (pres. dal Socio G. Levi)	98

NOTE PRESENTATE DA SOCI

MANARA C. F. - Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari mediante trasformazioni cremoniane (pres. dal Corrisp. B. Segre)	Pag. 103
RACAH G. - Sulla caratterizzazione delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi semisemplici di Lie (pres. dal Socio U. Amaldi)	108
GIANGRECO E. - Sulle vibrazioni delle piastre con nervature. Nota II (pres. dal Socio M. Picone)	113
STORCHI E. - Sulle equazioni indefinite della statica delle membrane tese su generiche superficie (pres. dal Corrisp. B. Finzi)	116
GIANNUZZI M. A. - Orbita provvisoria della stella binaria ADS 7871 (pres. dal Socio G. Armellini)	120
BARBATELLI R. - Determinazione del passo del micrometro in A. R. del cerchio meridiano Repsold mediante stelle circumpolari e zenitali (pres. dal Socio L. Carnera)	125
ZANOBETTI D. - Sulla distribuzione transitoria disuniforme di una corrente continua in una lamiera e in un cilindro, e sulla resistenza di rotaia (pres. dal Socio G. Giorgi)	129
MALARODA R. - Su alcune porfiriti comprese nella serie del Tonale e, in particolare, su un filone di notevole significato geologico (pres. dal Socio A. Bianchi)	134
MACHNE X. - Condizioni catelettrottoniche realizzate nel ventricolo di « Emys orbicularis » mediante la distensione (pres. dal Corrisp. G. Pupilli)	141
GRASSO V. - Rigenerazione di sferidi in stipiti decapitati di <i>Claviceps paspali</i> , Stev. et Hall (pres. dal Socio G. Negri)	146
QUATTRINI D. - Particolarità strutturali del nucleo nelle cellule nervose dei gangli cerebrali di <i>Helix vermiculata</i> Müller (pres. dal Socio N. Beccari)	149
URBANI E. - Osservazioni preliminari sugli acidi nucleici e sulla natura della massa di <i>Giardina</i> nell'oocite di <i>Dytiscus marginalis</i> (pres. dal Socio G. Cotronei)	153
FAJER A. - Processi di clasmatosi in cellule coltivate <i>in vitro</i> . Nota I (pres. dal Socio G. Levi)	156
Comunicazioni varie	159
Plichi suggellati	159
Presentazione di Note e Memorie	159
Relazioni di Commissioni	160
Presentazione di libri	161
Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei	161
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'11 febbraio 1950	166

FASCICOLO 3.

MARZO 1950.

NOTE DI SOCI

BOMPIANI E., Topologia differenziale. - IV. Teoremi topologici e proiettivi sulle calotte superficiali.	Pag. 169
GIORGI G., Un enunciato generale sulla dinamica dei sistemi	175
BOAGA G., Livellazione astronomica lungo il parallelo 45° fra Torino e Pola	179
BONINO G. B. e SCROCCO E., Osservazioni sul calcolo degli indici di legame per il gruppo carbonilico in molecole di aldeidi e chetoni (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	183
LOMBROSO U. e DACHÀ U., Sul destino del grasso introdotto per via endovenosa nei cani spancreati e normali (pres. dal Socio <i>U. Lombroso</i>)	189

NOTE PRESENTATE DA SOCI

KRZYŻAŃSKI M., Sur la solution élémentaire de l'équation de la chaleur (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	Pag. 193
TOSCANO L., Relazione integrale di trasformazione dei polinomi ultrasferici in quelli di Laguerre (pres. dal Corrisp. <i>G. Sansone</i>)	200
BURNIAT P., Surfaces canoniques quadruples (pres. dal Corrisp. <i>B. Segre</i>)	203
COSSU A., Su una notevole classe di varietà a connessione affine (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i>)	208
TANTURRI G., Su certi involuipi proiettivamente legati ai fasci di curve piane (pres. dal Corrisp. <i>A. Terracini</i>)	213
NICOLINI T., Sulle variazioni delle latitudini medie annuali (pres. dal Socio <i>L. Carnera</i>)	218
COLACEVICH A. e VIVIANI L., Misure fotometriche di luce zodiacale (pres. dal Socio <i>G. Abetti</i>)	224
GARAVALDI O., A proposito di alcune recenti obiezioni contro la relatività einsteiniana (pres. dal Socio <i>G. Giorgi</i>)	226
VERDE M., Urto neutroni-deutoni alle basse energie (pres. dal Corrisp. <i>G. Valle</i>)	228
RADICATI L. A., Sopra l'estensione finita dell'elettrone nella teoria di Feynman (pres. dal Corrisp. <i>G. Wataghin</i>)	232
GOLDSCHMIED P. e LUCENA F., La riduzione del nitroso derivato del sale R al catodo a gocce di mercurio (pres. dal Corrisp. <i>G. Semeraro</i>)	235
LUCENA F. e GAGLIARDO E., Misura polarografica dell'attività interfase degli esacloro-cicloesani isomeri (pres. dal Corrisp. <i>G. Semeraro</i>)	241
SCROCCO E. e CHIOROLI P., Applicazione di una migliore approssimazione di calcolo alla valutazione delle frequenze Raman del gruppo carbonilico coniugato (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	Pag. 248
ACCORDI B., Appunti geologici sul versante sinistro della media Val Camonica, dalla Val Palobbia alla Valle di Fa (pres. dal Corrisp. <i>G. Dal Piaz</i>)	253
GARELLO A., Piante e tossine. Nota preliminare (pres. dal Socio <i>A. Benedicenti</i>)	259
GLÄSSER A., Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di « Amaurobius erberi » Kys (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	263
Personale accademico	267
Comunicazioni varie	267
Plichi suggellati.	268
Presentazione di Note e Memorie.	268
Presentazione di libri	269
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'11 marzo 1950	270

FASCICOLO 4.

APRILE 1950.

NOTE DI SOCI

BOMPIANI E. - Topologia differenziale. - V. Geometria delle superficie in uno spazio proiettivo curvo a tre dimensioni	Pag. 271
SIGNORINI A. - Un semplice esempio di « incompatibilità » tra la Elastostatica classica e la teoria delle deformazioni elastiche finite.	276
FENOGLIO M. - Osservazioni geochimiche sul nichelio presente nelle masse peridotitico-serpentinose delle Alpi piemontesi	282

NOTE PRESENTATE DA SOCI

BERTOLINI F. - Sugli integrali di una equazione differenziale ordinaria (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	Pag. 285
LEJA F. - Une méthode d'approximation des fonctions réelles d'une variable complexe par des fonctions harmoniques (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	292
DE GIORGI E. - Costruzione di un elemento di compattezza per una successione di un certo spazio metrico (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	302
CAFIERO F. - Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata. Nota I (pres. dal Corrisp. <i>R. Caccioppoli</i>)	305
DALLA VOLTA V. - Sulla isometria di calotte superficiali nello spazio euclideo (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i>).	311
LONGO C. - Trasformazioni puntuali nell'intorno di un punto unito (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i>)	320
STORCHI E. - Integrazione delle equazioni indefinite della statica dei veli tesi su una generica superficie (pres. dal Corrisp. <i>C. B. Finzi</i>)	326
BARBATELLI R. - Determinazione del passo e degli errori progressivi del micrometro in A. R. del cerchio meridiano Repsold mediante stelle circumpolari e zenitali. Nota II (pres. dal Socio <i>N. Carnera</i>)	332
RIGHINI G. - Sulle fluttuazioni di intensità dei brillamenti solari (pres. dal Socio <i>G. Abetti</i>)	336
MARUSSI A. - Sviluppi di Legendre generalizzati per una curva qualunque tracciata su di una superficie pure qualunque (pres. dal Socio <i>G. Cassinis</i>)	342
NICOLINI T. - Indizi di corrispondenze tra fenomeni geofisici e moto polare. Nota I (pres. dal Socio <i>N. Carnera</i>)	348
BONI A. - Notizie preliminari sulla stratigrafia del margine sud-orientale della regione fra il Sebino e l'Eridio (pres. dal Corrisp. <i>Gh. Dal Piaz</i>)	356
SOBRERO L. - Di una elementare proprietà cinematica analoga al principio di Fermat (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i>).	360
GARAVALDI O. - Sul problema del « fioretto di perforazione » trattato col metodo operativo (pres. dal Socio <i>G. Giorgi</i>)	365
TORALDO DI FRANCIA G. - Sezioni d'urto di schemi metallici (pres. dal Socio <i>G. Abetti</i>).	369
DEMICHIELIS F. - Polverizzazione catodica dei metalli e struttura cristallina (pres. dal Socio <i>E. Perucca</i>)	373
SACCONI L. - Un metodo spettrofotometrico indiretto per lo studio degli equilibri chimici (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i>)	376
PETRUCCI D. - Ricerche sul metabolismo di « <i>Oryza sativa</i> », « <i>Triticum vulgare</i> » e « <i>Vicia faba</i> » in anaerobiosi (pres. dal Socio <i>G. Vernoni</i>)	382

BAFFONI M. — Fenomeni reattivi e degenerativi delle cellule nervose nei processi di cicatrizzazione del moncone caudale di Sauri (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	Pag. 389
PERRI T. — La determinazione di arti soprannumerari in « <i>Bufo vulgaris</i> » (Natura dello stimolo e valore della « competenza »). Nota VI (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	394
SABBADIN A. — Comportamento delle cellule somatiche e germinali nello sviluppo e nel differenziamento delle gonadi in una razza differenziata di « <i>Rana esculenta</i> » (pres. dal Corrisp. <i>U. D'Ancona</i>)	398
MARTINI V. — Ricerche sull'attività contrattile dei muscoli lisci intestinali. — I. Potenziamento dell'azione dell'acetilcolina per opera del 933 F (pres. dal Socio <i>U. Lombroso</i>)	404
DACHÀ U. e MARTINI V. — Sulla sopravvivenza e motilità di segmenti isolati di intestino crasso e stomaco umani (pres. dal Socio <i>U. Lombroso</i>)	411
CAVALLO G. — Distribuzione della catalasi nel « <i>Micrococcus lysodeicticus</i> » (pres. dal Corrisp. <i>L. Califano</i>)	417
Comunicazioni varie	423
Personale accademico	423
Plichi suggellati	423
Presentazione di Note e Memorie	424
Presentazione di libri	425
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 15 aprile 1950	426

FASCICOLO 5.

MAGGIO 1950.

NOTE DI SOCI

SIERPIŃSKI W. — Sur les types ordinaux des ensembles linéaires	Pag. 427
CROCCO G. A. — Turboelica e turbogetto	428
ABETTI G. — Altezza della cromosfera nell'anno 1949 ed andamento del ciclo solare	432
BOAGA G. — Sul più conveniente orientamento geodetico italiano	435
EULER (von) H. e BARGONI N. — Sull'andamento della formazione di gruppi endiolici dal p-chinone e da alcuni pentosi (pres. dal Socio Straniero <i>H. von Euler</i>)	438
CAGLIOTI V. e LIQUORI A. M. — Ricerche strutturalistiche sul manganimolibdato d'ammonio (pres. del Corrisp. <i>V. Caglioti</i>)	443
ROVERETO G. — Tettonica del metano e metaniti	448

NOTE PRESENTATE DA SOCI

CAFIERO F. — Criteri di compattezza per le successioni di funzioni generalmente a variazione limitata. Nota II (pres. dal Corrisp. <i>R. Caccioppoli</i>)	Pag. 450
SBRANA F. — Su un problema di integrazione delle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti (pres. dal Corrisp. <i>G. Sansone</i>)	457
PRODI G. — Un'osservazione sugli integrali dell'equazione $y' + A(x)y = 0$ nel caso $A(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow \infty$ (pres. dal Corrisp. <i>G. Sansone</i>)	462
LEVI E. — Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee. Nota I (pres. dal Corrisp. <i>G. Ascoli</i>)	465
VILLA M. e VAONA G. — Varietà quasi-asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i>)	470
JONGMANS F. — Remarques sur les formes qui contiennent une variété algébrique donnée (pres. dal Corrisp. <i>B. Segre</i>)	476

SOBRERO L. - Sui « meccanismi calcolatori » di Svoboda (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i>)	480
KRANJC A. - Proprietà grupali del tensore energetico. Nota I (pres. dal Socio <i>G. Giorgi</i>)	483
MARUSSI A. - Sviluppi di Legendre generalizzati nello spazio (pres. dal Socio <i>G. Cas-sinis</i>)	486
TORALDO DI FRANCIA G. - Realtà fisica di una varietà di Fermat pseudosferica (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i>)	489
LIQUORI A. M. e BERTINOTTI F. - Ricerche strutturalistiche sul Nichelmolibdato d'ammonio (pres. dal Corrisp. <i>V. Caglioti</i>)	494
CERUTI A. - La struttura submicroscopica delle membrane suberificate di castagno (pres. dal Corrisp. <i>C. Cappelletti</i>)	495
STEFANELLI A. - I processi della rigenerazione del midollo spinale delle larve di Anfibi Anuri nella sua relazione con la corda dorsale (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	498
URBANI E. - Osservazioni preliminari sugli acidi nucleici e sulla natura della « massa di Giardina » nell'oocite di « <i>Dytiscus marginalis</i> ». Nota II (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	504
MARTINI V. - Ricerche sull'attività contrattile dei muscoli lisci intestinali. - II. Potenziamento dell'azione dell'acetilcolina per opera dell'ergotamina e dei sali di bario (pres. dal Socio <i>U. Lombroso</i>)	509

COMMEMORAZIONI

COTRONEI G. - Filippo Silvestri: l'uomo e il biologo	Pag. 514
GRANDI G. - Filippo Silvestri: l'entomologo	527
Personale accademico	532
Plichi suggellati.	532
Presentazione di Note e Memorie.	533
Relazioni di Commissioni	534
Presentazione di libri	534
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 13 maggio 1950	535

FASCICOLO 6.

GIUGNO 1950.

NOTE DI SOCI

MAJORANA Q., A proposito di una Nota di Orestina Garavaldi	Pag. 537
VARDABASSO S., Il Permico in Sardegna	540

NOTE PRESENTATE DA SOCI

MINEO M., Paragone metrico d'intorni superficiali (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i>)	Pag. 546
COSSU A., Sulla curvatura delle varietà a tre dimensioni dotate di una connessione affine (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i>)	551
FADINI A., Gli S_r n -duali e le varietà di Segre degli S_p biduali (pres. dal Socio <i>G. Giorgi</i>)	557
SABAN G., Sulle varietà quasi asintotiche. - I. Proprietà elementari collegate alla nozione di specie (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i>)	562

ANDREOTTI A., Sopra alcune superficie algebriche uniformizzabili (pres. dal Socio <i>F. Severi</i>)	Pag. 569
GAETA F., Sulla classificazione delle superficie algebriche regolari con un fascio di curve ellittiche (pres. dal Socio <i>F. Severi</i>)	570
PIAZZOLLA BELOCH M., Topologia delle curve situate sopra superficie generali del 3° ordine con meno di 27 rette reali (pres. dal Socio <i>G. Castelnuovo</i>)	576
KRANJC A., Proprietà gruppali del tensore energetico. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Giorgi</i>)	578
CICALA P., Sulle deformazioni plastiche (pres. dal Socio <i>M. Panetti</i>)	583
PLACINTEANU IOAN I., Sur le processus d'association des particules élémentaires (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	587
COLACEVICH A., Il sistema doppio DM Persei (pres. dal Socio <i>G. Abetti</i>)	593
NICOLINI T., Indizi di corrispondenze tra fenomeni geofisici e moto polare. Nota II (pres. dal Socio <i>L. Carnera</i>)	599
GAMBA A., Una generalizzazione della relazione di indeterminazione (pres. dal Corresp. <i>G. Wataghin</i>)	606
LIBERTI A., Titolazione amperometrica dell'acido p-ammino salicilico con bromato potassico al microelettrodo rotante di platino (pres. dal Corresp. <i>V. Caglioti</i>)	608
LIBERTI A. e CERVONE E., Titolazioni amperometriche con mercapto-benzotiazolo (pres. dal Corresp. <i>V. Caglioti</i>)	613
BARBIERI G. A. e MALAGUTI A., Nuove ricerche sugli ossidi superiori dell'argento (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	619
RUOTOLO A., Contributo allo studio dei dispositivi di blocco e dei corti circuiti nella circolazione del rene umano (pres. dal Socio <i>S. Sergi</i>)	622
PALUMBI G., Nuovi particolari sul comportamento delle fibre nervose nevrassiali e simpatiche nel labirinto umano (pres. dal Socio <i>A. Pensa</i>)	629
GIGANTE D. e CERQUIGLINI S., Contributo alla conoscenza dei rapporti tra asfissia e tumori (pres. dal Socio <i>L. Cotronei</i>)	633
PONTREMOLI S. e MONTINI T., Intensità dei processi combustivi e quoziente respiratorio di ratti parzialmente epatetomizzati e splenectomizzati (pres. dal Socio <i>U. Lombroso</i>)	640
Plichi suggellati	648
Presentazione di libri	648
Presentazione di Note e Memorie	649
Temi per discussioni	650
Comunicazioni varie	651
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 3 giugno 1950	652
Indice per Autori	655
Indice per materie	660
Indici dei fascicoli	665

